Benoit B. Mandelbrot

伯努瓦·B·曼德布罗特

作 者 简 历

1924 年 12 月 20 日生于波兰华沙。

1944 年就读于法国巴黎高等技术学院,1947 年毕业,获工程师证书。

1948 – 1949 年　获美国加州理工学院航空工程硕士,后任航空学工程师。

1952 年获巴黎大学数学科学博士。

1949 – 1957 年　法国国家科学研究中心(CNRS)成员(先任随员,后任授课教师,再后任导师)

1957 – 1958 年　法国里尔大学应用数学讲师。
　　法国巴黎高等技术学院分析数学讲师。

1958 – 1993 年　纽约 IBM 托马斯·J·华生研究中心成员(1958 – 1974 年),研究员(1974 – 1993 年)。

1987 –　耶鲁大学数学系副教授。

长期职务

1950 – 1953 年　巴黎 LEP,S.A.彩电集团(Philips 集团)工程师。

1953 – 1954 年　普林斯顿高等研究院数学学院成员。

1955 – 1957 年　日内瓦大学数学课教员。

1962 – 1963 年　哈佛大学经济学访问教授和心理学研究员。

1963 – 1964 年　哈佛大学应用数学访问教授和生物医学计算机科学联合委员会成员。

1979 – 1980 年,1984 – 1987 年　哈佛大学数学系访问教授,后任数学教授。

科学院职务

1982 年　美国艺术和科学学院荣誉院士。

1987 年　美国国家科学院外籍院士。

1987 年　巴黎欧洲艺术、科学和人文学院院士。

1989 – 1993 年　IBM 技术科学院院士。

中译本序

高兴地听到分形在中国激起了人们的广泛兴趣，现在我的书又译成了中文，这将促使这部分人更大的兴趣并使他们更容易地得到满足。很遗憾，因为我甚至连一个中文字都不懂，更不能欣赏新出版的中译本了(也不能帮助译者校核他们工作的正确性)。但是这些书中的插图说明了一个不寻常的经历。的确，我的许多著作不是一种用文字组成的语言写成的，这是一种形状的语言，是一种我已经具有创造者特权的语言，而形状语言是不需要翻译的语言！

分形语言和“老的”欧几里得语言为完全不同的目标服务。但是许多人告诉我，他们发现新语言是用眼睛的，更加容易。而且，这种新语言具有国际特征，它把“国家”(如中国和美国)扩展到通常发现是很难交流的不同的“国家”类，如数学家王国、物理学家王国……甚至还有艺术家王国。的确，在我的一生中，在不同的阶段，曾经在几个领域中工作并对其作出贡献，我为此感到自豪。因此，物理学家最初形成的想法经常是提出一种被称为“纯数学的”新猜想。另一些想法原本想说明一个简单的数学公式，却被某些新东西增加到物理学家为理解大自然所需要的库存或工具箱中去。来自物理学和数学的想法，如果认真地观察并且明确地执行的话，就常常成为心灵中看得见的美。

注意到我这些想法始于非常实用主义的原因是很有意义的。数十年前，用来表达我思想的词汇在几个不同知识领域里都还不能被人们理解，我就决定尝试并使我的同事们信服，办法是通过他

们的眼睛直接进入他们的思想。长期以来，至少在我的西方文化中，眼睛通常不被科学所信任；事实上，对于许多科学家来说，眼睛是恐惧和决心的对象。举例来说，歌德的伟大歌剧浮士德的第Ⅰ卷，在其著名的一场剧中，魔鬼靡非斯特穿了浮士德博士（一位老教授）的外套，对一位被吓怕的学生描述了各门课程大纲，他用对两种文化的精彩描述作为结论（第 2038～2039 行）：

亲爱的朋友，一切理论都是灰色的，
而生命的金色之树是长青的。

近两个世纪以来，理论家们有各种理由拒不承认这位魔鬼的智慧，而许多数学家和物理学家继续以灰色为自豪，但是新的工具——计算机已经到来，它使分形几何学可能而且已经帮我确认，魔鬼不再必然是正确的。老的理论——它的灰色似乎已经无可指责（在某些情形下它已被一个世纪的评论所证实）——已经证明会产生出各种图样，但被认为是深奥莫测的生命和大自然的伪造品。

分形几何学的惊奇之一是有助于把眼睛带回到曾被排除出的科学著作中。欢迎回来！

伯努瓦·B·曼德布罗特
于　耶鲁大学　1997.1.9

又及。

自最早的英文版本于 1982 年问世以来，在 1981～1991 年的十年间已经出现了大量的分形应用工作。因此，应当对著作中的某些内容作些更新，我已要求译者把我所了解的有关分形的著作和我自己自 1981 年以来出版的全部论文插入到文献中去。由于其中的许多论文即使在西方也是难以获得的，而在中国是不可能得到的。为此，我们把由 Springer-Verlag 正在出版的几本书放在“Benoit B. Mandelbrot 选集”的标题下，他们将收集许多我的出版物、一些译著和以前未曾出版的各种著作。对包括在这些书中的论文将在文献中标以记号 S。

前　　言

本书基于并大部分替代了我于1977年所写的书:《分形:形、机遇和维数》,而后者又基于并大部分替代了我于1975年所写的法文书:《分形:形、机遇和维数》。每个版本都具有新的风格、一些删节和大量重写,这些几乎影响到每一章节,有些补充涉及我以前的工作,而(最重要的)详细补充则涉及新的发展。

沃斯(Voss, R. F.)对1977年的书和本书作出了实质性的贡献,特别是绘制,而今又重新绘制了分形图片、大多数地形图以及行星图。本书中许多新的引人注目的图画由诺顿(Norton, V. A.)编制程序。

其他宝贵的长期紧密协作者有:计算机绘图方面的汉德尔曼(Handelman, S. W.)和尔后的拉夫(Laff, M. R.),编辑和打字方面的迪特里希(Dietrich, H. C.)和尔后的里兹尼巧克(Riznychok, J. T.)。

在卷末的文献目录之后,还将分别对计算机绘图的程序设计者和其他特殊帮助者致谢。

我深深地感谢支持我的研究和写作的国际商用机器公司华特生(Watson, T. J.)研究中心。当我的书还在虚无飘渺之中时,作为小组负责人、部门领导人,而现在是研究主任的IBM公司副总裁戈莫利(Gomory, R. E.)就设想了保护和承诺写这本书的方式,而现在,更给予我所需要的一切支持。

我的第一篇科学论文发表于1951年4月30日。多年来,许多人觉得我的每项研究所选择的方向都不相同。但这种表面上的

无序性只是一种错觉，在其背后有明确的统一目标，本书及以前的两个版本正是试图阐明这个目标。聚沙成塔，我的大多数工作成了一门新学科的产前阵痛。

目　录

第一篇　引言

第1章　论题

为什么几何学常常被说成是“冷酷无情”和“枯燥乏味”的？原因之一在于它无力描写云彩、山岭、海岸线或树木的形状。云彩不是球体、山岭不是锥体、海岸线不是圆周、树皮并不光滑、闪电更不是沿着直线传播的。

更为一般地，我要指出，自然界的许多图形是如此地不规则和支离破碎，以致与欧几里得(Euclid)(几何)——本书中用这个术语来称呼所有标准的几何学——相比，自然界不只具有较高程度的复杂性，而且拥有完全不同层次上的复杂度。在实际应用上自然界图形的长度，在不同标度下的数值都是无限的。

这些图形的存在，激励着我们去探索那些被欧几里得搁置在一边，被认为是“无形状可言”的形状，去研究“无定形”的形态学。然而数学家们蔑视这种挑战，他们越来越多地选择了，想出种种与我们看得见或感觉到的任何东西都无关的理论，来逃避大自然。

作为对这个挑战的回答，我构思和发展了大自然的一种新的几何学，并在许多不同领域中找到了用途。它描述了我们周围的许多不规则和支离破碎的形状，并通过鉴别出一族我称为分形的形状，创立了相当成熟的理论。最有用的分形涉及机遇，无论是它的规则性还是不规则性都是统计意义上的。而且这里所述的形状还是趋于有标度的，这意味着其不规则程度和/或支离破碎程度，

在所有不同的标度下都是等同的。分形(豪斯多夫)维数的概念在本书中起着核心作用。

某些分形集合是曲线或曲面,另一些则是互不连接的"尘埃",还有一些的形状是如此地奇怪,以致无论在科学或艺术中都找不到合适的术语来称呼它们。我们鼓励读者现在就浏览一下书中的插图,看看它们是什么样子。

这些图中有许多形状是以前从未考虑过的,另一些则表示某些已知的构造方式,但常常也是第一次作出的。事实上,虽然分形几何学出现于 1975 年,但它的许多工具和概念却在以前(完全不同于我的各种目的)就发展起来了。通过把旧石料砌入新结构,分形几何学能够"借用"非常广泛而又严格的基础,很快引出数学中的许多引人注目的新问题。

尽管如此,本书仍恪守其宗旨,既不追求抽象性也不追求一般性,它既不是教科书也不是数学专著。尽管本书很厚,我却把它看成一本科学随笔,因为它是用个人的观点写成的,并不追求尽善尽美。像许多文艺随笔一样,常会兴之所至,离题闲扯。

这种不拘形式的行文或许能使读者增加兴趣,更易理解。本书中有许多数学上"驾轻就熟"的内容,特别在结尾之处。读者不妨浏览和跳过一些段落,至少在头一二次阅读时。

目　标

本书集不同学科的众多分析于一体,促进了一种新的数学和哲学的综合。因此,它既是范例集,又是宣言书。而且,它还揭示了一个富于艺术美的全新世界。

科学范例集

医生和律师各用"病例集"和"案例集"来称呼有一个共同题目的实际病例和案例的汇编。而科学上尚无相应的专门名词,因此

我建议也应用"范例集"这个名词。重要的范例需倍加注意，而稍次的也应给予评述：通常可利用先例而缩短讨论。

有一个范例的研究，涉及一个极著名的数学方法在一种众所周知的自然现象中的杰出应用，即物理学中布朗(Brown, R.)运动的维纳(Wiener, N.)几何模型。使人惊讶的是，我们遇到的并非维纳方法的新的直接应用。根据这种理论，在我们所处理的各种复杂程度较高的现象中，布朗运动只是一种特殊情况，一种极其简单且无结构的情况。然而，我们还是把它包括在内，因为许多有用的分形来自布朗运动的某种谨慎的修正。

另一些范例研究则主要报道我本人的工作、分形的雏形及其拓展(一些学者对本书的 1975 年和 1977 年版本所作反应)。有些范例与到处可见的山脉和类似物体的现实世界相关，从而最终实现了术语几何长久以来所许诺的内容。但某些范例述及亚微观的集合物——物理学的主要研究对象。

实质性的论题有时是深奥的。另外，即使论题是熟知的，它的几何方面也尚未被适当地探讨过。对此值得重温庞加莱(Poincaré, H.)的评论：有些问题是人们选择提出的，而另一些则是自行提出的。如果一个问题老是被提出而无反响，那么它势必遗留给下一代。

由于这个困难，前几版的书中强调指出，分形方法既是有效的又是"自然"的。人们不仅不应该抵制它，还应该因为长期没有它居然也还行得通而感到惊讶。又为了避免不必要的争议，在我的早期版本里尽量缩小以下两者之间的不连续性：对于标准的和其他已发表的材料的说明和用新的理论以及我自己的思想和结果所作的说明。相反，在本书中我却清楚地予以挑明。

最应强调的是，我并未把分形观点看成是万灵妙方，每个范例研究都应根据它所在领域内的准则来加以检验，也就是，多半是基于它在组织、说明和预测方面的威力，而不是作为数学结构的一个例子。因为每一个范例研究都必须化简以使它成为纯粹技术性的问题，读者若要了解详情，可查阅其他文献。因此(如像文献

d'Arcy Thompson 1917 那样),本书从头至尾都是序言性的。任何有更多期望的专家都将感到失望。

宣言书:大自然的几何学具有分形的面貌

现把下面这些序言放在一起,理由在于其中每一段都帮助人们理解其他各段,因为它们享有共同的数学结构。戴森(Dyson, F.J.)对我这个题目给出了一个有说服力的总结。

"分形这个词是曼德布罗特(Mandelbrot, B.B.)发明的,它把那些在纯数学的发展中起过历史性作用的一大类对象放在一个标题下。19世纪的经典数学与20世纪的现代数学为一个巨大的思想革命所分隔。经典数学扎根于规则的欧几里得几何结构和牛顿(Newton, I.)的连续演化动力学。现代数学开始于康托(Cantor, G.)的集合论和皮亚诺(Peano, G.)那充满空间的曲线。在历史上,革命的出现是由于发现了不适合欧几里得和牛顿模式的数学结构。这些新的结构曾被看作是'病态的'……是'怪物的画廊',是立体派绘画艺术和无音调音乐的近亲,因为它们在几乎相同的时期内破坏了艺术中固有的欣赏标准。创造怪物的数学家们认为这些怪物是重要的,因为它们说明了纯粹数学世界包含着远远超过在自然界中能看到的简单结构的极大可能性。20世纪数学的繁荣在于它相信完全超越了由自然根源所加的限制。"

"现在,正如曼德布罗特所指出的……大自然同数学家开了一个玩笑。19世纪的数学家也许缺乏想象力,然而大自然却并非如此。与数学家为了逃脱19世纪的自然主义而发明的结构相同的病态结构,却是环绕我们的熟知物体中所固有的。"①

简言之,我证实了帕斯卡(Pascal, B.)的观察:人的想象力总是先于大自然而疲竭。

---

① 引自 Freeman Dyson, Characterizing Irregularity(刻划不规则性), Science, May 12, 1978, Vol. 200, no. 4342, pp. 677~678。

尽管如此,分形几何学并非20世纪数学的直接“应用”。它是数学危机的一个晚产的新领域,这个危机从du Bois Reymond 1875首次报道外尔斯特拉斯(Weierstrass, K.)构造的处处连续而不可微函数时就已开始了(见第3、39和41章)。这次危机大约延续到1925年,主要演员是康托、皮亚诺、勒贝格(Lebesgue, H.)和豪斯多夫(Hausdorff, F.)。他们以及伯西柯维奇(Besicovitch, A. S.)、布尔查诺(Bolzano, B.)、蔡查罗(Cesàro, E.)、科赫(Koch, H. V.)、奥斯古德(Osgood, W. F.)、谢尔宾斯基(Sierpinshi, W.)和乌里松(Urysohn, P.)等人的名字,在对大自然的经验性研究中并不遇见,然而我要强调指出,这些天才们工作的影响,远远超出了原定的范围。

我将说明,他们及其几代后继者都不知道,在他们那些十分返朴归真的创造后面,有着一个对所有那些试图通过模仿大自然而赞美它的人而言,是趣味盎然的世界。

我们再一次为若干过去发生的事件已经导致我们所期望的东西而感到惊讶,“数学语言显示了它在自然科学中过分地有效……一个神奇的礼物,我们既不理解它,又不能获得它。我们应当为此高兴,并希望它会在将来的研究中继续有效,它将扩展到广阔的研究领域。无论对研究有利或不利,它是符合我们愿望的,或许会使我们感到困惑”(Wigner 1960)。

数学、大自然和美学

此外,分形几何学揭示了隐藏于数学中若干最严密最正规的篇章里的面貌:一个人们至今还未预料的、纯洁的和富于艺术美的世界。

“分形”和其他新词

在拉丁语中有一句谚语“正名就是求知”。直到我开始研究上

一节中所提到的那些集合之前,还不需要用一个专门术语来称呼它们。然而,随着经典的怪物因我的努力而被驯服和治理,也因为许多新的怪物开始出现,就越来越需要有一个专门术语了。为了给本书的第一版取书名,这件事情就显得十分迫切。

我由拉丁语形容词 *fractus* 创造了词“分形”(*fractal*)。相应的拉丁语动词 *frangere* 意味着“打破”和产生不规则的碎块。从而可见(对我们的需要是何等地适合!),除了“破碎的”(如像碎片或屈折),*fractus* 也应当具有“不规则”的含义,这两个含义都被保存在碎片(*fragment*)中。

正确的发音是 *frac'tal*,重读音节与 *frac'tion* 相同。

对组合词“分形集合(*fractal set*)”将给出严格的定义,但对组合词“自然分形(*natural fractal*)”将只是用于随意地指明一种实际上能由分形集合表示的自然图形。例如,布朗曲线是分形集合,而物理上的布朗运动是一种自然分形。

[因为代数(*algebra*)起源于阿拉伯语 *jabara*,意即结合在一起,分形和代数在语源上正好相对!]

较一般地,当我穿越新发现或新开拓的领地时,人们常常鼓励我行使为它的陆标取名的权利。通常,谨慎地取一个新的名称要比在一个常用的术语中加入新的意义更为恰当。

我们必须记起,一个词的普通含义常常是如此地根深蒂固,以致无论怎样重新定义,都不能加以改变。正如伏尔特尔(Voltaire)在 1730 年所说:“如果牛顿未曾用过吸引这个词,那么(法国)科学院的每个成员都将注意这一点;然而遗憾的是他在伦敦用了这个词,而对它嘲笑的想法却落在巴黎。”类似于“空间的星系分布对应于施瓦茨(Schwärtz, H. A.)分布的概率分布”一样的句子是糟糕透顶的。

本书中所用的术语要避免有任何不明确的危险,我们采用了很少使用的拉丁语和希腊语的词根,如孔洞(*trema*),以及在商店、家庭和农场中极少另作他用的固定词汇,家庭中使用的名称容易使那些怪物变得驯服!例如,我赋予尘埃(*dust*)、凝乳(*curd*)和乳

浆(*whey*)以学术上的含义。我还提倡用通铺覆(*pertiling*)来表示遍(=*per*)地铺覆砖块的形状。

对目标的再次说明

总之,本书叙述了我建议的对许多具体问题(包括一些很古老的问题)的解答,所借助的数学工具,有些看来是很古老的,但它们从未以这种方式应用过(除了对布朗运动的应用)。这种我们能够用数学处理的范例,以及这些范例的推广,成为一门新学科的基础。

我相信,当科学家们发现多种被他们称为颗粒状的、多源的、中介的、丘疹状的、有麻点的、树枝状的、海藻状的、奇怪的、缠绕的、弯扭曲折的、扭动的、纤细的和皱折的等东西可以用严格的和有效的定量方式来处理时,他们会感到惊讶和高兴。

我希望,当数学家们发现那些一直被认为是例外的集(Carleson 1967)在某种意义上是一种常规,原以为是病态的构造却应当自然地出自非常具体的问题,以及对大自然的研究应当有助于解决老问题并导致如此之多的新问题时,他们将感到惊讶和高兴。

尽管如此,本书还是避免了各种纯粹专业上的难点。这本书主要是为不同科学家的群体服务的。每个题目的表述都从具体的和特殊的范例开始。于是分形的本质将为读者逐步发现,而不是由作者和盘托出。

艺术是能够自娱的。

第2章　大自然中的不规则性和支离破碎性

“所有的绚丽都是相对的……我们不应当因为海岸不像防洪堤那样规则，便认为它是畸形的；也不应当因为山峰不是精确的金字塔或圆锥体，便认为它是失却形状的；也不应当因为星星的间距并非均等，便认为它们分布不当。这些并非大自然的不规则性，而只不过是我们以为如此而已；它们对地球上人类的生活和计划的实际应用也并无不便。”17世纪英国学者本特利(Bentley，R.)的这种看法(本书开卷语中有所反映)表明，把海岸线、山脉和天空的图形归在一处，并与欧几里得相比较，是一种古老的思想。

出自佩琳(Perrin，J.)的笔下

下面转向在时间上和职业上都较为接近的表达。为了详细说明本书将研究的海岸线、布朗轨迹以及大自然中其他图形的不规则性和支离破碎性，让我来介绍几段摘自(法文)文献 Perrin 1906 中的内容。佩琳因其对布朗运动的后继工作而获得诺贝尔奖，并推动了概率论的发展。但我这里的摘录出自他早年的一篇哲学论文。虽然后来在文献 Perrin 1913 的前言中有所提及，但直到我在本书的第一(法文)版中摘引该文，这篇文章却从未受到注意。我注意到这篇文章时已经太晚，因而它并未对我的工作产生实质性的影响，但它在我感到困难时鼓舞了我，并且它的说服力是无与伦比的。

“众所周知，在给出连续性的严格定义之前，一名好教师会指出初学者已经具有的、作为这种概念基础的思想。他画出一条良好定义的曲线并拿着一把尺说，‘你们看，在每个点上都有一条切

线。'或者,为了阐明运动物体在它的轨迹上某一点的真实速度这个概念,他说,'你们看,当两点之间相互无限靠近时,这两点之间速度的平均值当然不会有很大的变化。'对于一些熟悉的运动许多人虽然知道这个观点是足够正确的,却没有看出其中含有相当大的困难。"

"数学家当然知道,如果通过画一条曲线来说明每个连续函数有导数,那未免太幼稚了。虽然可微函数是最简单和最容易处理的,但它们毕竟是例外情况。应用几何语言,没有切线的曲线是常规的,而规则曲线如圆周,虽然很重要,却是十分特殊的。"

"乍看起来,考察一般情形似乎只是一种机敏而人为的智力测验,要求绝对精确又将导致十分冗长。那些听说存在着没有切线的曲线或没有导数的函数的人们,常常马上认为自然界既不会显示这种复杂性,甚至也不会暗示这种复杂性。"

"然而实际情况正好相反。数学家的逻辑比物理学家的实际想象力更接近于现实。客观地考虑某些实验结果,就可以说明这个观点。"

"例如,考察在肥皂溶液中加盐得到的白色皂片。从远处看,它的边界显得是清晰确定的,但若我们靠近它看,这种清晰性便消失了,可以判断不再能在任一点作一条切线。乍看起来似乎令人满意的切线,一经细察却是与曲线垂直或斜交的。应用放大镜或显微镜只能使我们更加疑惑不决,因为每次增加放大倍数都会出现新的不规则性,我们怎么也不能得到清晰、光滑的印象,如像对(例如)一个钢球所得到的那样。因此,如果我们承认钢球是说明连续性的经典形式,那么皂片正好逻辑地提示了无导数的连续函数的较一般概念。"

有必要中断一下,以提醒读者对图 2-1 和图 2-2 的注意。

本书每章的黑白图片都将汇集在该章的末尾几页,并顺序编号。对彩色图则冠以特别的编号,而彩图的文字说明独立于正文。

继续刚才的摘录。

"我们必须记住,上述轮廓线上某点切线位置的不确定性,与

在英国地图上观察到的不确定性决不是一回事。虽然后者随地图的比例尺不同而有所不同,但最终总能找到一条切线,因为地图是普通的图画。相反地,皂片和海岸线的特点在于,我们虽然不能明白地看出,却会想到任何尺度都将涉及进一步的细节,而使我们绝对不能作出一条切线。"

"继续我们的实验。用显微镜观察经搅动的悬浮在液体中的小粒子的布朗运动(见本书图 2-4 和 2-5)。把小粒子在两个十分接近的瞬时所占据的位置用直线相连接,则当两个瞬时之间的间隔减少时,完全无规律地改变该连线的方向。客观的观察者将因此得出结论,他是在与一个没有导数的函数打交道,而不是与一条能画出其切线的曲线打交道。"

"因此必须记住,虽然对任何物体的仔细观察,一般都导致发现一种高度无规则的结构,但用连续函数近似描述它的性质却常常是合适的。虽然木头可能是无限多孔的,但把锯下后刨光的一根梁的横截面积说成有限却是有用的。换句话说,在某些尺度上和对某些研究方法,许多现象都可以用规则的连续函数来表示,这有点像可以用一张锡箔来包覆一块海绵,却无需精确地仿照海绵的复杂外形。"

"进而,鉴于物质属性的无限颗粒结构是原子理论的精髓,因此把连续性这个严格的数学概念应用于现实世界,我们的威力将大为削弱。"

"例如,考察对给定点、给定瞬时的空气密度下定义的方式。设想作一个体积为 V,中心在给定点、包含的质量为 m 的一个球。比值 m/V 是球内空气的平均密度,而称这个比值的某个极限值为真实密度。然而这个概念却意味着,对小于一定体积的球,在给定瞬时的平均密度实际上是个常数。这种平均密度对容量分别为 1000 立方米和 1 立方厘米的球明显地不同,但当把 1 立方厘米与一千分之一立方毫米的容量相比较时,可以期望平均密度的变化只有 1/1,000,000。"

"设体积继续变小,这种涨落并非越来越不重要,而是要增加。

在布朗运动很活跃时，涨落可以达到1/1000，而当假想的小球的半径为百分之一微米量级时，涨落达到五分之一的量级。”

“再进一步，我们的小球将具有分子半径的量级。在气体中，它一般将位于分子之间的空间中，从而它的平均密度将为0。在我们指定的点，真实密度也将为0。但大约每1000次中有一次，这个点将位于一个分子之中，平均密度将比我们通常认为的气体真实密度大上1000倍。”

“让我们取更小的球。除非特殊情况，它将是空的并一直保持下去，因为在原子内部是虚无的空间；除了无限个孤立点（那里密度达到无限）。以外，真实密度几乎处处为0。”

“类似的考虑可以应用于诸如速度、压力或温度等物理量。我们发现，当把我们心目中的宇宙形象（必定是不完善的）逐步放大时，它们的变化将越来越不规则。表示任何物理性质的函数在物质所在空间中将形成一个带有无限个奇点的连续统[①]。”

“在宇宙中也出现无限不连续的物质和点缀着微小星星的连续以太体。事实上，我们上面得到的结论，也能通过想象一个依次包含着行星、太阳系、恒星和星云……的球而得到。

让我们采取一种任意的、但并非自相矛盾的假设。可能会有这样一个时刻到来，那时采用一个无导数的函数要比采用一个可求导的函数简单些。到那时，对不规则连续统的数学研究将会证明其实际价值。”

然后开始新的一节以便强调这一点。“然而，这种希望现在还只是一个白日梦。”

“怪物的画廊”成为一个科学博物馆

这个白日梦与布朗运动相联系的那一部分，在佩琳自己生活的

---

① 连续统（*continuum*）。数学术语，即非空的连续紧集。例如闭线段、圆等。——译者注

时代已成为现实。文献 Perrin 1909偶然地吸引了维纳的注意(见 Wiener 1956,第38～39页,或1964,第2～3页),维纳出于他自身的“惊讶和乐趣”,转向严格定义和研究第一个不可微的布朗运动模型。

这个模型至今仍有价值,但物理学家认为其中的不可微性可以归结为滥用理想化,也就是忽略了惯性。这使物理学家对维纳模型的特点不屑一顾,而这些特点对本书是最重要的。

至于佩琳所预见的数学对物理学的其他应用,直到本书出现之前还没有人去尝试过。佩琳所搜集的那些集合(外尔斯特拉斯曲线、康托尘埃及其类似物)仍然只是“纯粹数学”的一部分。

有些作者(的著作),例如 Vilenkin 1965,称这个搜集为“数学艺术博物馆”,毫无疑问(我相信),本书将证明这些用辞是何等地正确。我们由第 1 章知道,其他作者(由庞加莱开始)称它为“怪物的画廊”,正好是沃利斯(Wallis, J.)的“代数学”(1685)的仿效,其中称第四维是“自然界中的怪物,比狮头蛇尾或人首马身之类怪物更无可能”。

本书的一个目的是说明,通过在不同的明显“范例”中不懈地探索,同一个画廊也可以当作一个“科学博物馆”来参观。

数学家是值得赞美的,因为他们早就设计出了第一个这种集合;但他们又是应受到谴责,因为他们阻碍我们应用这些集合。■

图 2-1 至图 2-3　人造分形片

在第 2 章引述的一段给人以启迪的文字中,佩琳讨论了“在肥皂溶液中加盐得到的白色皂片”。这几张插图可看作佩琳注释的附图。

有人马上会指出,这些图既不是照片,也不是任何实际物体(皂片、雨云、火山云、小行星或小块矿物铜)的计算机复原图。

这些图也不是体现实际皂片形成的各种各样的理论——化学的、物理化学的和流体动力学的——结果。

这些图更不是直接与某种科学原理相联系的。

这些图是计算机产生的形状,用来(我尽可能简单地)描写体现在佩琳的描述中的一些几何特征,因此,我建议可用分形概念来建立它们的模型。

这些分形片只存在于计算机的存储器中,从未用它们来构成严谨的模

型，图中的明暗度也是计算得到的。

这些分形图片的构造将在第30章中说明。它们之间的明显直观差别在于图旁所写参数值 D 的不同。D 称为分形维数，它是本书的基础，将在第3章中引入。在所有三种情形里，总的形状是相同的，只因应用了一种近似而造成了差别，这将在图28-5至图28-7的说明中讨论。

说也奇怪，这种图的一个较早版本使人想起所谓尼斯湖水怪的照片。形状上的这种趋同性会是偶然的吗？

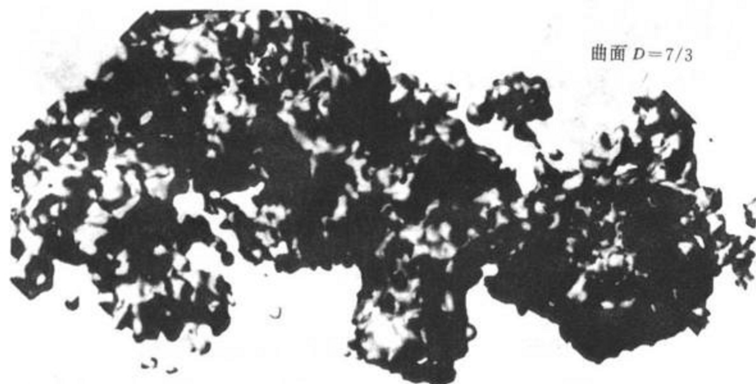


图 2-1

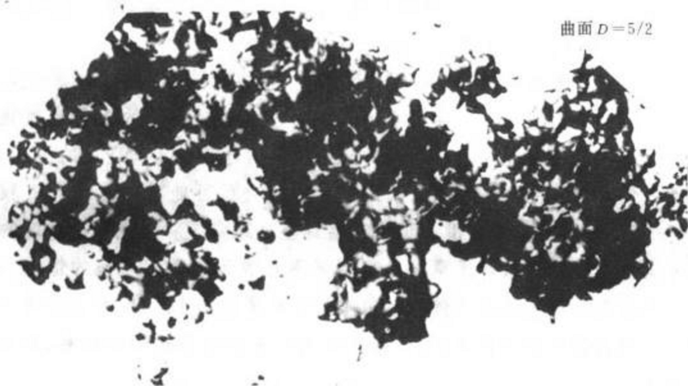


图 2-2

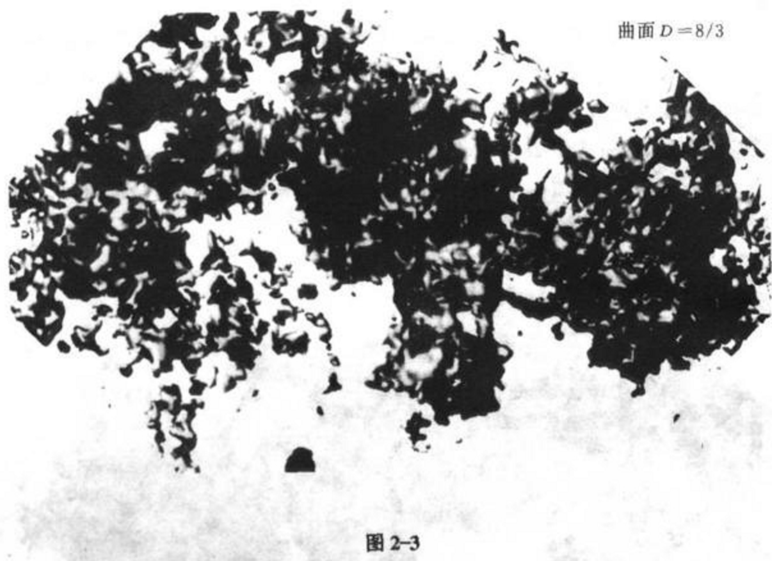


图 2-3

图 2-4 和图 2-5　佩琳的物理布朗运动的经典图画

文献 Perrin 1909 对物理布朗运动有如下描述："平衡流体（例如玻璃杯中的水）中的所有部分似乎是完全不动的。如果我们在其中放入一个密度较大的物体，它就沉下去。确实，物体越小，它下落就越慢；但一个可见的物体总会停在容器的底部，并且再也不能上升。然而，若液体中有很小的颗粒，则经过长时间后，定会观察到完全无规则的运动。这些小颗粒移动、停止、再次启动、上升、下降、再次上升，而无半点静止不动的趋势。"

这是本书中两张仅有的、描绘自然现象的图，复制自佩琳的书《原子》。这是在显微镜下观察到的一个半径为 0.53μ 的胶体颗粒运动的四条离散轨迹。相继位置相隔 30 秒（网格尺寸为 3.2μ），其间的连线并无物理上的意义。

继续我们对 Perrin 1909 的摘录："人们可以通过尽可能准确地跟踪一颗粒子，来试着确定平均搅动速度。但这种估计整个地错了。表观平均速度的大小和方向之变化都是杂乱无章的。这两张图只表示出真实轨线的惊人纠缠状的一小点儿。如果把记录该颗粒位置的频繁度增加 100 倍，则现在图上的每个线段都将被比整幅图画小、但却是被同样复杂的多边形所代替，如此等等。容易看出，在实践中，切线的概念对这种曲线是毫无意义的。"

图 2-4

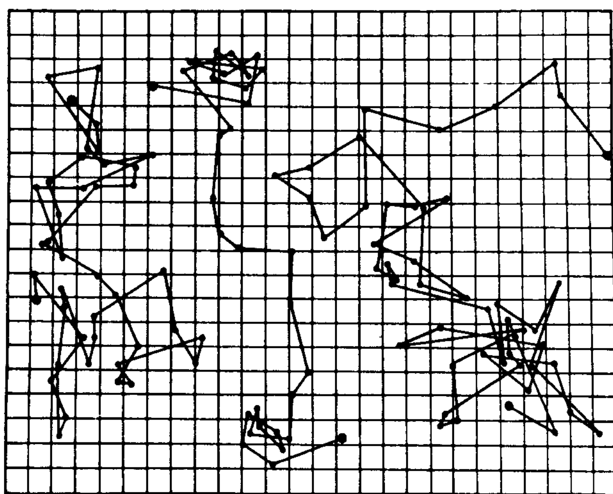


图 2-5

本书继续佩琳的研究课题,但从不同角度处理不规则性。我们强调以下事实:当越来越仔细地考察一条布朗运动的轨迹时(第25章),将发现它的长度无限地增加。

此外,布朗运动留下的轨迹几乎充满整个平面。这难道不是很诱人的结论吗?即在某种待定义的意义上,这条奇怪曲线的维数与平面的维数相同。事实上确实如此。本书的基本目的之一就是要证明,这个不严格的维数概念可以具有若干个不同的含义。布朗运动的轨迹在拓扑上是一条维数为1的曲线。然而,因为它实际上是充满平面的,它在分形意义上有维数2。按照在本书中引入的术语,这两个数值之间的差异说明了布朗运动是分形的。

第 3 章 维数、对称性、发散性

古老的维数概念和对称性概念在本书中起着核心作用。此外，我们将常常遇到发散性的各种征兆。

维数思想

在 1875 ~ 1925 年的数学危机中，数学家们承认，为了恰当地理解不规则性或支离破碎性（如像理解规则性和连通性一样），把维数定义为坐标的数目是不能令人满意的。康托在 1877 年 6 月 20 日致戴德金（Dedekind, R.）的信是对维数严格分析的第一步，下一步是皮亚诺在 1890 年作出的，最后几步则在本世纪 20 年代完成。

如像所有重要的智力发展那样，上述过程的结果可以用不同的方式来表达。任何一本关于维数理论的数学书的作者，都隐含地认为这个理论是唯一的。但照我的看法，重要的事实是：不严格的维数概念产生出多种数学刻划的方面，它们不仅在概念上是不同的，而且可能导致不同的数值，就像奥卡姆（Occam, W.）就总体所说的那样，不应把维数概念的种类增加到超过需要，但多种维数概念是绝对不可避免的。欧几里得（几何）局限于一些简单的集合，对于它们，所有有用的维数都互相吻合，因此可以称它们为维数上一致的集合。另一方面，本书大部分所述集合的各种维数互不吻合，称这些集合为维数上不一致的。

当由数学集合的维数转向以这些集合为模型的物理对象的“有效”维数时，我们将遇到不同种类的、不可避免的且具体而又实质性的含混。本章将首先考察这些维数的数学和物理内含。

术语“分形”的定义

本节应用了一些以前未定义过的数学术语，许多读者会发现浏览这段文字是有帮助的，或至少能感到踏实些，但读者也可以跳过这段文字。

本书中的这一段和后面的题外话，都用一个新的括号◁和▶来包容。后半个括号十分醒目，如果读者对题外话不感兴趣而打算跳过这一段往下阅读时就能够很容易地找到它。而前半个“空心括号”避免太显眼，免得对题外话过分注意。题外话常为后面的讨论埋下伏笔。

◁基本分形在维数上不一致的事实，可以把分形概念由直观转为数学概念。我把注意力集中于两个定义，它们都对欧几里得空间中的每个集合 $\mathbb{R}^E$（无论该集合是多么“病态”）赋予一实数，且在直观和正式意义下都应把此实数称为该集合的维数。两者中较为直观的是拓扑维，它由布劳韦尔（Brouwer, L. E. J.）、勒贝格、门杰（Menger, K.）和乌里佐恩给出，我们把它记为 D_T。将在第41章介绍。第二个维数在文献 Hausdorff 1919 中提出，其最终形式出自伯西柯维奇，这将在第39章中讨论，我们把它记为 D。

◁当我们（通常都是如此）在欧几里得空间 $\mathbb{R}^E$ 讨论时，D_T 和 D 都至少为0和至多为 E。但两者的相似性仅在于此。维数 D_T 总是一个整数，而 D 不必是一个整数。两个维数无需相同；它们只满足苏比尔拉（Szpilrajn）不等式（Hurewicz & Wallman 1941，第4章）：

$$D \geqslant D_T。$$

对于所有欧几里得（几何），$D = D_T$。但本书中几乎所有的集合都满足 $D > D_T$。以前没有标记这类集合的专用术语，因此我创造了术语分形（*fractal*），并定义如下：

◁把分形定义为其豪斯多夫-伯西柯维奇维数严格超过拓扑

维数的集合。[①]

◁每个具有非整数 D 的集合都是分形。例如，原始康托集是一个分形，因为我们在第 8 章中将看到

$$D=\log 2/\log 3\sim 0.6309>0,\text{而 } D_T=0。$$

而且 $\mathbb{R}^E$ 中的康托集可以被改造和推广，因此 $D_T=0$，而 D 可取 0 与 E 之间的任何值(也包括 0 与 E)。

◁此外，原始科赫曲线是一个分形，因为我们在第 6 章中将看到

$$D=\log 4/\log 3\sim 1.2618>1,\text{而 } D_T=1。$$

◁然而，分形的 D 也可以是一个整数。例如第 25 章说明，布朗运动的轨迹是分形的，因为

$$D=2,\text{而 } D_T=1。$$

◁D 不必是整数，这个引人注目的事实值得从语义学角度作些说明。如果把分数(*fraction*)广义地作为非整数实数的同义词，上列的一些 D 值便是分数的，实际上，豪斯多夫-伯西柯维奇维数常称为分数维数(*fractional dimension*)。但 D 可以是一个整数(不大于 E，但严格大于 D_T)。我称 D 为分形维数(*fractal dimension*)简称分维。▶

调和分析中的分形

◁分形研究的一部分是调和分析的几何方面，但在本书中并未强调这个事实。调和分析[即谱分析或傅立叶(Fourier, J.)分析]对大多数读者是陌生的，而许多能有效地应用它的人们也并不熟悉它的基本结构。

分形方法和谱方法都有各自的口味和特性，最好首先对这些方法本身加以研究，尔后再行评估。最后，与调和分析相比，分形

① 后来的定义有所变化。—— 译者注

研究较为轻松和直观。▶

关于"概念是新的……可是"

勒贝格对一些概念开玩笑说:"这些概念肯定是新的,可是它们被定义以后没有得到任何用处。"这个注记永不适用于 D,但 D 的应用只集中于属于纯数学的少数几个领域中,是我第一个成功地应用 D 来描写大自然。本书的一个中心目标,是确立 D 在经验科学中的中心地位,从而揭示这个概念的重要性远远超出了任何人的想象。

物理学的几个领域非常迅速地接受了我对 D 所作的这个断言。事实上,看到标准维数不合用之后,这些领域中的许多学者已经摸索试探了各种类型的维数,有间断的、不规则的或连续的。然而,这些方法一直是相互无联系的。此外,很少有几个维数的定义的应用超过一次,而且没有一个定义有数学理论作依据,也没有哪一个得到了足够充分的发展,重要原因是缺乏数学依据。相反地,将在这里描述的发展,关键是存在一种数学理论。

对形状的数学研究必须超越拓扑学的范畴

如果问一位数学家,数学的哪一个分支是研究形状的,那么他很可能回答是拓扑学。这个领域对我们的目标是重要的,并已在上节中提及;但在本书中将继续推进并说明,关于形状的不严格概念具有不同于拓扑学的另一些数学问题。

通常称形状的或对位形进行分析的几何学为拓扑学(*Topology*,源自希腊词 *Τοποσ*,意义为位置、形状),它认为,所有具有两个手把的壶的形状都相同,因为若两者都是无限可变形和可压缩的,那么无需开一个新的孔或封闭一个老的孔,就可以把其中的一个连续地变形为另一个。它还指出,所有单个岛屿的海岸线都有相同的形状,因为它们在拓扑上等同于一个圆周。海岸线和

圆周的拓扑维数是相同的:等于1。如果加上外围的"卫星岛屿",总海岸线拓扑等同于"许多"个圆周。这样,拓扑学就不能区分不同的海岸线。

相反地,第5章将表明,不同的海岸线趋于具有不同的分维。分维的差别表达了形状(我建议称之为分形形状)的非拓扑方面的差别。

大多数有现实意义的问题以越来越精巧的方式组合了分形和拓扑的特点。

应注意到,在拓扑学中,拓扑本身和 D_T 的定义是同时提出的,而 D 的概念却比分形形状的现代研究超前了半个世纪。

顺便说一下,豪斯多夫的名字已赋予一类拓扑空间,如把应用广泛的 D 约定称为豪斯多夫维,似乎暗指"豪斯多夫空间的维数",这就成为一个拓扑概念——然而事实并非如此。这是采用分维的名称比豪斯多夫维更加合适的另一个理由。

有效维数

除了以 D_T 和 D 为基础的数学概念外,本书常常求助于有效维数,这是一个将不予精确定义的概念。这是直观而有力地后退到毕达哥拉斯(Pythagoreans)的古典希腊几何。本书的一个新意在于允许有效维数的值是一个分数。

有效维数涉及数学集合与自然对象之间的关系。严格地说,物理对象例如网膜、丝线或小珠,都应当用三维形体来表示。然而,物理学家宁可把足够精细的网膜、丝线和小珠看成"实际上"分别具有维数2、1和0。例如,为了描述一条丝线,需把与一维或三维集合相联系的理论用修正项加以修改。当涉及的修正项越小,所确定的几何模型就越好。如果运气好的话,即使忽略了修正项,这个模型也仍然是有用的。换句话说,有效维数不可避免地带有主观性。这是近似性以及随之而来的分辨度的问题。

一个线球中隐含着不同的有效维数

为了证实上面提到的预感，我们来说明，由直径为1毫米的粗线绕成的直径为10厘米的球(潜在地)具有几个不同的有效维数。

对一个远距离的观察者，该球看来是一个零维的图形：一个点。(不管怎样，帕斯卡和中世纪的哲学家们就宣称，在宇宙尺度上，我们的整个世界只是一个点！)当观察者与该球相距为10厘米时，在这种分辨度下看到的小线球就是一个三维图形。当相距为10毫米时，线球成为一堆一维的丝线。在0.1毫米处看，每条线都成为一个圆柱体，而整体又成为一个三维图形。再在0.01毫米处看，每个圆柱体都分解为纤维，线球又成为一维的，如此继续，维数反复地从一个值变换到另一个值。当把小球用有限个像原子那样大小的点表示时，它又成为零维的。对一张纸，也会遇到类似的维数序列和交叉变化。

一个数值结果依赖于对象相对于观察者的关系，这个概念是本世纪物理学的精髓，并且甚至是它的一个典型范例。

本书中考虑的大多数对象类似于我们的线球，它们依次表现出不同的有效维数。但又添加了一个重要的新因素：在有明确定义的维数区域之间存在某些不定的转换时，可再被解释为其中有 $D > D_T$ 的分形区域。

空间均匀性、标度性和自相似性

暂时中止对维数的讨论。为了准备关于对称性的论题，我们注意到欧几里得(几何)开始于最简单的形状如直线、平面或空间，而最简单的物理学是当某些量(如密度、温度、压力或速度)呈均匀分布时产生的。

在直线、平面或空间上的均匀分布，有两个非常合意的性质。即在位移下的不变性和在尺度变换下的不变性。对于分形，两种

不变性都必须修正和(或)限制它的范围。从而,大多的分形是具有最大不变性的那些形状。

关于位移不变性:一条布朗运动轨迹的不同部分不能精确地相互重叠,而一条直线的相等线段却可以做到。然而,这些部分在统计意义上是可以重叠的。本书中几乎所有的分形都在一定程度上关于位移不变。

此外,本书中的大多数分形都在某种尺度变换下不变,称它们为可标度的。在通常的几何相似性下不变的分形,称为自相似的。

在组合词标度分形中,形容词用来限定名词。当取主词是分形时,指示无序性和包括无法处理的不规则性的情形,而修饰词标度指示一类有序。反过来,取标度作为主词指的是严格的有序,分形作为修饰词是指不包括直线和平面。

不应错误理解假设均匀性和标度性的动机。如像在大自然的标准几何学中那样,在此也没有人认为世界是严格地均匀或标度的。标准几何学把研究直线作为初步的,而力学也把匀速直线运动只看成第一步。

这对标度分形的研究同样正确,但这里的第一步要漫长得多,因为直线已被丰富而多种多样的可能性所代替,对此本书只能举例说明。无需惊讶,标度分形仅为所处理的自然形状提供了一级近似。人们一定十分诧异:这一级近似就已经非常合理。

值得指出,自相似性是一种古老的思想。在直线的情形,它出现于莱布尼兹(Leibniz, G. W.)的工作,约在 1700 年左右见第 41 章的**莱布尼兹和拉普拉斯的标度变换**。把它推广到直线和平面以外的情形,在数学中也几乎已有 100 年历史,然而它的真正的重要性直到本书写作之前还未受重视。它在科学中也不是新的,因为理查森(Richardson, L. F.)在 1926 年就指出,在很宽的尺度范围内,湍流可以分解为自相似的涡旋。进而,这种思想在力学中的引人注目的解析结论由文献 Kolmogorov 1941 所描绘。在物理学中,标度性的分析方法与重正化群的概念相联系见第 36 章。

然而,本书的 1975 年版本首次针对性地研究了大自然中非标

准标度性的几何学特征。

标度性以外的“对称性”

完成对直线的处理后，欧几里得研究有更丰富不变性（通常称为“对称性”）的形状。本书第15章至第20章将在非标度分形中作相当长的漫游。

自映射但非标度分形与“坚硬的”经典数学分析中某些最微妙和最困难的领域之间有密切的联系。与分析是一门枯燥乏味的学科这个传说相反，这些分形具有令人惊奇的绚丽。

发散性的征兆

在我们完成的几乎每一个研究范例中，都包含发散性的征兆。这就是说，通常期望它们是正的和有限的那些量却反而成为无限的，或是为零。乍看起来，这种错误性态似乎多半是古怪的，甚至可怕的，但仔细地重新审视表明，只要人们愿意应用新的思想方式，它将是完全可接受的……

对称性伴随有发散性的情形，也是量子物理学的一个熟知内容。其中消除各种发散性的研究是极其光辉的篇章。幸运的是，各种分形的发散性要容易处理得多。

第4章　变化与否认

前面已介绍了本书中的不同对象，现在让我们来考察本书的风格。本书也试图把几个不同的刻画合为一个整体。

含糊不是美德

为使对所处理的各种对象（其中有很多是艰深的）不一定熟悉的学者和学生能够理解，本书要附加许多说明解释。

但说明解释并非它的主要目标。

而且，我力图不要吓跑那些对数学的精确性并不感兴趣，但却会对我的主要结论感兴趣的读者。这些结论全部都有严格的数学依据（并且比在许多物理学科中坚实得多），但本书的风格是非正式的（尽管也是精确的）。所有的细节将留至第39章、文献和将要发表的论文中。

由于不能指望原始工作都说明这些关系，因此本书在某种程度上是一本普及性著作。

但普及并非它的主要目标。

博学有益于良智

如在第2章中举例说明的那样，本书包括了许多古老但无名的文献。直到我自己在有关领域内的工作基本完成以前，这些文献中的大多数都并未引起我的注意。它们未能影响我的思考。然而，在很长时间内，并无他人来分享我的乐趣，我因在古老的工作中发现了类似的东西而感到高兴，虽然这些东西可能表达得很简略和不甚恰当，而且明显地有着需要改进之处。这样，对

"经典工作"的兴趣(通常被科学实践所抹煞)在这里却哺育了我。

换句话说,我为发现了我——作为分形理论的设计师和建筑师——所需要的石料,也包括了许多曾被他人所考察过的东西而感到高兴。但为什么现在还要继续考究这个事实呢?随便的脚注符合流行的习惯,但过于强调遥远的原始工作的根源,却有滋生以下错误印象的危险性:我的建筑在很大程度上是用旧石料贴上新标签堆砌而成的。

于是,需要为我的考古癖作辩护,但我不想这样做。照我看来,说说就够了,对思想史的探究有益于科学家的良知。

然而,每当我们阅读一个伟人(当时还未成名)闪光的著作时,就会想到勒贝格为卢辛(Lusin, N.)的书所写的那篇令人欣喜的前言。勒贝格放弃了许多深刻的思想(据卢辛的书说这些思想应属于勒贝格),说他可能曾有过这些思想,但后来放弃了,故这些思想是卢辛创始的。类似的是文献 Whittaker 1953,其中摘自庞加莱和洛伦兹(Lorentz, H. A.)的引文(经过整理的)支持了他们两人明确地否定的论点:物理学的相对论是他们创造的,而不是爱因斯坦。

又,对于若干年前匆匆记下某种思想但未发展(我们现在已能加以发展)的每一作者,我们都冒着发现声称(当时)这种思想是荒谬的第二作者之险。难道我们应当归功于具有思想(但未发展)的年轻庞加莱而抛弃成熟的庞加莱吗? Stent 1972 会引导我们得出结论,太超前于所处的时代,除开使人因其被埋没而感到惋惜外,别无他用。

虽然对一种思想的历史过于博学将会弄巧成拙。但我的确希望维护来自过去的先声,在第 40 章和第 41 章的文献和历史简述中将进一步予以强调。

炫耀博学也肯定不是本书的主要目标。

“眼见为实”

在 1875～1925 年的数学危机刚开始时，康托致戴德金的信还沉湎于他自我发现的惊讶之中，并离开德语而用法语惊呼“眼见不为实”（*Je le vois, mais je ne le crois pas*）。就像得到暗示那样，数学试图避免被怪物的雕像引入歧途。一面是革新前和反革新的几何学中洛可可式①的华丽，另一面是外尔斯特拉斯、康托或皮亚诺的工作中几乎完全可见的无趣味性，两者之间的对比是多么强烈！在物理学，大约 1800 年，自从拉普拉斯那本无任何插图的《天体力学》一书之后，类似的发展可能来临。狄拉克（Dirac, P. A. M.）的陈述（在他 1930 年版的《量子力学》的前言中）是一个例子，他说，大自然的“基本规律并不以我们臆想中的图画按任何直接方式支配世界，相反地，它们控制着一个这样的基础，如不引入不相干性我们就不能形成一幅臆想中的图画”。

对上述观点的广泛和不加批评的承认已具破坏性。特别是，在分形理论中应“眼见为实”。因此，在读者继续阅读之前，我建议浏览一下本书中的画页。本书写作时就打算要帮助广大读者在不同程度上理解本书的内容，并试图说明，即使最最纯粹的数学家，精致的图画都既可以帮助他理解已有的概念，又可以帮助他寻找新的概念和猜测。当代的科学文献很少认为图画是如此地有用的。

然而，展示大量图画并非本书的主要目的；图画是重要的工具，但只不过是一种工具。

必须承认，对几何学作图解的任何试图都涉及一种基本的谬误。例如，直线应是无界、无限细和光滑的，但画出的任何直线都不可避免地长度有限，有厚度，并且边缘粗糙。尽管如此，粗略而

① 洛可可式（rococo），18 世纪时欧洲流行的一种纤巧而浮华的建筑和音乐形式。——译者注

启发性地画一条直线以发展直观并帮助寻找证明，对许多人都是有用的，对有些人甚至是必须的。粗略绘图作为丝线的几何模型比数学直线本身更合适。换句话说，对于所有实际目的而言，一个几何概念和它的图象，能在一定的特征尺寸范围内相互吻合就足够了，这个范围介于所谓外界限（一个大而有限的尺寸）与内界限（一个小的正值）之间。

如今，多亏计算机绘图，这类启发性图画在分形情况中是实用的。例如，所有自相似分形曲线都是无限长和无限细的。每条曲线还有很特殊的不光滑性，这就使它比欧几里得中的任何东西都要复杂得多。从而，最好的表示只能在有限范围内成立，在原则上，我们已经遇到过了。然而，把很大的和很小的细节去掉不仅是完全可接受的，而且明显是合适的，因为上、下界限在自然界都是存在或多少能感觉得到的。这样，典型的分形曲线可以用大量的、但数目有限的基本笔画满意地表达出来。

笔画的数目越多，过程的精确度就越高，相应的表示方式就越有用。因为分形概念涉及笔画在空间的相对位置，关键在于描画时应保持精确的比例。手工描绘几乎全无可能，但计算机绘图十分称职。本书中连续几版颇受它们的影响，即越来越成熟的绘图系统，以及越来越成熟的程序设计人员（艺术家）的高水平！我很幸运地能使用一种产生可供直接照相制版图画的系统。本书提供了该系统输出的样品。

图画对于把模型与真实情况相配合是绝妙的。如果一种或然性机制与某种分析观点得到的数据吻合，但模型的仿真看起来完全不“真实”，那么这种分析上的吻合是有疑问的。一个公式只能在很少几方面联系模型与现实之间的关系，而肉眼却具有巨大的综合和辨别能力。是的，肉眼有时会看出一些虚假的关系，它们而后被统计分析所否认，但这个问题多半出现在样本数目很小的一些科学领域中。在我们将探索的领域中，样本数目却是巨大的。

此外，图画帮助我们找到现存模型的新用途。我第一次体会到这种可能性是看到了 Feller 1950 中的随机游动图画——这条曲

线看来像山脉的轮廓或截面，而它与时间轴的交点，则使我联想起我当时正在研究的与电话差错有关的一些记录。对这种猜疑的探索最终分别导致第28章和31章中陈述的理论。我自己的计算机绘图也提供了类似的灵感，一方面对于我自己，另一方面也对于别人，他们在甚至我根本不知道的科学中，十分友好地"追随"着我。

自然，图画通过电影技术得到推广。Max 1971提供了一些经典分形有关的影片。

几何"艺术"的标准形状及新的分形形状

本书的封里及其前后的各种图形，是无意中计算机程序编制出错后的结果。我听到和读到，有意和无意中出错的图画被称为"一种新的艺术"。

很清楚，与艺术家竞争完全不是本书的目的。尽管如此，还必须谈及这一点。问题不在于图画是否整洁地画出和印出，而原图是计算机描绘也并非实质性的，除非出于经济上的考虑。但我们涉及的是一个引起争论而又古老的论题的一种新形式：数学概念的一切图形表示都是艺术的一种形式，它越简单越好，从而（借用绘画者的术语）可以称为"极小艺术"。

通常认为极小艺术局限于标准形状（直线、圆、螺旋线之类）的有限组合。但并非必须如此。用作科学模型的分形也是十分简单的（因为科学欣赏简单性）。有人说其中的许多可以看成极小几何艺术的一种新形式，对此我表示赞同。

是否其中有一些使人联想起埃舍尔（Escher, M. C.）？应当如此，因为埃舍尔从Fricke & Klein 1897中的双曲铺覆得到了灵感，而双曲铺覆（见第18章）又与归入分形范围中的形状联系紧密。

分形"新几何艺术"与"大师们"的绘画或"精美艺术"的建筑有着惊人的相似性。一个明显的理由在于，经典的视觉艺术（像分形

一样)涉及很多长度标度和偏爱自相似性(Mandelbrot 1981 l)。因为所有这些理由,也因为它出自模仿大自然以猜测其中规律的努力,分形艺术就容易被接受:其实它并非真是陌生的。抽象绘画就是按这种考虑变化的:我喜欢的那些接近于分形几何艺术,但也有许多接近于标准几何艺术——就我个人的欣赏喜好而言是过于接近了。

这里出现了一个矛盾:如在第1章中摘自戴森的文字中所述,现代数学、音乐、绘画和艺术可以看成是相互联系的。但在建筑学上这还是一种表面印象:一座米斯·范德罗尼(Mies van der Rohe)建筑是有界尺度的欧几里得几何的重现,而一座合乎潮流的、精美的艺术建筑则富于分形面貌。

逻辑学要点

以下各章处理的不同课题的复杂性渐次增加,以便逐步引入基本的思想。这种方法似乎是可行的,这个事实对分形理论有重大价值。其中有一些不可或缺的重复,当读者感到过于重复或过于复杂(特别是超越最基本数学的那些部分)时,可以跳过几页而不致失落论述的主线。在插图的说明中包含了许多信息。

正如已经提到的,插图集中在(首次涉及的)每章的末尾。作者也常常感到有必要与某些特殊的读者群体作私下交谈,因为如果对某些要点不作叙述或阐述,他们可能会颇感苦恼。这些插话嵌在正文中,但用新型的括号◁和▶标记,从而容易识别,以便跳过它们。另一些插话则作为附带的注记。我没有时间仔细计数,但本书中的插话比1977年版要少些。

用以下方法一看就表明涉及的 D 是理论维数还是经验维数。经验维数多半只取小数点后面1至2位,从而写成如1.2或1.37。理论维数则写成整数、整数的比值、整数的对数之比值,或至少具有4位小数的形式。

“言归正传”

抛弃了许多对本书而言是附属的目标以后，我重新回顾第 1 章。本书是一本宣言书和一部范例集，几乎全部奉献给我所创导的理论和课题。不过这常导致各种古老著作的复活和对它们的重新解释。

这些理论中没有哪一个已停止生长，有几个还只处于播种阶段。有些是在这里首次发表，而其他的则在我以前的文章中叙述过。此外，我要提到，我的书的较早版本激起了许多发展，这些发展又反过来激励了我。然而，我并不准备列出被证明分形是有用的所有领域，我担心若如此会破坏本书的随笔风格和宣言书的韵味。

最后提醒一点：我并不打算像专家们所要求的那样非常详细地阐述任何范例的研究。但许多论题是多次提及的；不要忘记应用索引。

第二篇　三种已驯服的经典分形

第5章　英国的海岸线有多长

为了引入第一类分形，即分维大于1的曲线，考虑一条海岸线。显然，它的长度至少等于在其始端与终端之间沿直线测量的距离。然而，典型的海岸线是不规则的，且是曲折缠绕的，毫无疑问，它要比两端点之间的距离长得多。

可以用多种不同的方法来较精确地计算其长度，本章分析其中的几种方法。结果是极其古怪的：海岸线的长度成了一个无从捉摸的东西，它在想要抓住它的人的手指之间滑来滑去。所有测量方法最终都导致以下结论：典型的海岸线很长，但其长度是如此不确定，以致最好把它看成无限长。从而，如果想要从其"延伸"的角度来比较不同的海岸线，长度不是一个合适的概念。

本章要寻找一种（关于长度的）改进的替代者，并由此发现，不能不引入分形概念的多种形式（维数、测度和曲线）。

多种测量方法

方法A　把两脚规调整为预定的跨距 ε（称为码尺长度），沿着海岸线跨步，每一步紧接前一步。将步数乘以 ε 即得到近似长

度 $L(\epsilon)$。随着两脚规跨距越来越小地重复这种操作，我们会期望 $L(\epsilon)$ 迅速趋向完全确定的值，称为真实长度。但事与愿违，在典型情况中，观察到的 $L(\epsilon)$ 无限增长。

出现这种行为的原因是显然的：若在一张十万分之一比例的地图上看到的海湾和海角，在万分之一的地图上重新考察，则将看到子海湾和子海角。在千分之一比例的地图上将出现子子海湾和子子海角，如此继续。它们每一次都增加了测量长度。

我们的实践证实，海岸线是如此不规则以致不能在简单几何曲线的长度清单上通过辨认来直接测量。因此，方法 A 是把海岸线用直线段（我们知道怎样来处理它们）构成的一系列折线代替。

方法 B 这种“光滑化”也可以用其他方法进行。设想有人沿着海岸线散步，所走路线是离水面不超过预先给定的距离 ϵ 的最短途径。然后他减少码尺的长度再行散步，如此反复，直到 ϵ 达到（例如）50 厘米。这时人已太大和太笨拙而不能再更加精细地跟踪。人们会争辩说，这种不能达到的精细程度(a)对人们并无直接兴趣，(b)随季节和涨落潮的变化太大，因此是毫无意义的。我们将在本章稍后谈及论据(a)。同时，我们能够使论据(b)无效，只要把注意力集中于岩岸，并当潮水低落和波浪可以忽略时进行考察。在原则上可以追随这种曲线的细部，先用绳系一只老鼠，然后系一只蚂蚁。如此等等。当散步者越来越靠近海岸线时，需覆盖的距离又无限地增加。

方法 C 方法 B 蕴含着陆地与水面之间的不对称性。为了避免这一点，康托建议，应该用一架焦距不准的照相机来观察海岸线，这时海岸线上的每一点便都转化为半径为 ϵ 的圆斑点。换句话说，康托考虑离海岸线距离不超过 ϵ 的陆地和水面上所有的点。这些点形成了一根宽度为 2ϵ 的香肠或带子（如图 5-3，但那是在另一种意义下得到的）。测量带子的面积并除以 2ϵ。如果海岸线是直的，那么带子将是一个矩形，上述比值将是真实长度。对于实际海岸线，我们得到一个估计长度 $L(\epsilon)$。当 ϵ 减小时，这个估计值无限地增加。

方法D　设想点描画家用半径为 ϵ 的圆斑点画地图，与方法C不同，不把圆心置于海岸线上，而要求覆盖全部海岸线的圆斑数目尽可能小。其结果是，在靠近海角处，这圆斑的大部分在陆地上，而在靠近海湾处，这些圆斑的大部分在海洋中。把这种地图的面积除以 2ϵ，就得到对长度的估计，这种估计也是"不正规"的。

测量结果的任意性

上节可总结为：用各种方法测得的主要结果相同：当 ϵ 渐次递减时，每个近似长度都趋于持续无限地增长。

为了确知这个结果的意义，让我们对来自欧几里得的标准曲线进行类似的测量。对于一个直线段，各种近似测量实质上等同，并由此定义了线段的长度。对于圆周，近似测量值将增加但迅速收敛于一个极限。长度能如此定义的曲线称为可求长的。

对于曾被人工治理过的海岸线（例如如今伦敦的切尔西海岸）的测量结果提供了更有趣的对比。因为人力不可能影响很大的地貌特征，取很大的码尺长度也得出随 ϵ 的减少而增加的结果。

然而，对切尔西海岸存在一个 ϵ 的 $L(\epsilon)$ 变化很小的中间区。这个区域可从20米降到20厘米（但不要过于认真地看待这些数值），但当 ϵ 小于20厘米时，$L(\epsilon)$ 又增加，并且测量受到石头的不规则性的影响。这样，若我们跟踪的曲线表示为 ϵ 的函数 $L(\epsilon)$，那么在 ϵ 介于20米与20厘米的区域内，几乎无疑将看到长度有一个平坦的部分，但这在海岸被治理之前是不可能观察到的。

在上述区域中进行的测量显然有极大的实际用途。因为不同科学学科之间的边界在很大程度上是不同科学家所从事工作的习惯性分界，可以把地理学局限于上述人类能达到的现象，例如，在上述的20米尺度范围内。这个限制将导致地理长度的一个完全确定的数值。海岸护卫队可以对未治理的海岸选用同样的 ϵ，而百科全书和年鉴可以采用相应的 $L(\epsilon)$。

然而，难以设想政府的所有部门都采用同样的 ϵ，而所有国家

都采用同样的 ε 则更是不可思议的。例如，在文献 Richardson 1961 中指出，西班牙与葡萄牙之间的共同边界的长度，或比利时与荷兰之间的共同边界的长度，在各自的百科全书中报道的数值相差20%。分歧必定部分地是对 ε 的不同选择的结果。即将讨论的一个经验性发现表明，ε 可以相差两倍而无需惊讶，小国(葡萄牙)对边界的测量要比它的大邻国更精确。

反对决定一个任意的 ε(作为标准)的第二个和更重要的理由，是哲学性的和科学性的。大自然并非脱离人类而存在的，任何人给以任何特定的 ε 和 $L(\varepsilon)$ 以过多侧重，就使得人类凌驾对大自然的研究，不论是通过他的典型码尺尺寸，或是通过他的高度变化的技术手段。如果海岸线仍然成为科学研究的对象，涉及它们长度的不确定性就不能消遥法外。从某种方式讲，地理长度的概念不像看起来那样讨厌，它不是完全“客观的”。观察者不可避免地会干预它的定义。

这种任意性是否得到公认，它有关紧要吗?

海岸线长度是不可确定的这个观点，无疑被许多人认为是正确的，我甚至认为不能有其他想法。但我寻求有关这方面书面陈述的努力几乎全盘失败。除了第 2 章中摘录过的佩琳的话外，在文献 Steinhaus 1954 中有一段评论：“当用不断提高的精度来测量维斯图拉河[①]左岸时，得到的长度会十倍、百倍甚至千倍于根据中学地图读出的长度……〔A〕接近实际的说法应称在大自然中遇到的大多数弧段是不可求长的。但这种说法与以下信念是矛盾的：不可求长的弧段是数学家们的发明，而自然弧段是可求长的。恰恰是相反的结论才是正确的。”但无论是佩琳还是施坦豪斯(Steinhaus, H.)都未进一步深化这一见解。

---

① 维斯图拉河(Vistula)——又称维斯瓦河。波兰的主河流，长 1068 公里，流向波罗的海。——校者注

让我来重述法迪曼(Fadiman, C.)报道过的一个故事。他的朋友卡斯纳(Kasner, E.)要求一个小孩“猜猜美国东海岸线的长度。在作出一次‘聪明’的猜测后……他也许会……指出,如果你测量每个海湾和入口的周长,然后测量它们每个突出部和凹入部,然后测量海岸物质的每个小质点、每个分子、原子等等之间的距离。显然,海岸线可以随你想要多长就有多长。孩子很快明白了这一点,但卡斯纳要说服成年人则困难得多”。这个故事是有意思的,但不涉及现在的讨论:卡斯纳的目标并不是要指出大自然的一个值得继续探索的方面。

因此,Mandelbrot 1967 s 和本书是对这个论题的第一批有效工作。

值得重温詹姆士(James, W.)在《信仰的意志》中的话:“可作出新发现的大领域……总是未经分类的残留物。在每种科学的合格的和有规律的事实的周围,(要特别细心观察)还有着一类云雾状灰尘在浮动,它们偶然出现、不规则和难得遇到,总是颇易忽略而不易顾及。科学的理想是封闭和完善的真理系统……在系统中不能分类的现象是矛盾荒唐的,并应视为不正确的……——人们以最好的科学良知忽略和否定它们……任何想要革新他的科学的人总是寻找着不规则的现象。当科学更新时,它的新方式中常常是例外的东西比假设作为规则的东西更多。”

本书确实试图更新大自然的几何学,它依赖于许多疑团,这些疑团是如此地不能分类,以致它们仅当审查人员们点头时才能发表。下节讨论第一个例子。

理查森效应

由上述方法 A 得到的近似长度 $L(\varepsilon)$的不定性,在 Richardson 1961 中经验地研究过,这篇资料是机遇(或命运)赐予我的。我对此论文很注意,因为(第 40 章)我知道理查森是一位伟大的科学家,他的独创性混杂着怪癖。如像我们将在第 10 章中看到的,我

们应该感谢他关于湍流本性的最深刻和最持久的思想，特别值得注意的是关于湍流包含有自相似级联的概念。他也研究过其他困难问题，诸如国家之间武装冲突的实质。他的经验有经典的简单性，但当他意识到有必要时，他对应用精确的新概念从不犹豫。

复制的图 5-5 是他死后在他的论文中找到的，曾发表于几乎是机密的(并且是完全不适当的)《年鉴》中。由论文和图可得出结论，存在着两个常数，我们称之为 F 和 D，从而——若海岸线用折线来近似——大约需要 $F\varepsilon^{-D}$个长度为 ε 的区间，合起来的长度为

$$L(\varepsilon) \sim F\varepsilon^{1-D}。$$

指数 D 的值似乎取决于所选择的海岸线，并且如果分别考虑同一海岸线的不同段，也会得到不同的 D 值。对理查森而言，问题中的 D 是一个无关紧要的简单指数。然而，其数值看来与估计海岸线长度所选择的方法无关。因此，D 应值得重视。

海岸线的分维

发掘出理查森的工作后，我提出(Mandelbrot 1967 s)该指数 D(尽管它并非整数)可以并应当被解释为一种维数，即分维。事实上，我注意到上述所有测量 $L(\varepsilon)$的方法都对应于(已在纯数学中应用的)维数的非标准广义定义。基于海岸线被最少数目的、半径为 ε 的斑点所覆盖的长度定义，在 Pontrjagin & Schnirelman 1932 中用来定义覆盖维。基于海岸线被宽度为 2ε 的带所覆盖的长度定义，体现了康托和闵科夫斯基(Minkowski, H.)的思想(图 5-3)，相应的维数出自布利高(Bouligand, G.)。然而这两个例子只暗示了许多维数(其中的大多数只为少数专家所知)散布在不同的专门数学章节中。其中的一些将在第 39 章中进一步讨论。

数学家为何引入了如此之多的不同定义呢？因为在某些情况下，它们产生不同的数值。然而幸运的是，这些情况在本书中从未遇到过，从而可能的不同维数的清单可以简化为两种，我将在下面

提及。较早的和研究得最好的可以追溯到豪斯多夫,我们即将用它来定义分维。较简单的一种是相似维:它不太普遍,但在许多情况下是足够合适的;这将在下章进行探讨。

显然,我并不打算给出理查森的 D 是一种维数的数学证明。在任何自然科学中都没有这种可信服的证明。目的只是要说服读者,对长度的观念提出了一个概念性的问题,而 D 提供了一个可行和方便的回答。分维现已进入对海岸线的研究中,即使有人进行明目张胆的反对,我想我们也不会回到不经思考和天真地接受 $D=1$ 的地步。谁要继续认为 $D=1$,他就必须说明理由。

第二步是解释海岸线的形状,并由其他更基本的考虑导出 D 的数值,这将留到第 28 章。在此只需声明,作为第一次近似,有 $D=3/2$。这个数值用来描述这些事实是太大了点,但完全足以说明,海岸线的维数超过标准欧几里得维数值 $D=1$ 是自然的、恰当的和在预料之中的。

豪斯多夫分维

如果我们承认,不同的自然海岸线真正具有无限的长度,而基于人为的 ϵ 值的长度只给出了一部分真实情况,那么如何才能把不同的海岸线相互加以比较呢?因为无限的四倍还是无限,所以每条海岸线的长度比其四分之一长度的四倍还要长,然而这种结论是无用的。我们需要一种较好的方式来表达以下的正确想法:整条曲线必须有这样的一种“测度”,它比其四分之一的四倍还要大。

达到这个目标的最聪颖办法是由豪斯多夫提出的。它从下列事实直观地得到启发:计算一个多边形的线性测度,可把它的各边长度(不经任何变换)直接相加得到。我们就称(将很快说明这样做的理由)这些长度被自乘到 $D=1$ 次幂(1 是一条直线的欧几里得维数)。类似地,要计算封闭多边形内部的面积测度,可通过在它上面铺覆正方形,并将所有正方形的边长都自乘到 $D=2$ 次幂

(2是一个平面的欧几里得维数)后相加得到。另一方面,当应用“错误的”幂指数时,所得结果不能给出有价值的信息:封闭多边形周边的面积是零,它的内部区域的长度是无限的。

类似地,我们可考虑由长度为 ϵ 的小区间构成的海岸线的多边形近似。如果它们的长度都自乘到 D 次幂,那么我们就得到一个暂称为“维数为 D 的近似测度”的量。因为按照理查森的研究,多边形的边数为 $N = F\epsilon^{-D}$,就是说近似测度取值 $F\epsilon^{D}\epsilon^{-D} = F$。

于是,**维数 D 的近似测度与 ϵ 无关**。由实际数据,我们容易发现这个近似测度随 ϵ 变化很小。

此外,“一个正方形的长度是无限”的事实上有一个简单的类比和推广:对任意维数 d(只要 $d < D$)算得的海岸线近似测度在 $\epsilon \to 0$时趋于 ∞。类似地,“一条直线的面积和体积为零”相对应,当 d 取大于D 的任何值时,相应的海岸线的近似测度在 $\epsilon \to 0$ 时趋于0。当且仅当 $d = D$ 时,近似测度的行为才是合理的。

曲线的分维可以超过1;分形曲线

按规定,作为定义测度时的指数,豪斯多夫维数保持了普通维数的作用。

但从另一个观点来看,D 确实是十分奇怪的:它是一个分数!特别地,它超过1(这是曲线的直观维数,并且可以严格地证明它就是曲线的拓扑维数 D_T)。

我建议把分维超过拓扑维数1的曲线称为**分形曲线**。本章可得出以下结论:在地理学家感兴趣的范围内,海岸线可以用分形曲线来模拟。海岸线是一种**分形图形**。 ▬

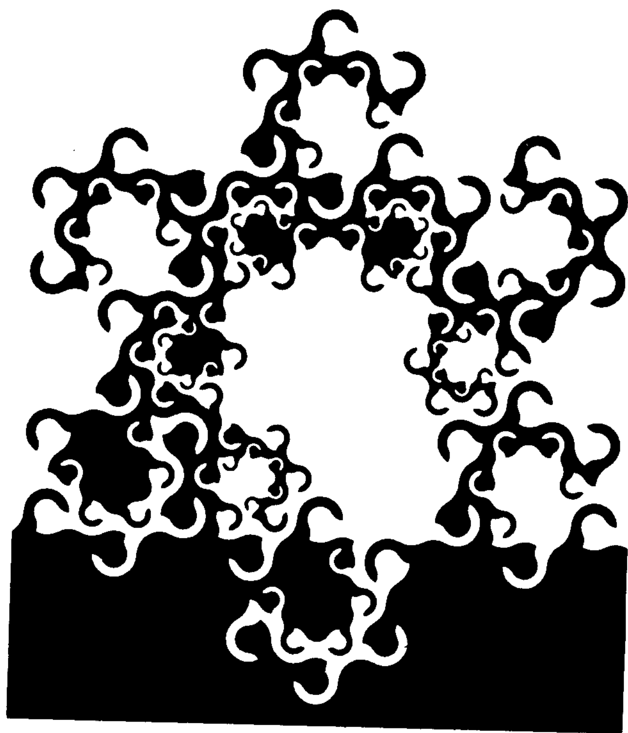


图 5-1

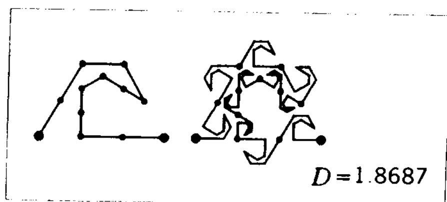


图 5-2

图 5-1 猴树

这里只需把这张附带的小插图图 5-1 看成填缝的装饰图。

然而，当读者读完第 14 章以后，他将在这张图中找到提示，来帮助拆开图 14-12（见第 181 页）中的“建筑物”。更清晰的提示可从图 5-2 所示的发生器①中找到。

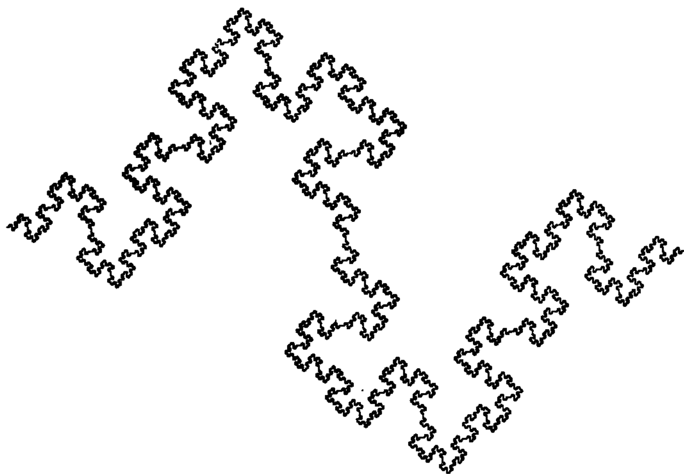


图 5-3

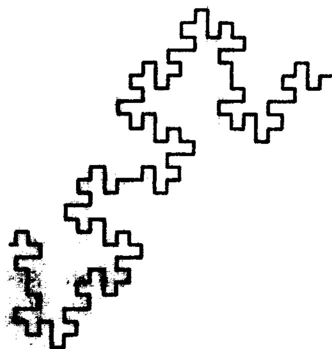


图 5-4

① 发生器（generator），亦译成“生成元”、“生殖者”或“生成器”。——译者注

图 5-3 和图 5-4　闵可夫斯基香肠一例

当数学家想要“驯服”一条杂乱无规的曲线时，标准步骤之一是选择一个半径 ϵ，并沿曲线上每一点画一个半径为 ϵ 的圆盘。这种步骤(它至少可追溯到闵科夫斯基，也许可以追溯到康托)虽然理由不足，但很有效。(关于术语香肠，有一个未经证实的传说，说它是将这种步骤应用于维纳的布朗曲线的残余物。)

在本图中，这种光滑化并未用于真实的海岸线，而是应用于将在后面(图 6-10)构造的理论曲线，这种构造方式是不断添加越来越小的细节。把图 5-4 的香肠段与图 5-3 所画香肠的最右端比较，我们看出曲线的构造将经历一个临界阶段，尔后它开始涉及小于 ϵ 的尺寸。以后的构造阶段对香肠无实质性影响。

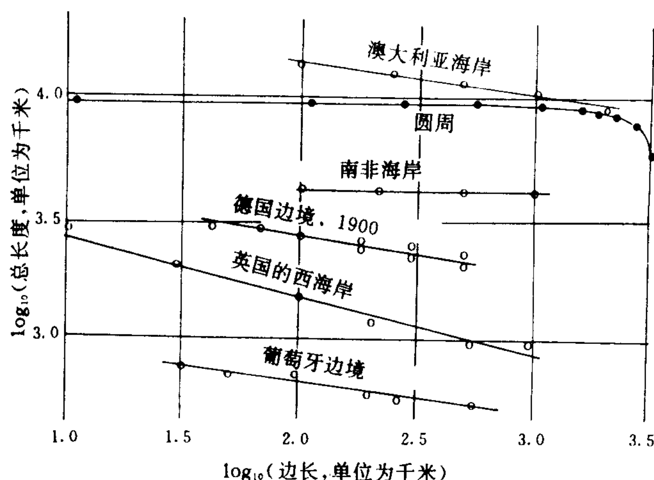


图 5-5　理查森有关海岸线长度增加率的经验数据

本图复制了理查森对不同曲线得到的长度的实测数据，他应用边长 ϵ 越来越小的正多边形测量方法。正如所预料的，越来越精确的测量使圆周的长度很快稳定为一个完全确定的数值。

与之相反，在海岸线的情况，近似长度完全不会稳定下来。当码尺长度 ϵ 趋于零时，画在双对数纸上表示近似长度的点，落在一条斜率为负的直线上。这对邻国之间的边界同样成立。理查森在百科全书中找到了西班牙与

葡萄牙各自声称的两国之间公共边界长度的明显差别(987对1214千米),同样的情况发生在荷兰与比利时之间(380对449千米)。取斜率为-0.25,假设ϵ相差一个因子2(这是完全可能的),就可以说明这些数值之间有20%的差额。

理查森并没有对他的直线的斜率作出理论上的解释。另一方面,本书把海岸线解释为近似的分形曲线,并用每条直线的斜率作为$1-D$的估计,这里D就是分维。■

第 6 章　雪花片和其他科赫曲线

为了充分理解我把理查森的 D 作为分维的解释，我们由无法控制的自然现象转向我们可以任意设计的几何结构。

自相似性和级联

到目前为止，我们强调了海岸线的几何学是复杂的，但在它的结构中也有很高的有序度。

虽然以不同比例尺描绘的地图在某些具体细节上有所不同，它们却具有相同的一般特征。在粗略的近似中，海岸线小的和大的细节是几何等同的，只是比例不同。

可以把这种形状设想为某种类型的焰火，在每个阶段产生的细部要比前一阶段的小。然而，较好的提法出自已提到的理查森关于湍流的工作：这种生成机制可以称为级联。

若一种形状的每一部分在几何上相似于整体，则此形状及生成它的级联都称为自相似的。本章探讨非常规则图形的自相似性。

与自相似形状形成鲜明对照的是下列曲线：(a) 它具有单一尺度，如圆周，(b) 它具有两个明显不同的尺度，如带有“皱褶”的圆周。这些形状可被称为尺度数有限的。

类似于海岸线的奇怪折线和三元科赫曲线 $\mathcal{K}$

为保证在一条曲线中有无限个长度标度，最保险的办法是有意识地分别安排它们。边长为 1 的正三角形有一个标度，边长为 1/3 的三角形具有一个较小的标度，以及边长为 $(1/3)^k$ 的三角形

具有递减的小标度。把这些三角形相互堆叠起来,如图 6-1 所示,就得到一个组合了所有尺度小于 1 的形状。

事实上,我们假设以 1/1,000,000 比例尺画出的一段海岸线是长度为 1 的直线段,称为起始器[①]。然后,假设在 3/1,000,000 比例地图上可见的细节,是把原来直线段的中间三分之一用一个隆起的等边三角形代替而得到的。这样所得的第二次近似是由四个等长度直线段形成的折线,称为发生器。再假设在 9/1,000,000 比例地图上出现的新的细节,是把发生器的四个直线段中的每一个,都用一个缩小为三分之一的发生器代替,从而形成子隆起而得到的。

以这种方式继续下去。折断每一直线段,把起始器用程度不断递增的折线来代替。因为我们整本书中都要与它们打交道,且让我称这种曲线为奇怪折线(*teragon*),来源于希腊语 τεραζ,意义是“怪物,奇怪的动物”,以及 γωνια,意义是“角,顶”。在公制系统里用垓(*tera*)作为因子 10^{12}的词冠是十分恰当的。

如果继续同样的级联过程直到无限,我们的奇怪折线收敛到一个极限,此极限最早在文献 von Koch 1904 中研究过,如图 6-7。我们将专门称它为三元科赫曲线,记为 $\mathcal{K}$。

由图 6-2 可以明显看出,这条曲线的面积将为 0。另一方面,在每个构造阶段它的总长度以 4/3 的比例增加,因此极限曲线的长度为无限。此外,它是连续的,但处处没有确定的切线——就像无导数的连续函数图一样。

作为海岸线的一种模型,$\mathcal{K}$ 只是一种有启发性的近似,但并不是因为它太不规则,而是因为与海岸线相比较,它的不规则性太系统化了。第 24 章至第 28 章将予以“放松”,以使它较好地与海岸线相拟合。

---

① 起始器(initiator),亦译成“起始元”,“发起者”。——译者注

作为怪物的科赫曲线

如同上一节中介绍的，科赫曲线应被看作几何中最直观的东西。但对它的传统动机是完全不同的。这正代表部分数学家对它的传统看法。他们只是全体一致地称 $\mathcal{K}$ 是一条怪异曲线！为确切起见，让我们来看看《直觉的危机》，(Hahn 1956，它将一再对我们有用)中写道："(一条不可求长或无切线的曲线)的特性完全躲避了直觉；事实上。数次重复弯折过程后，演化出的图样是如此复杂，以致难以直觉地理解；而且它使我们完全放弃了它将是趋于一条极限曲线的设想。只有思维的或逻辑的分析，才可以追随这个怪物到它的最终形式。于是，如果我们对此依赖于直觉，我们将会发生错误，因为直觉看来将导致以下结论：不可能有一条在任何点都没有切线的曲线。这是直觉失效的第一个例子，涉及微分学的基本概念。"

上述这些话中，说得最好的是它们煞住了爱尔米特(Hermite, C.)在 1893 年 5 月 20 日写给"从无导数函数的可悲瘟疫的害怕和恐惧中逃出来的"斯蒂尔吉斯(Stieltjes, T. J.)的著名惊呼。(Hermite & Stieltjes 1905, Ⅱ. p.318)人们喜欢相信伟人是完美的，但爱尔米特令人啼笑皆非，而勒贝格在 1922 年《摘记》(Lebesgue 1972~, Ⅰ)中提出了另外的论点。勒贝格写了一篇关于无切平面的曲面的文章，"全是褶皱的手帕"，希望由法国科学院发表，但"爱尔米特一度反对把它包括在《科学记录》中；这大约正是他写信给斯蒂尔吉斯的时候……"。

我们想起佩琳和施坦豪斯了解得更好，但单独以直觉为基础(施坦豪斯是以事实为基础进行论证的)作相反争辩的唯一数学家是莱维(Lévy 1970)："当听说几何直觉不可避免地使人认为所有连续函数都是可微的时候，我总是十分惊讶。从我第一次遇到导数这个概念起，我的经验就表明正确的正好相反。"

然而，这些言论以前未曾听说过。不单是几乎每本书，而且几

乎每个科学博物馆，都声称不可微曲线是反直觉的、“怪物类型的”、“病态的”，甚至是“不正常的”。

被驯服的科赫曲线，维数为 $D=\log 4/\log 3\approx 1.2618$

我认为科赫曲线是海岸线的一个粗糙但又是充满活力的模型。作为第一种定量试验，我们来研究边长为 ε 的三元科赫奇怪折线的长度 $L(\varepsilon)$。这个长度可以精确测量，其结果特别令人满意：

$$L(\varepsilon)=\varepsilon^{1-D}。$$

这个精确公式等同于理查森关于英国海岸线的经验规律。对三元科赫曲线，

$$D=\log 4/\log 3\approx 1.2618,$$

因此 D 落在理查森观察值的范围之内！

◁证明：显然，$L(1)=1$ 和

$$L(\varepsilon/3)=(4/3)L(\varepsilon)。$$

这个方程有形如 $L(\varepsilon)=\varepsilon^{1-D}$的解，若 D 满足

$$3^{D-1}=4/3。$$

因此 $D=\log 4/\log 3$，正如所断言的。▶

自然，科赫的 D 不是一个经验常数，而是一个数学常数。因而称 D 为维数的论据，在科赫曲线的情形比在海岸线的情形甚至更有说服力。

另一方面，对于维数 D(前一章中引入的概念)近似豪斯多夫测度等于 ε^D 乘以长度为ε 的边数，也就等于 $\varepsilon^D\cdot\varepsilon^{-D}=1$。这是对豪斯多夫维数为 D 的一个很好的表示。遗憾的是豪斯多夫的定义令人失望地难以严格处理。而且，即使它是容易处理的，把维数推广到超越整数范围也是一种影响深远的思想，以致应对它作进一步的推动。

相似性维数

碰巧在自相似形状的情形中,有一很容易进一步推动的概念,那就是相似性维数[①]。人们常常听说,数学家用相似性维数来猜测豪斯多夫维数。本书的一大部分只涉及这个猜测为正确的情形。在这时候,认为分维是相似维的同义词便是无害的。◁这就与把拓扑维作为"直观"维的同义词相对应。▶

作为推动的前奏,让我们考察标准自相似形状:直线上的区间,平面上的矩形等等,见图 6-4 和 6-5。因为一条直线的欧几里得维数是 1,从而对每个整数"基"b,"整个"区间 $0 \leqslant x < X$ 可以用 $N = b$ 个"部分"来铺覆(每个点都被覆盖一次且只被覆盖一次)。这些"部分"是区间 $(k-1)X/b \leqslant x < kX/b$,这里 k 由 1 至 b。每个"部分"都可以由整体按相似比值 $r(N) = 1/b = 1/N$ 导出。

类似地,因为平面的欧几里得维数是 2,从而无论 b 的值为多大,由矩形 $0 \leqslant x < X; 0 \leqslant y < Y$ 构成的"整体"能精确地被 $N = b^2$ 个"部分"所铺覆。这些"部分"是由不等式

$$(k-1)X/b \leqslant x < kX/b,$$
$$(h-1)Y/b \leqslant y < hY/b$$

定义的矩形,其中 k 和 h 由 1 至 b。现在可由"整体"按相似比值 $r(N) = 1/b = 1/N^{1/2}$ 导出每个"部分"。

对于一个直角平行六面体,同样的论证给出 $r(N) = 1/N^{1/3}$。

定义在欧几里得维数 $E > 3$ 的空间也无问题(欧几里得的或笛卡儿的维数在本书中用 E 表示)。所有 D 维长方体($D \leqslant E$)满足

$$r(N) = 1/N^{1/D}。$$

这样,

$$Nr^D = 1。$$

---

① 简称相似维。——译者注

等价的其他表达式是

$$\log r(N)=\log(1/N^{1/D})=-(\log N)/D,$$
$$D=-\log N/\log r(N)=\log N/\log(1/r)。$$

现在让我们转向非标准形状。为了使自相似性指数具有正式的意义，唯一的要求是形状为自相似的，也就是说，整体可以被分裂为 N 个部分，且可通过比值为 r(按照位移或对称性)的相似性得到。以这种方式得到的 D 总满足

$$0\leqslant D\leqslant E。$$

在三元科赫曲线的例子中，$N=4$ 而 $r=1/3$，因此 $D=\log 4/\log 3$ 等同于豪斯多夫维。

曲线；拓扑维

在前面，我们曾临时把科赫的 $\mathcal{K}$ 称为一条曲线，现重新研究这个概念。直观地，一段标准的弧是一个连通集合，但若去掉任何一个点，它就不连通了。一条封闭的标准曲线是一个连通集，如果去掉两个点，它就被分离为两段标准弧。由于同样的理由，科赫的 $\mathcal{K}$ 是一条曲线。

数学家认为，具有以上性质的所有形状，如 $\mathcal{K}$，[0,1]或圆周，其拓扑维都是 $D_T=1$。因而就不得不考虑其他的维数概念！作为奥卡姆(哲学家)王国的信徒，所有科学家都知道："实体不得增殖到超过需要。"因此必须承认，我们在几个几乎等价的分维之间来回折腾只是为了方便。然而，分维与拓扑维的共存却是一种需要。曾听劝告跳过第 3 章关于分形定义的插话的读者，现该回头去浏览一下，并建议每一位读者都读一下第 41 章关于维数的条目。

当存在界限 Λ 和 λ 时 D 的直观意义

文献 Cesàro 1905 用以下座右铭开始，

意愿无限，实现受制；

愿望无界，行动被限。

事实上，科学家受到的限制并不比莎士比亚笔下的特洛伊和凯丽希达来得少。为了得到一条科赫曲线，需把越来越小的新隆起级联推向无限，但在大自然中的每个级联都必定终止或改变特性。尽管无尽头的隆起有可能存在，但它们是自相似的概念却只能在一定的极限之间适用。低于下限的海岸线概念不再属于地理学。

因此，认为真实海岸线包含两个界限尺度是合理的，它的外界限 Ω 可以是包含岛屿或许大陆的最小圆周的直径，而内界限 ε 可以是第 5 章中提到的 20 米。难以给定确切的数字值，但对界限的需要却是无庸置疑的。

然而，在去掉很大和很小的细节之后，D 仍然是一个如第 3 章中所述的有效维数。

严格地说，三角形周长、大卫（David）的星星和有限科赫奇怪折线的维数都是 1。然而，无论是直观地或由所需修正项的简单性和自然性的实用观点出发，把高级的科赫奇怪折线看成更接近于维数为 $\log 4 / \log 3$ 的曲线，要比接近于维数为 1 的曲线更加合理些。

就海岸线而言，看来有几个不同的维数（回忆第 3 章中的丝线球）。它的地理维数是理查森的 D。但在物理学家感兴趣的大小范围内，海岸线可以有一个不同的维数——它是与水、空气和沙之间的界面概念相联系的。

另一种科赫发生器和自回避科赫曲线

让我们重述构造三元科赫曲线的基本原则。从两个图形：一个起始器和一个发生器开始。后者是由 N 段长度为 r 的等边组成的一条定向折线。这样，每个构造阶段都从一条折线开始，然后把每一直线段用一个缩小的发生器复制品来代替，而该复制品与被替换的线段有相同的端点。在所有情况下，$D = \log N/\log(1/r)$。

容易通过修改发生器，特别是通过把隆起与凹陷相组合来改变这种构造，例如后面的图示。我们以这种方式来得到科赫奇怪折线，它收敛于维数介于1和2之间的一条曲线。

所有这些科赫曲线都是自回避的：没有自交点。这就是为什么它们能被清楚地分成不相交的若干部分（为了定义 D）的原因。然而，漫不经心地选取发生器来进行科赫构造就有自接触、自相交甚至自重叠的危险。如果想要的 D 很小，那么很容易通过谨慎地选择发生器来避免双重点。当 D 增加时，这个任务将越来越困难，但只要 $D<2$，总还是可能的。

然而，试图达到维数 $D>2$ 的科赫构造将不可避免地导致无限次覆盖平面的曲线。$D=2$ 的情形有必要在第7章中专门加以讨论。

科赫弧段和半直线

在某些情况下，"科赫曲线"一词需要有更确切、更有针对性的术语来代替。图6-6的形状其实是直线段区间的科赫映射，可称为科赫弧。于是，图6-7中的边界就是由三条科赫弧构成的。把一段弧外推成一条科赫半直线常常是有用的：外推时以原弧的左端点为焦点，把原来的弧以 $1/r=3$ 的比例向右延伸，然后以 3^2 的比例延伸等等。每个接续的外推中都包含着前一个，而极限曲线包含着所有中间有限阶段。

D 是分数时，度量对半径的依赖关系

现在让我们把欧几里得中的另一个标准结果从欧几里得维数推广到分维。对于均匀密度为 ρ 的理想化物理对象（长度为 $2R$ 的杆，半径为 R 的圆盘或半径为 R 的球），其重量 $M(R)$ 是正比于 ρR^E 的。对于 $E=1,2$ 和3，比例常数分别等于 $2,\pi$ 和 $4\pi/3$。

规则 $M(R)\propto R^D$ 也可以应用于自相似的分形。

在三元科赫的情形，当原点是科赫半直线的一端时证明最为简单。若半径为 $R_0=3^k(k\geq 0)$ 的圆包含的质量为 $M(R_0)$ 时，半径为 $R=R_0/3$ 的圆包含的质量为 $M(R)=M(R_0)/4$。

则

$$M(R)=M(R_0)(R/R_0)^D=[M(R_0)R_0^{-D}]R^D。$$

这样，比值 $M(R)/R^D$ 与 R 无关，可用以定义“密度”ρ。

科赫运动

设想有一点沿着一条科赫半直线运动，在相等的时间内经过相等长度的弧段。如果随后把时间作为位置的函数求逆，我们将得到位置作为时间的函数，也就是一种运动。当然，它的速度是无限的。

关于随机海岸线的预告

科赫曲线使我们想起实映射，在本书的每种范例研究的早期模型中，都有一些几乎相同的重要缺陷：它的各部分是相互等同，而自相似比 r 必须是形为 b^{-k} 的严格比例式[其中 b 是一个整数，即 $1/3,(1/3)^2$ 等等]中的一个。这样，科赫曲线只是海岸线的一个很初步的模型。

我发展了多种方法来避免这两个缺陷，但全都涉及概率复杂性。当我们澄清了关于非随机分形的许多争议后，就能较好地处理这些复杂性。然而，熟悉概率论而又富于好奇性的读者可以提前看一下我的“曲折弯绕的曲线”模型(第 24 章)，更重要的是基于分数布朗曲面的等高曲线模型(第 28 章)。

在这一小节之后仍用同样的处理方法。要讨论的大自然的许多图样是与系统分形的背景相违背的，后者已提供了一个很初步的模型，而我倡导的随机模型则将推迟到后面章节中再行介绍。

提醒 在精确已知 D 是非整数并写成小数形式以便于比较的各场合中，D 都有四位小数。选择这个数字 4 是要使人明显看出，D 既不是一个经验值（现时所知的所有经验值都只有 1 或 2 位小数），也不是一个不完全确定的几何值（就现时所知，它或有 1 至 2 位小数，或者有 6 位小数或更多）。

复杂、或者简单而规则?

科赫曲线展示出一种复杂性和简单性的新颖而又颇有趣味的结合。晃眼一看，它们比欧几里得的标准曲线要复杂得多。然而，柯尔莫哥洛夫和蔡丁的数学算法理论提出了相反的结论：科赫曲线并不比圆复杂多少！这种理论从"字母"或"原子运算"的集合开始，并把产生期望函数的已知算法的最短长度，作为函数复杂性的客观上界。

为应用这种思想方法来构造曲线，设图解过程的字母或"原子"为直线"笔画"。在这种字母表中，追随一个规则多边形只需要有限笔画，每一笔画用有限行指令来描述，因此它是一项有限复杂性的任务。与此相反，一个圆周包含无穷多条无穷短的笔画，因此似乎是无限复杂性的曲线。但是，如果圆周的构造是递归地进行的，那么将只涉及有限数量的指令，从而也是一项有限复杂性的任务。例如，从 2^m 条边（$m>2$）的正多边形出发，把每个长度为 $2\sin(\pi/2^m)$ 的笔画用两个长度为 $2\sin(\pi/2^{m+1})$ 的笔画来代替；然后循环重新开始。要构造科赫曲线，可采用同样的方法，但操作更简单，因为笔画长度只需简单地乘以 r，而笔画的相对位置的替换总是相同的。因而下面乃一妙语：如果把复杂性用现有最佳算法（在这种特殊字母表中）的长度来度量，那么科赫曲线实际上比圆周更简单。

用相对的简单性对曲线所作的这种特殊的分类，不应看得太认真。最明显的是，如果这种特殊字母表是基于圆规和直尺——意味着把圆周视为"原子"，那么将得到相反的结论。然而，只要应

用这种明智的字母表,那么任何科赫曲线都不仅是有限复杂性的,而且比欧几里得中的大多数曲线要简单。

在结束这个讨论时,我不得不声明,就语源而言,我憎恶人们称科赫曲线是"不规则的"。这个术语是 *ruler*(直尺、统治者)的近亲,如果维持 *ruler* 是测量直线的工具的意义,那么上述说法是满意的,因为科赫曲线与直线相差很远。但若把 *ruler* 理解为皇帝(= *rex*,同样的拉丁语根),也就是颁布一系列需强制执行的详细法规的人,那么我将缄默地抗议:没有什么比科赫曲线更加"规则"了。

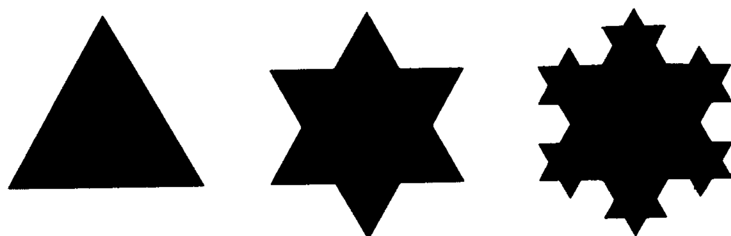


图 6-1　三元科赫岛屿或雪花片 $\mathcal{K}$,由科赫所作的原始构造
(海岸线维数 $D = \log 4 / \log 3 \approx 1.2618$)

构造从"起始器"(即一个边长为 1 的黑色等边三角形)开始。然后在每一边的中间三分之一处补加一个边长为 1/3 的三角形的半岛。第二阶段结束于一个六角星,或称为大卫的星。对星的每边重复相同的添加半岛的过程,如此继续,直到无限。

每次添加都把区间中部三分之一的点在垂直方向有所位移。三角形起始器的角顶则始终不动。大卫星的其余九个角顶经过有限个阶段后到达其最终位置。其余各点继续位移而无尽头,但移动量越来越少,并最终收敛到定义海岸线的极限。

岛屿本身是一系列多边形区域的极限,其中每一个都包含前一个多边形区域。这个极限的照相负片如图 6-7。

注意图 6-1 和本书中的许多其他插图,与其说是表示海岸线,不如说是表示岛屿或湖泊,且一般说来,表示"实体面积"比表示它们的轮廓更好。这种方法用到了我们的绘图系统的最精细分辨率。

为什么这里不能定义一条切线　把原始三角形的一个角顶取为不动点,

并对极限海岸线上的一点画一条弦。当这一点顺时针地收敛到角顶时，连续弦在30°的角度范围内振荡，并且永远不会趋于一个可称为顺时针切线的极限。同样也不能定义一条逆时针切线。由于顺时针弦与逆时针弦在完全确定的角度范围内振荡而导致在某一点无切线，便称该点为双曲点。$\mathcal{K}$渐近地达到的点没有切线是另外的原因。

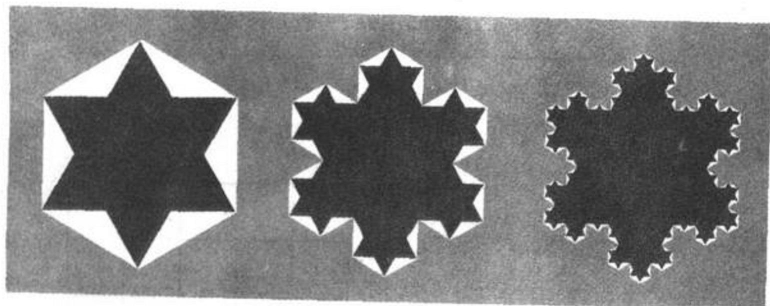


图6-2 三元科赫岛屿或雪花片$\mathcal{K}$。欧内斯特·蔡查罗的另一种构造（海岸线维数$D=\log 4/\log 3\approx 1.2618$）

科赫岛屿的另一种构造由蔡查罗Cesàro 1905给出，这个工作是如此地吸引人，以致我忘记了寻找原件时的艰难（以及后来发现它重印在蔡查罗1964年的文中而引起的烦恼）。下面是我随手摘录的几行佳句。“这种形状无限地嵌入于自身之中给了我们关于坦尼森在某处所述的内无限的那种思想，这毕竟是我们对大自然能够设想的唯一的一种。这种整体与它的部分，甚至是与无限小部分之间的相似性，致使我们认为三元科赫曲线的确是绝妙的。如果赋予它生命，那么除非把它完全毁坏否则是不可能消灭它的，因为它将从它的三角形深处一而再、再而三地显示出来，就像宇宙中的生命一样。”

蔡查罗的起始器是一个边长为$\sqrt{3}/3$的正六边形，环绕它的海洋是灰色的。越来越小的三角形海湾压缩到无限小，科赫岛屿是递减近似的极限。

这种构造方法和图6-1中所给出的科赫的构造方法在本图中同时并举。这样，科赫海岸线被压缩在内奇怪折线和外奇怪折线之间，而这两条折线相互间越来越接近。可以设想由三个相继的环开始的级联过程：实体岛屿（黑色）、沼泽地（白色）和水面（灰色）。每个级联阶段都把沼泽地的一部分或是变成实体岛屿，或是变成水面。在极限情况下，沼泽地由一个“面”耗竭为一条曲线。

对中点位移的说明 这涉及图6-3所示的发生器及其后续步骤（这里的

角度是 120°)。若把它放在内 k 级奇怪折线外面,它将产生外 $k+1$ 级奇怪折线;若把它放在外 k 级奇怪折线内部,它将产生内 k 级[1]奇怪折线。这种方法在图 7-3 和图 7-4 以及第 25 章中是有用的。

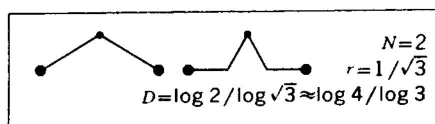


图 6-3

图 6-4

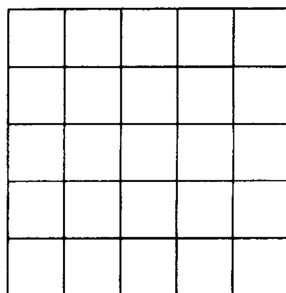


图 6-5

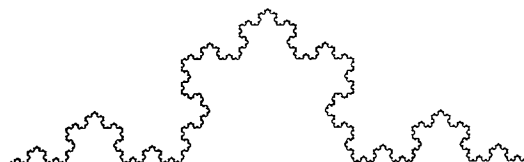


图 6-6

图 6-4 至图 6-6　两类自相似性:标准和分形

图 6-4 说明,给定一个整数(这里 $b=5$),单位长度的直线区间如何分解为长度是 $r=1/b$ 的子区间。类似地,图 6-5 表示一个单位正方形可以分为

① 此处原著似有误。——译者注

边长是 $r = 1/b$ 的 $N = b^2$ 个正方形。在这两种情况下，形状的相似维都是 $\log N/\log(1/r)$。这个概念，连中学几何学也不屑提及，因为它的数值简化为欧几里得维数。

图 6-6 是一条三元科赫曲线，科赫海岸线的三分之一。它也能分解为缩小尺寸的小块，$N = 4$ 和 $r = 1/3$。结果所得的相似维 $D = \log N / \log(1/r)$ 不是一个整数（其值是 ≈ 1.2618），在标准几何学中，没有与它相对应的东西。

豪斯多夫说明了 D 在数学中是有用的，并且 D 等同于豪斯多夫维或分维。我的断言是，D 在自然科学中也是重要的。■

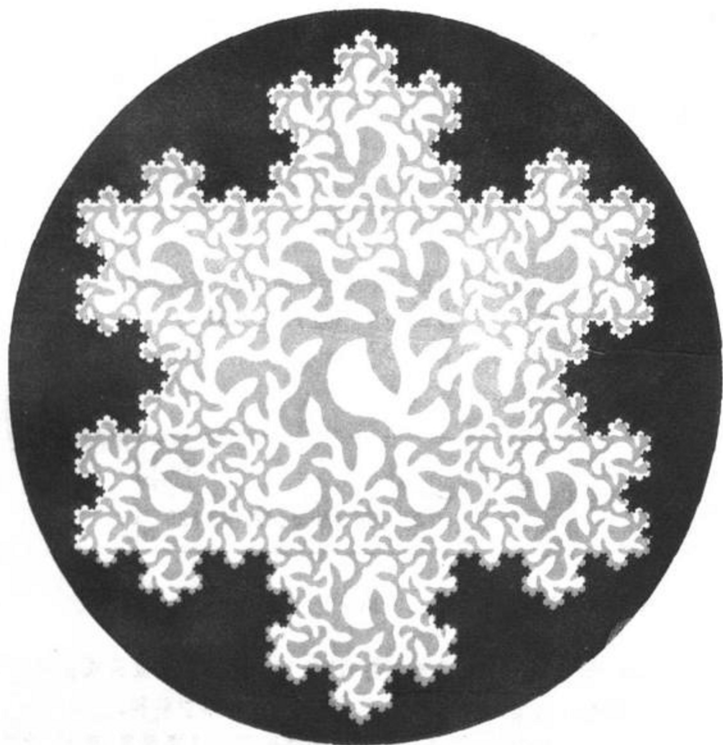


图 6-7　三元科赫湖 $\mathcal{K}$（海岸线维数 $D = \log 4 / \log 3 \approx 1.2618$）

在图 6-1 和 6-2 的说明中所述的构造法已进行了许多次，所摄得的照相负片与其说是一个岛屿，不如说是一个湖泊。

充塞于这个湖泊中的灰色"波浪"的古怪图样并不是偶然的，将在图7-16至图 7-19 中说明。

图 6-7 中的海岸线不是自相似的，因为一条闭曲线不能分解成其他闭曲线的并。◁然而，第 13 章应用了由无限个岛屿组成的集合内部的自相似性概念。▶ ▬

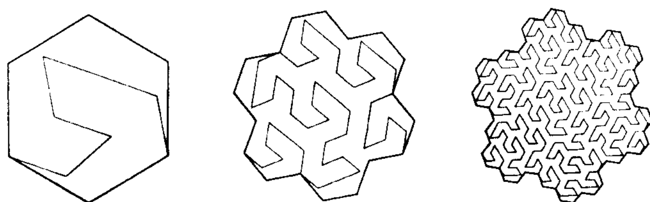


图 6-8

图 6-8 和图 6-10 其他科赫岛屿和湖泊(海岸线维数 $D=\log 9/\log 7\approx 1.1291$)

这个科赫岛屿的变种出自 W. 戈斯泼尔(Gardner 1976)，起始器是一个正六边形，而发生器如图 6-9。

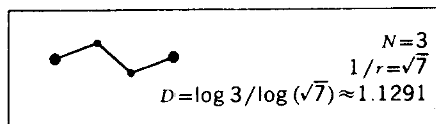


图 6-9

图 6-8　在该图中，"戈斯泼尔岛屿"的几个构造阶段被画成粗线条"外包装"。相应的细线条"填料"将在图 7-20 的说明中加以解释。

图 6-10　这是"外包装"的一个高级构造阶段。可变厚度"填料"也在图 7-20 中加以说明。

请注意，与科赫的原始工作相反，本发生器是关于它的中心点对称的。它以海湾和海角组合的方式，使岛屿面积在整个构造中保持常数。直到图 6-21 的科赫曲线都是这样的。

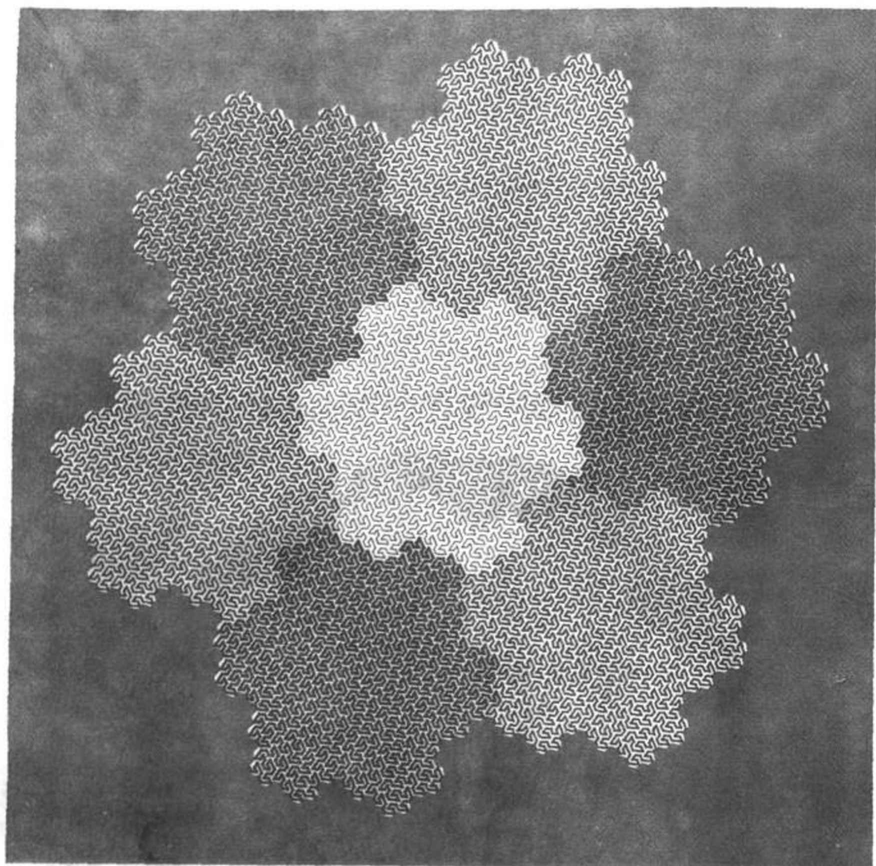


图 6-10

铺覆 平面可以用戈斯波尔岛屿覆盖，这种性质称为铺覆。

通铺覆 此外，这个岛屿是自相似的，可通过改变形线的粗细清楚地看出。这就是说，每个岛屿分成七个“省份”，可由整体按相似比 $r=1/\sqrt{7}$ 导出。我用一个新词通铺覆（*pertiling*）来称呼这个性质，其中使用了拉丁语前缀 *per*，如同于 *to perfume*（“撒香水”）=“香味处处渗透”所示一样。

大多数铺覆不能再分为相似于整体的相等铺覆。例如，把六边形放在一起不能形成一个较大的六边形，这一点使人普遍失望。而戈斯波尔片把六边形补缀得正好足以使它精确地再划分为七个。另外一些分形铺覆可以分为数目不同的若干部分。

法国 它那规则异常的地理轮廓常常被称为六边形,事实上,法国的轮廓与一个六边形的相似程度不如它与图6-9的相似程度(虽然这里的布列塔尼半岛是营养不足的)。

为什么不能在这些海岸线的任意点上定义一条切线的理由 在经过有限个构造阶段后得到的海岸线上取定任一点,并把它用一条弦与极限海岸线上的一个动点连结起来。当动点沿着极限海岸线趋近固定点时,不论是以顺时针方向还是以逆时针方向,弦的端部总是在固定点周围无尽头地缠绕,这样的点称为斜航的。▶

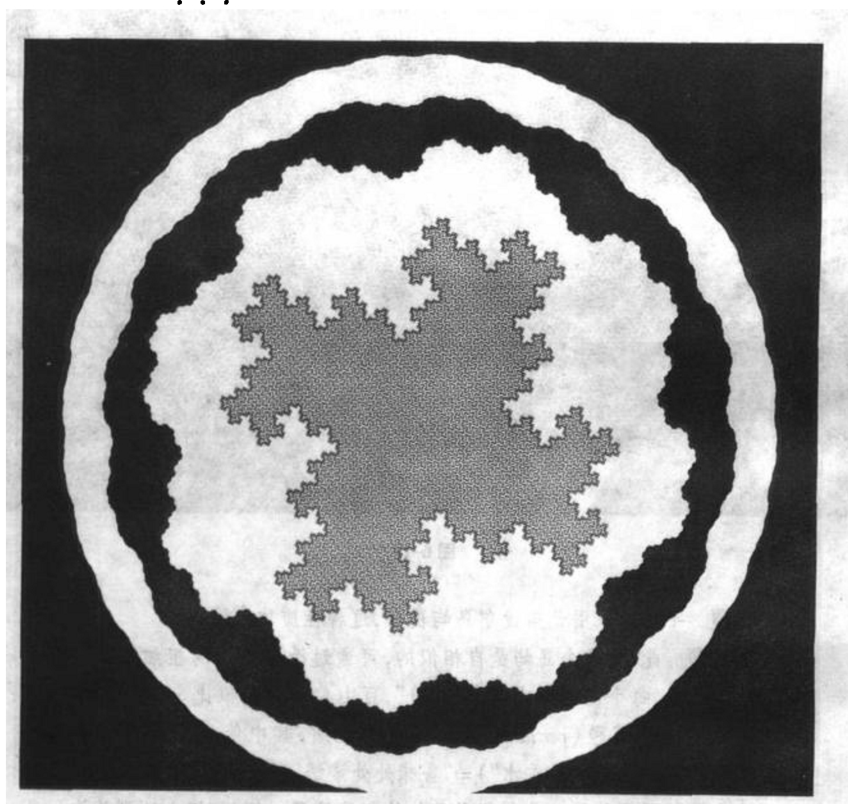


图6-11 另一种科赫岛屿和湖泊(海岸线维数由1至 $D=\log 3/\log\sqrt{5}\sim 1.3652$)及其注释

在这一系列分形曲线中，起始器是一个 M 边的正多边形，发生器的 $N=3$（即分为 3 节），且在第一、二节之间及第二、三节之间的夹角都是 $\theta=2\pi/M$。图 6–8 和图 6–9 中包含着 $M=6$（不在这里重复），而 $M=3$ 在图 7–26 中讨论。图 6–12 以湖泊和岛屿相互嵌套的形式显示了分别取值 $M=4,8,16$ 和 32 时充分发展的奇怪折线。例如，$M=4$ 对应于图 6–12 所示的发生器。中心岛屿上的粗细线条将在图 7–29 的说明中解释。

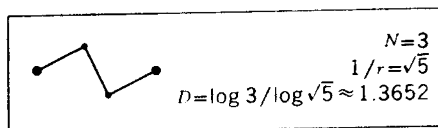


图 6–12

如果把这些图样扩展到 $M=\infty$，它将收敛为一个圆周。当 M 值变小时，图形"皱缩"，起先是逐渐的，尔后就快速跳跃。后一阶段的皱缩将导致 $M=3$，但相应的曲线不再是自回避的。我们将在后面的图 7－29 等与其重逢。

临界维数 当起始器是[0,1]时，角度 θ 可以取 180° 至 60° 之间的任意值。有一个临界角度 $\theta_{临界}$，使当且仅当 $\theta>\theta_{临界}$ 时"海岸线"是自回避的。相应的 $D_{临界}$ 是对应于自相交的临界维数。角度 $\theta_{临界}$ 接近 60°。

推广 图 6–8 至图 6–23 的构造容易作如下推广。把所示的发生器称为直发生器（S），并定义反弹发生器（F）为直发生器在直线 $y=0$ 上的镜象。构造的每个阶段都必须从头至尾用同一个发生器，或是 S 或是 F，但不同的阶段可以选择不同的发生器。这些插图，以及更多后续的插图，都从头至尾应用 S，但 S 和 F 的其他无限序列将产生相近的变种。

◁如果把 F 和 S 交换，上述斜航点将成为双曲点，正如在科赫曲线中那样。▶

图 6–11 至图 6–21 显示从一个正方形起始的几种科赫构造（从而有术语正方的）。优点之一在于，即使所用的绘图系统是粗糙的，也可用这些构造来进行试验，◁另一个优点是，正方形的分形曲线直接导致图 7–2 上所描述的原始皮亚诺曲线。▶

图 6-13　正方形科赫岛屿(海岸线维数 $D=3/2=1.5000$)

图 6-13。这里的起始器是一个正方形,而发生器如图 6-14 所示。正如图 6-8 至 6-12 那样,总的岛屿面积在全部相继阶段中保持不变。图 6-13 表示了小尺度下的头两个阶段,下一阶段则取较大的尺度。

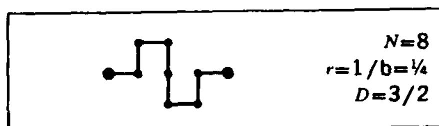


图 6-14

在最后一个阶段，放大倍率更大，细部显示了十分纤细而勉强可见的须髭，若图片的质量不那么高，就会丧失很多细节，以致强迫我们忽略这些细节。奇怪折线和极限曲线都不包含任何自重叠、自相交和自接触。在图6–21中也是如此。

◁不应忘记，图6–13至图6–21中的分形是海岸线；陆地和海洋是普通形状，它们具有正的和有限的面积。图14–9的说明中提到了一种情形，其中只有"海洋"有完全确定的面积，它又是简单形状孔洞的并集，而陆地没有内点。▶

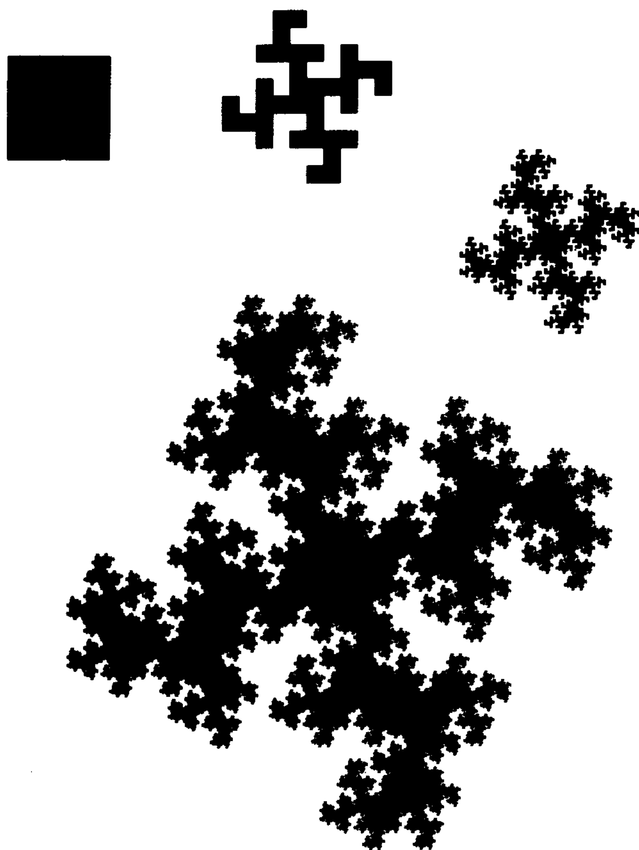


图6–15　一个正方形科赫岛屿（海岸线维数 $D=\log 18/\log 6\approx 1.6131$）

铺覆和通铺覆 现在的岛屿被分割为 16 个岛屿，它们以 $r=1/4$ 的比例缩小。每个都是建造在 16 个正方形（它们由第一阶段的构造形成）之一上的科赫岛屿。◁第 25 章和第 29 章表明，对不同的布朗函数也可遇到 $D=3/2$。因而这个值容易通过随机曲线和曲面得到。▶

起始器也是一个正方形，发生器如图 6-16 所示。

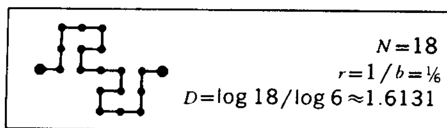


图 6-16

在现在这些有代表性的图例中，正方形科赫岛屿的形状明显地依赖于 D，这个事实是十分重要的。然而，因为起始器都是一个正方形，岛屿就具有大致相同的总体轮廓。当起始器是一个正 M 边形（$M>4$）时，总的形状看起来光滑些，并随着 M 增加而更加光滑。总体形状与 D 值之间的真正联系，到第 28 章才给出，那里处理随机的海岸线，它同时有效地确定了发生器和起始器。

◁**极大性** 对总体轮廓的相似性作出贡献的另一个事实是，在图 6-12 至图 6-21 中的正方形科赫曲线具有一种有趣的极大性质。设想把所有产生自回避曲线的科赫发生器描绘在由平行和垂直于[0,1]的直线构成的正方形点阵上，另外在正方形点阵上可以应用任何起始器。我们把达到最大可能的 N 值及相应的 D 值的发生器称为极大的。可以发现，当 b 是偶数时 $N_{max}=b^2/2$，当 b 是奇数时，$N_{max}=(b^2+1)/2$。

◁随着 b 值的增加，最大的 N 也增加，可供替代的最大多边形的数目也增加。因此，极限科赫曲线受到原始发生器的影响将越来越大。它看起来也将越来越人工化，因为无接触点而达到极大维数的要求使得约束度随 D 的增加而增大。在下一章，对皮亚诺极限 $D=2$，它将达到高潮。

◁**补白** D 相同但 N 与 r 不同的分形曲线可能相互之间有定性上的区别。由此导致的 D 以外的参数在第 34 章中讨论。▶

图 6–17 和图 6–18　正方形科赫岛屿(海岸线维数 $D=5/3\approx1.6667$ 和 $D=\log 98 / \log 14\approx1.7373$)

现在作如图 6–11 相同的构造,但使用不同的发生器。在图 6–18 中用的是图 6–19 所示的发生器,在图 6–17 中用的是图 6–20 所示的发生器。当趋向半岛的顶端或海湾的最深点时,在这些恶梦似的港口中的堤坝和明渠越来越窄。此外,宽度随分维的增加而变小。在约 $D\approx5/3$ 时出现"蜂腰"。

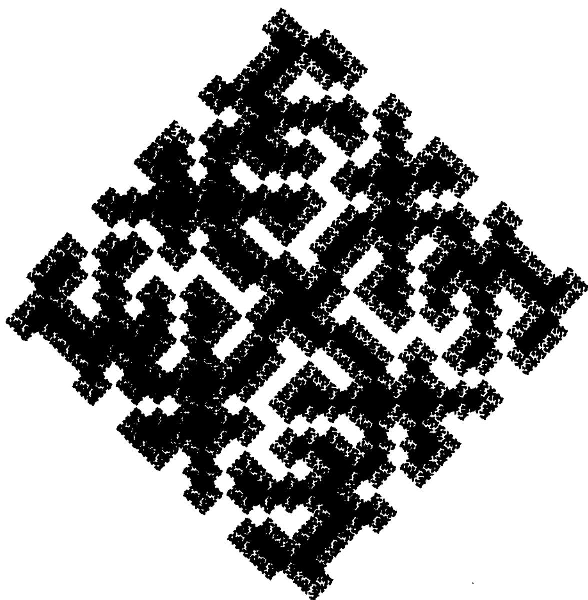


图 6–17

◁涉及湍流弥散的插话　图 6–18 中所画的一系列近似分形与墨水在水中的湍流弥散的各个阶段之间有一种怪诞的相似。当然,实际的弥散不那么有规则,这是借助于机遇作模拟的一种特性。

图 6-18

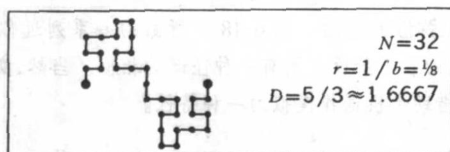


图 6-19

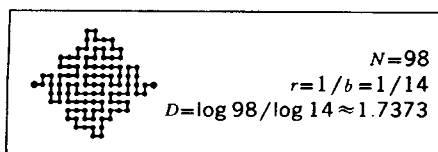


图 6-20

◁几乎可以看到理查森的级联在起作用。能量的有限挤压使正方形墨水滴向四周扩散。然而,原来的涡漩分裂为较小尺度的涡漩,其效应是较为局部的。初始能量逐级减少到越来越小的典型尺寸,最终对墨水滴的轮廓并无贡献,只是使它模糊些,见图 6-21(取自 Corrsin 1959 b)。

图 6-21

◁理查森级联将产生以分形为边界的形状,这样的结论是不可避免的,但 $D=5/3$ 的结论令人震惊。这个 D 值对应于 $D=8/3$ 的空间曲面的平面截面,这种曲面常常在湍流中出现。在标量的等值曲面情形中(在第 30 章中研究),$D=8/3$ 可约化为柯尔莫哥洛夫理论。但无论如何,数字学的类似是不能置信的。

◁事实上,D 值很可能取决于流体的初始能量,以及容纳这种弥散的容器尺寸。低的初始能量将使圆盘形的液滴萎缩为 D 接近于 1 的一条曲线(图 6-12)。在小容器中的高初始能量将导致较为彻底的扩散,其平面截面与图 6-16($D\sim 1.7373$)很相仿,或者甚至与维数 $D=2$(第 8 章)更相仿(见 Mandebrot 1976c)。

◁如果这个最后的推断是正确的,下一步将是研究初始能量与 D 之间的关系,并寻找在平面上产生 $D=2$,即在空间产生 $D=3$ 的最低能量。在考察极限情况 $D=2$(第 7 章)时,我们将看到,它与 $D<2$ 有定性的差别,因为它容许从相隔很远处出发的墨水滴进入渐近的接触。◁于是,如果说湍流弥散融两种截然不同的现象于一体,我将完全不会感到惊讶。

◁**附言**　图 6-18 在 1977 年的《分形》中首次出现以后很久,保罗·迪摩坦

基斯对扩散在层流介质中的湍流射流的薄截面拍了照片。它与本图的相似性真使人高兴不已。▶ ■

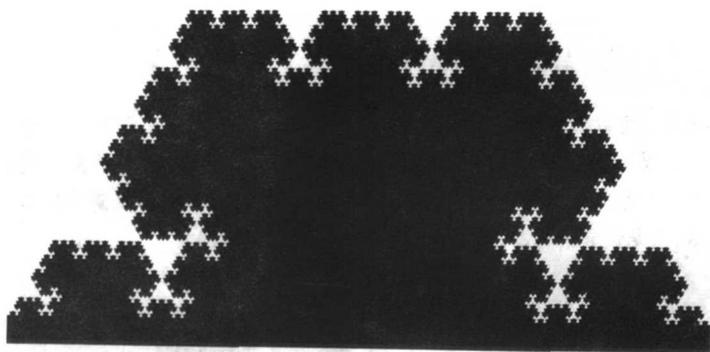


图 6-22

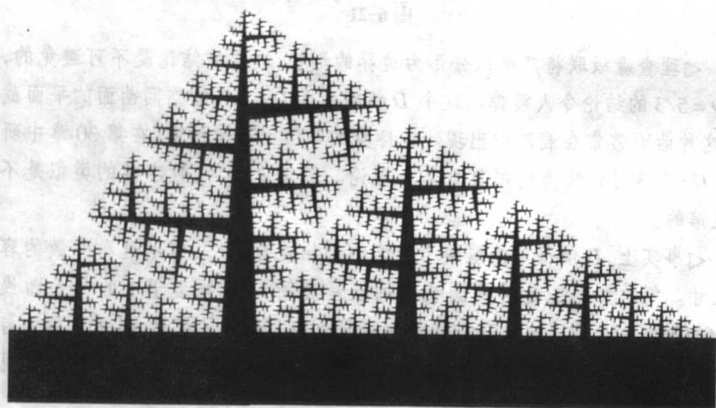


图 6-23

图 6-22 和图 6-23　广义科赫曲线和具有不相等部分的自相似性 ($D\approx1.4490, D\approx1.8797, D\approx1+\varepsilon$)及其注释

这些插图是以科赫的风格构造的，只是发生器的边长取不同的数值 r_m。至此，我们假定把"整体"分成都有同样的相似比 r 的 N"部分"。应用不等的 r_m，科赫曲线就变得不那么规则了。于是，图 6-22 把变种带到了三元科赫曲线的大家庭中。

注意在所有这一系列的插图中，构造都是一直继续到一个预定的小尺寸细部。若 $r_m \equiv r$，这个目标可在预定的若干构造阶段后达到，但现在却需要可变的阶段数目了。

下一个任务是把相似维的概念扩展到这种广义的科赫递归。为了寻求提示，设通常的欧几里得形状被以不同比值 r_m 缩小的各部分所铺覆。若 $D=1$，则 r_m 必须满足 $\sum r_m=1$，更一般地，欧几里得形状要求 $\sum r_m^D=1$。此外，对可以分裂为若干相等部分的分形，熟知的条件 $Nr^D=1$ 可以改写为 $\sum r_m^D=1$。这些先例提示了构成维数发生函数，即 $G(D)=\sum r_m^D$，并把 D 定义为 $G(D)=1$ 的唯一实根。剩下的是要研究所说的 D 是否与豪斯多夫－伯西柯维奇维数相吻合。就我所知，每种情形都是吻合的。

例　图 6-22 中有一个 D 大于科赫的原始值 $\log 4/\log 3$，图 6-23(上)有一个 D 稍低于 2，当 $D\to2$ 时，图中的海岸线趋于皮亚诺－波利亚曲线，它是下章将要研究的皮亚诺曲线的一种变形。本图与一排树的类同并非偶然的，见第 17 章。最后，图 6-23(下)有一个 D 稍大于 1。 ■

第 7 章　驯服皮亚诺怪物曲线

在第 6 章末尾讨论不自相交的广义科赫曲线时，在 $D=2$ 处突然停止了，这有充足的原因。当达到 $D=2$ 时，将发生深刻的定性变化。

我们将假设奇怪折线并不自相交，虽然也许会自接触。于是达到 $D=2$ 的征兆之一便是自接触点渐渐地成为不可避免的。主要征兆则是，极限（曲线）将不可避免地充满平面中的一个“区域”，也就是，包含圆盘（充满圆周内部）的一个集合。

这种双重的结论并不是因为某些数学家们想象力缺乏得尚无救药，而是涉及在 1875～1925 年数学危机中处于中心地位的一个基本原则。

皮亚诺“曲线”，运动、扫掠

在即将看到的插图中示例的相应极限称为皮亚诺曲线，因为首先是由皮亚诺在 1890 年发现的。它们也被称为充满平面的曲线。它们证实了由 $\log N / \log(1/r)=2$ 给出的维数的正式定义，但其理由是令人失望的。从数学的观点看，一条皮亚诺曲线只是以非通常的方式考察平面的一个区域或一部分（即，按照所有经典定义其维数均为 2 的一个集合）。换句话说，谨慎的作者应当避免充满平面的曲线这个词。

幸运的是，大多数皮亚诺“曲线”（包括那些由递归科赫构造得到的）都可以自然地用一个标量 t 参数化，t 可以被称为“时间”。在那些情况下，我们可以（无需害怕严格性这个保护神）应用术语皮亚诺运动、充满平面的运动、铺覆扫掠运动或铺覆扫掠（对铺覆将在本章后面讨论）。我们将在看来合适时这样称呼，但本书并不

追求所有说明的完全一致性。

作为怪物的皮亚诺曲线

“一切都乱套了！难以名状(*Giuseppe*)皮亚诺的结果对数学世界的影响有多大。似乎一切都成了废墟，所有基本数学概念都失去了它们的意义。”(Vilenkin 1965)“[皮亚诺运动]大概不能为直观所掌握：它只能为逻辑分析所理解”(Hahn 1956)。“有些数学对象，例如皮亚诺曲线，是全然非直观的……，放纵的”(Dieudonné 1975)。

皮亚诺曲线的真实特性

我声明，上述摘录只是说明了没有哪一位数学家仔细审视过一张真正的皮亚诺图。无情的观察者可以说，这些摘录表明了缺乏几何想象力。

我要强调的却是相反的东西：用心观察了皮亚诺曲线之后，如果让想象力自由驰骋，那么很难不把它们与大自然的很多方面联系起来。本章处理自回避曲线，即避免了自接触的奇怪折线。第13章处理中等自接触的奇怪折线。填充一个点阵(例如平行于坐标轴并具有整数坐标)的奇怪折线需首先进行消除自接触的处理。

河流和堤岸树

考察各种皮亚诺奇怪折线，我看到在每种情形里都有两棵树一组(或多棵树的好多组)，对它可作出无限多种具体的解释。在我设计的“雪花扫掠”皮亚诺曲线即图7-18中可看得特别清楚。例如，容易把这个图看成一堆灌木丛，它们的根并排地长在三分之一的科赫雪花片上，并且正向墙上攀登。换一种看法，也可以认为这是用粗线强调的一族河流(它们是蜿蜒曲折的)之轮廓，这些河

流最终将流入一条以雪花片为底的河流之中。后一种解释使我们联想到把河流相互分隔的曲线形成了堤岸树。当然，标记“河流”和“堤岸”可以相互换用。

否决了皮亚诺曲线必定是病态的任何想法之后，这种新的河流—堤岸比拟看起来就十分明显了。事实上，如果把一株堤岸树解释为消失了的河流（其宽度为完全排干的一个区域），则它必须到处漫延。沿着连结的河岸走动的人将完成踏遍平面的运动。随便问哪一个儿童就可证实这一点！

借助由图 7-16 得到的直观印象，不难看出在每条皮亚诺奇怪折线中相类似的共轭网。甚至图 7-1 中的杂乱岛屿也开始具有直观意义。穿透它的水流细脉虽然不能看成港湾（不管怎样夸大），但却可以看成分支的河流。

当对河流的研究导致一门合适的科学时，应当被称为河川学——M. 帕德从希腊词 *ποταμοσ*（=河流）和 *λογοσ* 创造了这个词。但合理的习惯是把对河流的研究与关于水的科学和水文学合并在一起，对此本书将要深入研究。

树中的多重点是不可避免的，从而在皮亚诺运动中也是如此

皮亚诺曲线的许多数学性质现在也突然成为显然的了。为了考虑双重点，设有一个人从皮亚诺河道树的河岸上出发，向上游或下游运动，绕行最小的分支（分支越小，运动越快）。显然，最终它将到达出发点的对岸。又因为极限河流是无限窄的，他实际上将回到出发点上。于是，皮亚诺曲线中的双重点便是不可避免的，不仅从逻辑的角度是如此，从直观的角度也是如此。此外，它还是处处稠密的。

也不可避免有某些点被访问多于两次。因为河流汇入处至少有河岸上的三点相重合。当所有汇流处都只包含两条河流时，没有重数超过 3 的点。另一方面，如果允许有重数较高的点，那么也

可以没有三重点。

上段中所有这些结论都已得到证明，而因为证明是富于技巧性并且是反证的，使这些性质本身似乎是“技术性的”。但实际情况正好相反。谁会争辩说导致它们的纯粹逻辑方法要比我的直观方法更好呢？

典型的皮亚诺曲线状的河流不是标准形状而是分形曲线。这对于建立模型的需要是很幸运的，因为第5章中用以说明地理曲线是不可求长的每个论据都同样适用于河岸。事实上，理查森数据也包括了河流和堤岸的边界。摘自施坦豪斯(Steinhaus 1954)的文字中也涉及了河流。关于河流的排水盆地，它们被类似于岛屿海岸线的封闭曲线所环绕，这种封闭曲线由堤岸的一部分构成。每个盆地都与分盆地相毗连，并与河流本身相互交叉，但为分形曲线所围的、充满平面的曲线显示了我们需要的所有结构。

皮亚诺运动和通铺覆

取原始皮亚诺曲线(图7-1)，并把时间 t 写成九进制形式 $0,\tau_1,\tau_2,\cdots$。凡第一位“数字”相同的时间将映射到同一个小方块(它是初始正方形的1/9)中，而那些第二位数字相同的时间将映射到同一个更小的方块(初始正方形的 $1/9^2$)，如此等等。这样，把[0,1]分为9个1/9的铺覆映射为正方形的铺覆。相继的1/9线性铺覆映射为相继的平面子铺覆。区间成为通铺覆，也就是可递归地以及无限地分割为较小部分的铺覆(类似于对[0,1]那样)被映射为正方形。另一种由E. 蔡查罗、G. 波利亚等人提出的皮亚诺运动把这个性质映射到三角形的各种通铺覆上。

较一般地，大多数皮亚诺运动生成平面的通铺覆。在最简单的情形，存在一个基数 N，并从由相继分成 N 份的线性通铺覆开始。但图7-16和图7-18的雪花扫掠需要把 t 的区间[0,1]作不规则划分，先是四个长度为1/9的子区间，接着是四个长度为 $1/(9\sqrt{3})$、一个长度为1/9、两个长度为 $1/(9\sqrt{3})$ 以及另外两个长

度为 1/9 的子区间。

用面积测量的距离

长度与面积相互交换的微妙关系，在皮亚诺运动中经常出现，特别是如果它是等距的，即时间区间$[t_1, t_2]$映射为数值等于长度$|t_1 - t_2|$的面积。（大多数皮亚诺运动都既是等距的，又是通铺覆的，但这是两个不同的概念。）称时间区间$[t_1, t_2]$的映射是一个平面上的皮亚诺区间，意味着可以通过用面积度量距离来代替用时间度量距离。但我们将遇到一种严重的复杂性，因为一条河流不同河岸相互交叉位置上的点在空间是重合的，并受到重复的访问。

"皮亚诺距离"的定义可以只涉及访问的序。对 P_1 和 P_2 作第一次和最后一次访问的时刻分别记为 t_1' 和 t_2' 以及 t_1'' 和 t_2''，将左皮亚诺区间 $\mathcal{L}\{P_1, P_2\}$ 定义为$[t_1', t_2']$的映射，右皮亚诺区间 $\mathcal{R}\{P_1, P_2\}$定义为$[t_1'', t_2'']$的映射。这些区间的长度定义为左距离$|\mathcal{L}\{P_1, P_2\}| = |t_1' - t_2'|$和右距离$|\mathcal{R}\{P_1, P_2\}| = |t_1'' - t_2''|$。这些距离都是可加的，也就是说，例如把三个点 P_1, P_2 和 P_3 按第一次访问编序它们是左序的，则有

$$|\mathcal{L}(P_1, P_3)| = |\mathcal{L}(P_1, P_2)| + |\mathcal{L}(P_2, P_3)|。$$

区间和距离的其他定义区分河流和堤岸之间的点。用 t' 和 t'' 记对 P 的第一次和最后一次访问的时刻，若$[t', t'']$的映射被 P 和堤岸所界定，那么 P 是河流上的点。相继访问隔河相对的 P，若$[t', t'']$的映射被 P 和河流所界定，那么 P 是堤岸上的点。

此外，若皮亚诺曲线被表示为河流树和堤岸树的公共河岸，那么穿越河流（分别沿着堤岸）的点 P_1 和 P_2 相连的路径中包含着一条公共的最小路径。沿着这条路径测量 P_1 与 P_2 之间的距离便是合理的。除开特殊情况，河流和堤岸的维数 D 严格地小于 2，且严格地大于 1。因此，最小路径既不能用长度也不能用面积来度量，但在典型情况下，它的维数 D 具有非平庸的豪斯多夫测度。

补充 对皮亚诺运动十分重要的补充考察，在下面的插图说

明中详细介绍。■

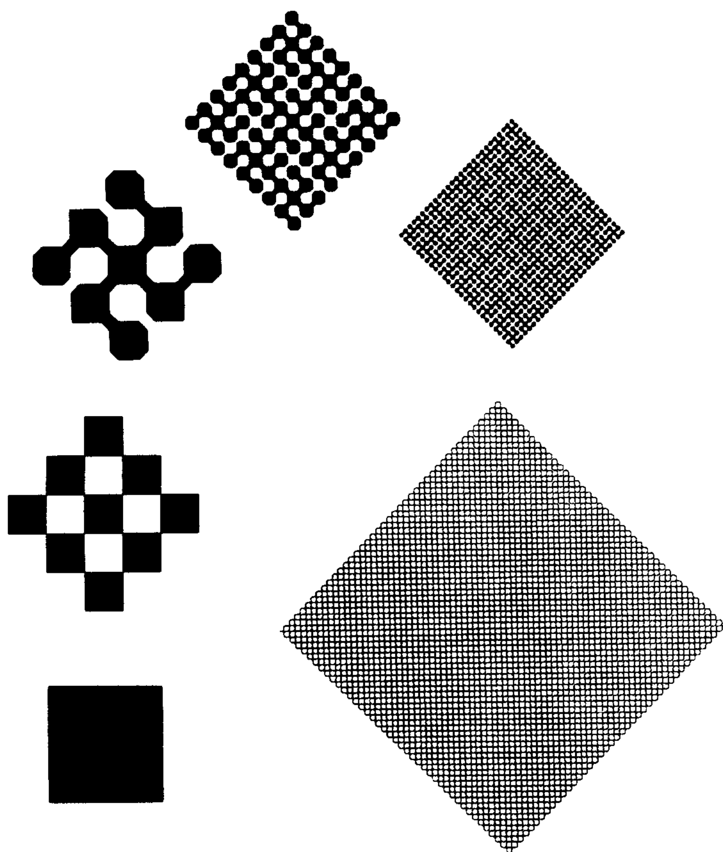


图 7–1　维数 $D=2$ 的四元科赫构造:原始皮亚诺曲线,正方形扫掠

本图是最原始的充满平面的皮亚诺曲线。朱塞佩·皮亚诺的难以置信的简洁算法(Moore 1900)用图形来完成(它在我的 1977 年版《分形》书中受到了充分的重视)。本图把皮亚诺曲线旋转 45°,从而使它严格地成为科赫曲线的折叠:发生器总以同样方式放在上阶段得到的奇怪折线的一边。

这里的起始器是单位正方形(封闭的黑色盒子),发生器如图 7–2。因为这个发生器是自接触的,所成的有限科赫岛屿是一大块像棋盘(它是无限大的)上所有黑方块的集合。第 n 次科赫奇怪折线是间距为 $\eta=3^{-n}$ 的线条格

子;它们形成面积等于2的一个正方形,这个正方形当 $n\to\infty$ 时被越来越密地覆盖。对这种单调的设计,只要举一个例子来说明就可以了(见图中原始黑色盒子之旁)。

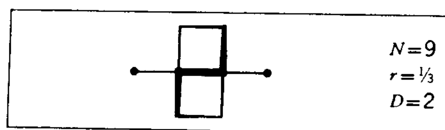


图 7-2

图 7-1 顶上的三张图中切去了角顶以避免模糊不清,但总面积不变。

以相同的尺度,这个序列的第四阶段将有50%是灰色的,但把海岸线的四分之一画得较大可以清楚些(冒一点眩晕的危险)。这以图形方式表明了所谓极限科赫曲线充满整个平面是什么意思。

最好能类似于第6章中的科赫岛屿那样定义极限岛屿,但在这里是不可能的。随机选取的点几乎肯定会无尽头地在内陆和海洋之间跳动。高阶的奇怪折线被海湾和河流十分均匀和深入地渗透,而使中等边长 x——满足 $\eta\leqslant x\leqslant 1$——的正方形把干的陆地和水面分成几乎相等的两部分。

说明 极限皮亚诺曲线确立了直线与平面之间的连续对应性。自接触在数学上不可避免这个事实是经典的。然而它们在模拟大自然中很有用,则是本书的新结果。

长期的序 如果不知道建立有限皮亚诺曲线的下降级联,极端长期的序(它使这些曲线不仅能避免自相交,而且也能避免自接触)就无法进行。戒律的任何失误都将很容易使后者出现。

◁规则的全然丧失几乎肯定会导致无尽头的重复自相交,因为完全无规则的皮亚诺曲线是布朗运动,它已在第2章中提到过、并将在第25章探索。

◁刘维定理和各态历经性 在力学中,把复杂系统的状态用"相空间"中的一个点来表示。在运动方程支配下,相空间中的每一个区域都将如下地变化:它的测度(超体积)保持不变(刘维定理),但它的形状要改变,并越来越均匀地弥散在它可及的全部空间中。显然,这两种特性都是我们对本图皮亚诺构造中的黑色区域所施加影响的反响。因此考虑得深入些,以下事实是很有意义的:注意到在许多简化的"动力学"系统(允许对它们作仔细研究),每个区域通过变换为越来越长和越来越细的带状而弥散开。因此看看其他系统的弥散过程是否通过皮亚诺型的树而不是带状物将是很有意义的。▶ ▬

图 7-3 和图 7-4　维数 $D=2$ 的四元科赫构造：蔡查罗和波利亚三角形扫掠及其变种

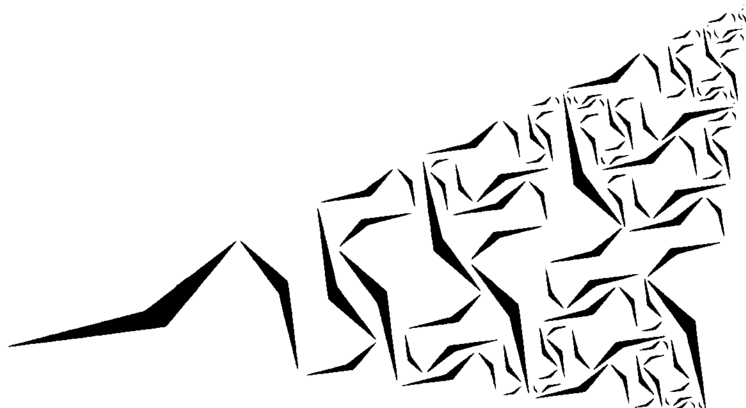


图 7-3

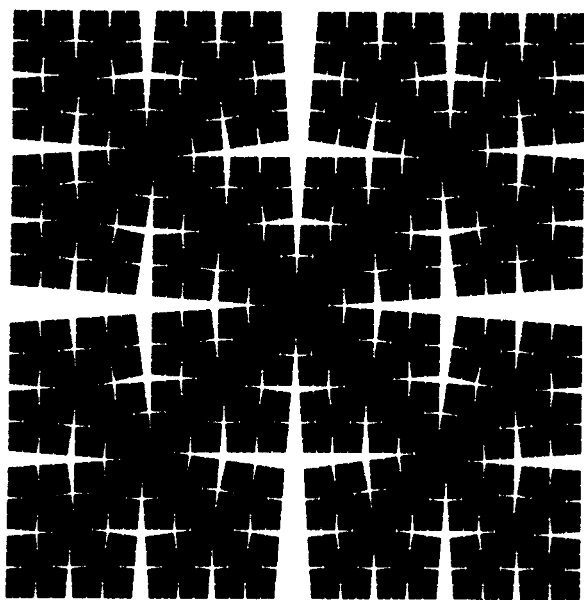


图 7-4

可以想象得到的最简单发生器是 $N=2$，即由两条相等的直线段构成，其间的角度 θ 满足 $90°\leqslant\theta\leqslant180°$。其极限情况 $\theta=180°$ 就变成一个直线区间；$\theta=120°$ 的情况（示于图 6-3）产生三元科赫曲线（其中之一）。而极限情况 $\theta=90°$ 如图 7-3。根据起始器的形状不同，这个发生器将产生多种极其不同的皮亚诺曲线，而发生器的位移规则取决于前面的奇怪折线。图 7-6 至图 7-14讨论了几个重要的例子。

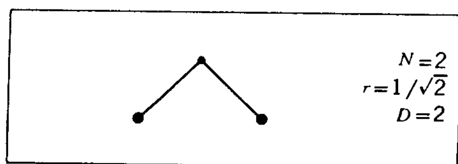


图 7-5

◁此外，第 25 章通过对具有这些 N 和 r 的所有皮亚诺曲线类作随机化，得到了布朗运动。▶

波利亚三角形扫掠　起始器是[0,1]，发生器仍如图 7-3，且它在奇怪折线的左右之间倒换。第一个位置也是倒换的。头几个构造阶段如图 7-6 所示。奇怪折线是包含在一个等腰直角三角形（它的边是[0,1]）内的方格纸碎片。而极限曲线扫掠这个三角形。

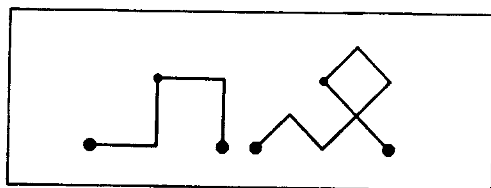


图 7-6

图 7-3　非等腰直角三角形上的波利亚扫掠　发生器改变为由两个不等长正交直线段构成。我们把选择一个避免自接触的过程的猜测留给读者作为练习。

蔡查罗三角形扫掠　起始器是[1,0]，发生器又如上述，接着两个构造阶段如图 7－7（为了清楚起见，图中以 $\theta=85°$ 代替 $\theta=90°$）。

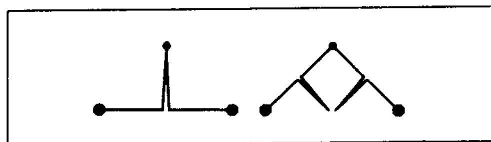


图 7-7

这样,在所有奇数次构造阶段中,发生器位于右面,产生的奇怪折线如像平行于起始器对角线的网格。而所有偶数构造阶段,发生器位于左面,产生的奇怪折线是平行于起始器底边的网格。这条曲线渐近地充满一个斜边为[0,1]的等腰直角三角形。

图 7-4 此图表示了一个正方形扫掠,这里通过把起始于[0,1]和[1,0]的两个蔡查罗扫掠叠加而得到的(为清楚起见,又用 $\theta=85°$ 代替 $90°$)。

自重叠 被蔡查罗奇怪折线覆盖的网格中的每条直线段都被覆盖两次。这个构造不仅是自接触的,它还是自重叠的。

充满平面的"有效性" 皮亚诺-蔡查罗距离的一种极端性质 图 7-1 的皮亚诺曲线把[0,1]映射到对角线为[0,1]、面积为 1/2 的正方形。同样的形状也为波利亚曲线所覆盖。但蔡查罗曲线充满一个斜边为[0,1]和面积为 1/4 的等腰直角三角形。为了覆盖整个正方形,蔡查罗必须把[1,0]和[0,1]的映射相加。这样,这两种曲线中,蔡查罗曲线的"有效性"较差。事实上,它是正方形点阵上最少有效性的非自接触皮亚诺曲线。但下列事实赋予它以可资弥补的优点:在 P_1 和 P_2 这两点之间的左或右皮亚诺距离见本章的"用面积量的距离"至少等于其欧几里得距离的平方:

$$|\mathcal{L}(P_1,P_2)|\geqslant|P_1P_2|^2,\quad |\mathcal{R}(P_1,P_2)|\geqslant|P_1P_2|^2。$$

对于其他皮亚诺曲线,皮亚诺距离与欧几里得距离之差的符号可正可负。

角谷-戈莫莱问题 在正方形$[0,1]^2$中选择 M 个点 P_m 之后,角谷(在私人通信中)研究了表达式 $\inf\sum|P_mP_{m+1}|^2$,其中下确界取遍将 P_m 逐一联接的链。他证明了 $\inf\leqslant 8$,但猜测这个界限不是最好的。确实,戈莫莱(在私人通信中)得到了改进的界限 $\inf\leqslant 4$。这个证明应用了皮亚诺-蔡查罗曲线如下。(A) 添加还未在 P_m 中的正方形角顶。(B) 在正方形内部沿着它的边画四条皮亚诺-蔡查罗曲线组成曲线串,把 M 个 P_m 点按它们被这些曲线串首次访问的次序编号。(C) 注意到增加步骤(A)中的链长时 $\sum|P_mP_{m+1}|^2$ 没有减少。(D) 注意到每个加数 $|P_mP_{m+1}|^2$ 当用 $|\mathcal{L}(Z_m,Z_{m+1})|$ 代替时不会减少。

(E) 注意到$\sum|\angle(Z_m, Z_{m+1})|=4$。如果应用不同的皮亚诺曲线，步骤(B)和(D)可能是不正确的。■

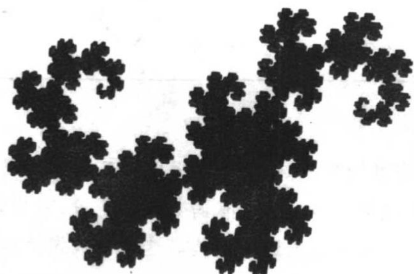


图 7-8

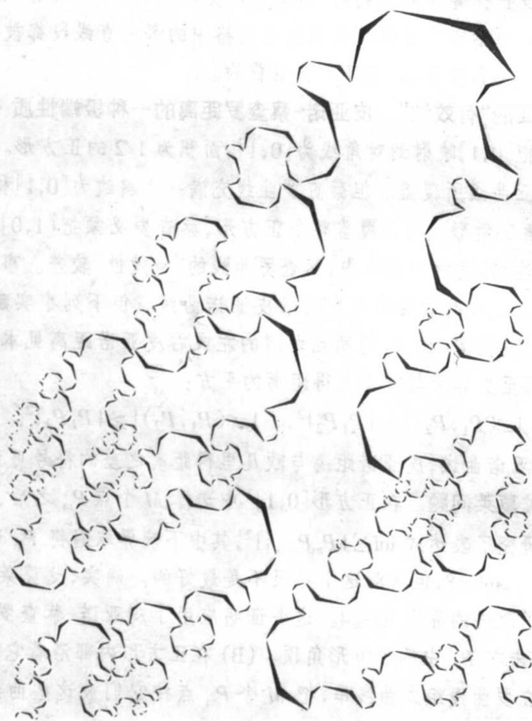


图 7-9

图 7-8 和图 7-9　一个正方形扫掠和龙形扫掠

这里的发生器与图 7-3 和图 7-4 中的相同，但在其他规则上似乎只作稍稍改变就具有持久的效果。

后来的皮亚诺正方形扫掠　起始器是[0,1]，但第二、四、六个构造阶段改变为如图 7-10。

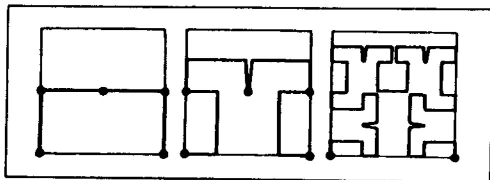


图 7-10

有效性，一种极端性质　这条曲线充满一个面积等于 1 的区域，而图 7-3 和图 7-4 的曲线和后面的龙形曲线覆盖面积为 1/2 或 1/4。当奇怪折线位于一个正交点阵时，所覆盖的面积不可能超过 1。这个极大值当奇怪折线是自回避时达到。换句话说，不出现自接触不仅是一个美学问题，而且对于一条自接触曲线，即使把其自接触处弄圆(如图 7-1)，仍不等价于自回避的科赫曲线。

对这个正方形扫掠取第奇数次阶段，那么若连接奇怪折线相继直线段的中点以避免自接触，就会回到希尔伯特(Hilbert, D.)的一种皮亚诺曲线。

图 7-9　扫掠一个直角梯形的曲线　发生器改变为由正交的两段不等长直线段构成。避免自接触的手段与图 7-8 相同。

哈特-哈脱韦龙　(见 Gardner 1967, Davis & Knuth 1970)这里起始器是[1,0]，发生器如前，且它在右奇怪折线与左奇怪折线之间来回倒换。与波利亚三角形扫掠相比较，其差别仅在于每个构造阶段的第一个位置总是在右面，前几个阶段如图 7-11。这种变化的后果是戏剧性的，一个充分发展的阶段

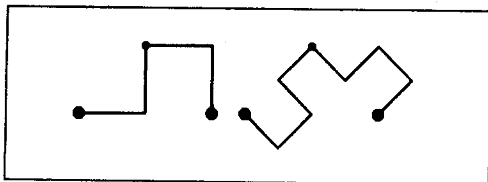


图 7-11

如图 7-8 所示。在该图中，曲线本身变得分不清了，我们只看见它的边界，称为龙形曲线。这样，这条皮亚诺曲线可以叫做龙形扫掠。如像任何起始于[0,1]的科赫曲线一样，龙是自相似的。但除此之外，可以看出它是分成若干块的，各块以蜂腰形相互连接。它们互相间相似，但不与龙本身相似。

孪生龙 1977 年版的《分形》指出，用龙形构造规则，较自然的起始器是为[1,0]所后续的[0,1]，并称这样扫掠得到的形状为孪生龙。这种形状有着多种表示方式(Knuth 1980)。它的样子如图 7-12。(其中一条是黑色的，另一条是灰色的。)

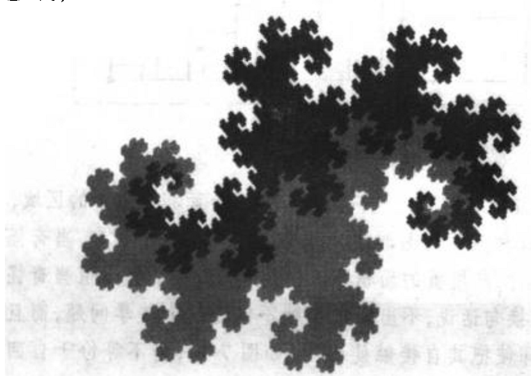


图 7-12

孪生龙形河流 把源附近的流除去以后(为了清楚起见)，孪生龙形河流树的形状如图 7-13。一条孪生龙可以用它自身的小尺寸复制品所铺覆，如图 7-14。

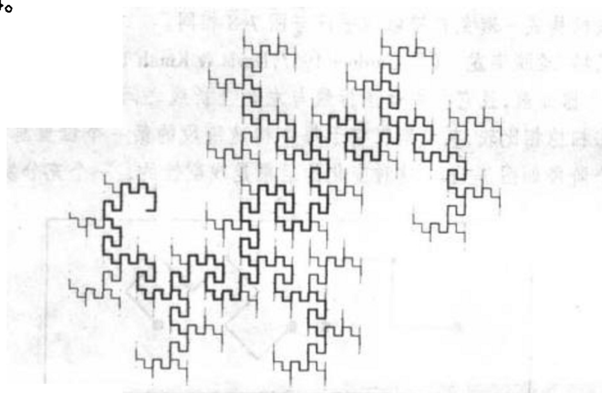


图 7-13

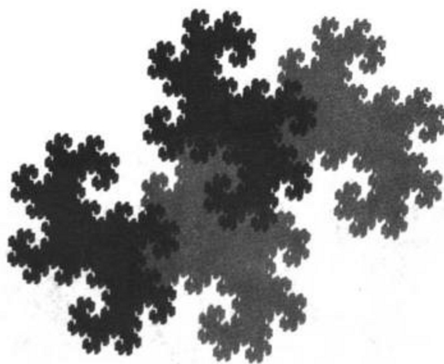


图 7-14

孪生龙皮肤 这是具有图 7-15 形式发生器的科赫曲线。这里的较长和较短直线段分别长为 $r_1 = 1/\sqrt{2}$ 和 $r_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(1/\sqrt{2}) = r_1^3$。因此，维数发生函数为 $(1/\sqrt{2})^D + 2\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^D = 1$，表明量值 $2^{D/2}$ 满足方程 $x^3 - x^2 - 2 = 0$。

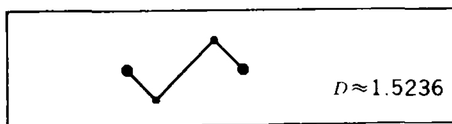


图 7-15

变种龙 （见 Davis & Knuth 1970 o)取任意无限序列 $x_1, x_2, \cdots$，其中的每个 x_k 可以取值 0 或 1，并用 x_k 值来确定发生器在第 k 个构造阶段中的第一个位置：若 $x_k = 1$，则发生器先位于右面，但若 $x_k = 0$，则它先位于左面。每个序列产生出一条不同的变种龙。■

图 7-16 和图 7-17 雪片扫掠：新的皮亚诺曲线和树（堤岸和河流的维数 $D \approx 1.2618$）

这些图形说明了由我设计的一族皮亚诺曲线。它们充满了原始的科赫雪片（图 6-7），因此大约 1900 年时两个初等怪物聚集到一起了。

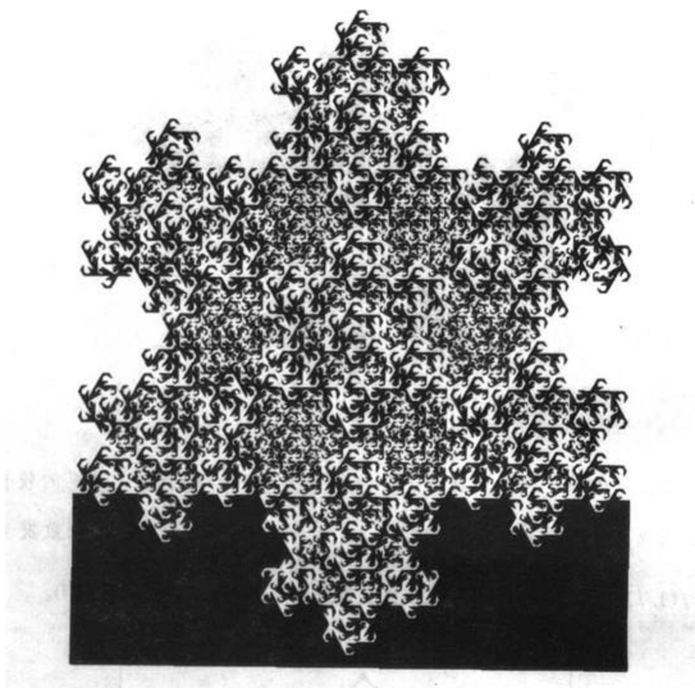


图 7-16

一个更为重要的意义在于，粗看一下就足以证明本书的一个主要论题：皮亚诺曲线决不是没有具体意义的数学怪物。如果它们没有自接触，就包含有明显的和可说明的共轭树。这些树是河流、堤岸、植物树和人体脉管系统很好的一阶模型。

作为一种副产品，我们在这里得到了一种用不相等的雪片来铺覆雪片的方法。

7 直线段发生器 起始器是[0,1]而发生器和第二构造阶段如图 7-17。更确切地说，把上面的发生器记为 S 并称为正位发生器；而把 S 在直线 $x=\frac{1}{2}$ 的镜象定义为反位发生器 F。在雪片扫掠的任何构造阶段，我们可随意使用 F 或 S 发生器。因此每一个 F 和 S 的无限序列都产生一个不同的雪片扫掠。

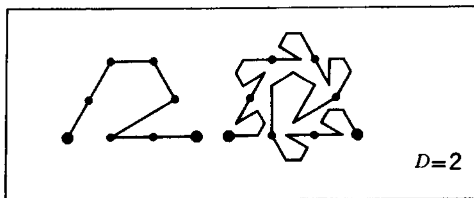


图 7-17

把奇怪折线弄圆 折线容易看上去不完美,如果其每条直线段都弄成六分之一的圆周,则雪片扫掠的奇怪折线就被构造得看上去是各向同性的,换句话说更“逼真”了。

图 6-7 把一个 7 直线段的雪片扫掠弄圆以后充满科赫雪片的一个高阶奇怪折线在很久以前的图 6-7 中已用来给出一个波状背景的描影。当再仔细看它时,就使我们想起了液体流经分形边界,以及两条大致平行但具不同速度的流动之间的剪切线。

13 直线段发生器 现在来改变前面的 7 直线段发生器,把它的第 5 段由总体缩小后的图形来代替,这个图形可按 S 或 F 的位置放置,按 F 位就产生图 7-18 所示的发生器和第二构造阶段。

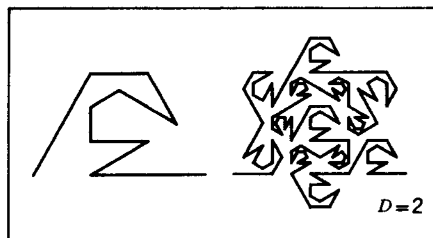


图 7-18

图 7-16 这条由两个相互奇异地缠绕的区域的边界表示的高阶奇怪折线提供了一种比任何语言都好的解释,说明充满平面的意义是什么。

图 7-19 设把前面的 13 直线段发生器弄圆,并且对雪花曲线作相同的处理,所产生的头几阶段如图 7-19 所示。

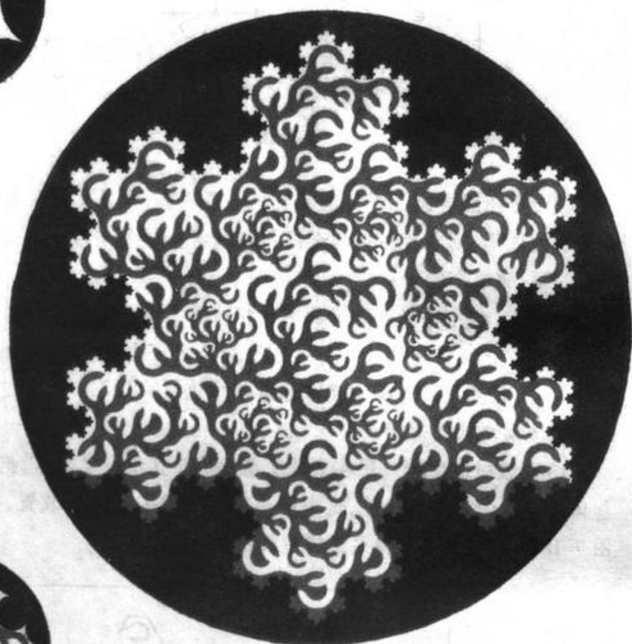


图 7-19

河流维数 在皮亚诺的原始曲线里，每条单独的河流具有有限的长度，因此维数为 1，而这里，单独河流的维数为 $\log 4 / \log 3$，要达到维数 $D=2$，就必须把所有的河流都放在一起。

图 7-20 至图 7-22　皮亚诺-戈斯泼尔曲线，它的树和相关的科赫树
（堤岸和河流维数 $D \approx 1.1291$）

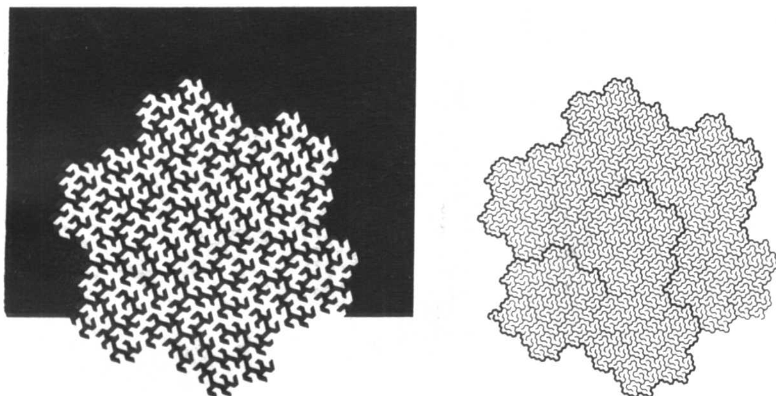


图 7-20

图 7-21

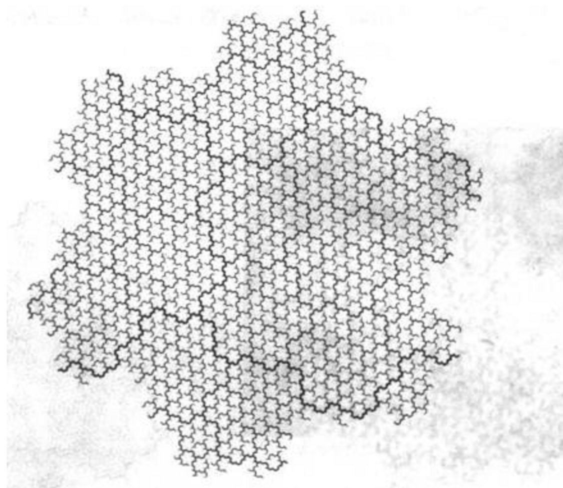


图 7-22

回到图 6-8 直到现在还没有解释过该图之细折线,它代表了由戈斯波尔(Gardner 1976)提出的曲线之第 1 至第 4 构造阶段,此曲线是由(未经进一步加工的)科赫方法所得到的第一条自回避皮亚诺曲线。该起始器是[0,1],而发生器如图 7-23 所示。把该发生器逆时针方向旋转,直至第一条连线为水平。可以看出这就画出了三角形点阵,它占有3×7条连线中的 7 条。在图 7-8 和图 7-9 的说明上对正方形点阵所讨论的性质可推广到现在的三角形点阵。

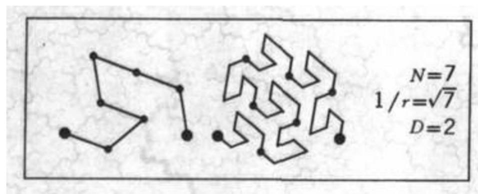


图 7-23

现在我们看到目前的皮亚诺曲线充满图 6-8 的科赫曲线。因此可来阐明,图 6-10 上不同粗细的线条所形成的浓淡代表了目前的第 5 构造阶段。

图 7-20 的左图 再次把戈斯波尔曲线的第 4 阶奇怪折线画成黑色和白色区域的边界。

图 7-20 的右图 河流和堤岸树。河流和堤岸是沿图 7-20 左图上白色和黑色“手指”的中线画出的。

图 7-21 从图 7-20 的右图上河流和堤岸树开始。连线的宽度按它们在霍顿-斯特拉利原理图(Leopold 1962)的相对重要性而重新画出。这时,河流或堤岸的连线,当它们拉成直线时,其宽度正比于它们的长度。河流是黑色的,而堤岸是灰色的。

维数 每条皮亚诺曲线确定自己边界的 D。在图 7-1 和图 7-3 所说的边界不过是正方形,而以后的图上是龙的皮肤,再后是雪片曲线。而现在是 $D \approx 1.1291$ 的分形曲线,它一部分是河流和一部分是堤岸。每条其他的河流和堤岸也都收敛于分维 $D \approx 1.1291$ 的曲线。

法国 当我是一个学生时,常常凝视着一张标有罗亚河和加伦河的地图,就不感到离家很远。

图 7-22 直接由科赫级联构造的河流树 当发生器本身就是树状的,它就产生树。例如,设发生器如图 7-24 所示。这里我们有了去掉图 6-8 上科赫曲线的另一种方法(截去最接近于“源”的分枝)。 ▬

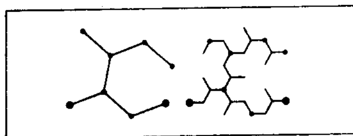


图 7-24

图 7-25 和图 7-26 充满平面的分形树,补缀雪片和四重奏

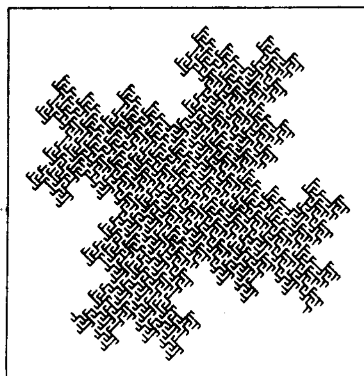


图 7-25

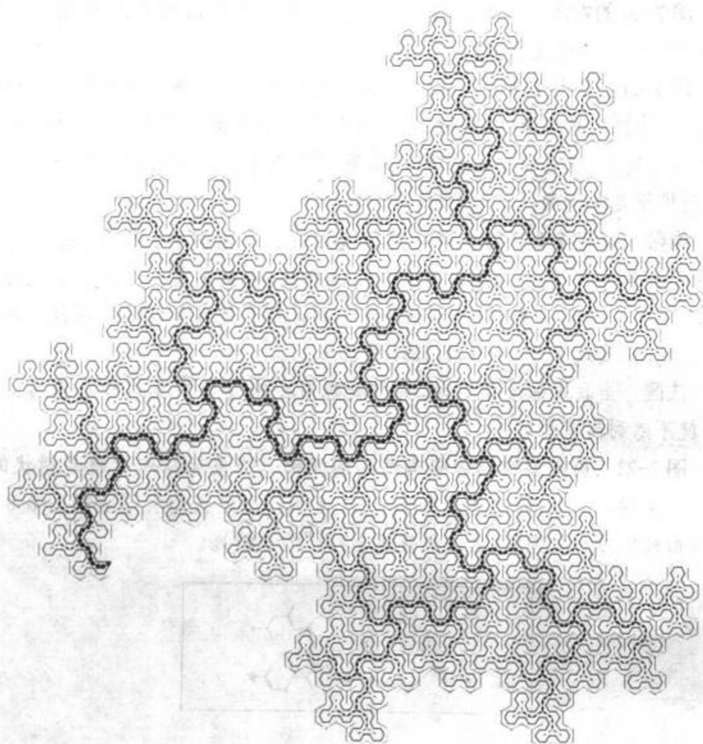


图 7-26

从某些皮亚诺曲线推出的充满平面的“河流”树也能由直接的递推构造得到。关键是发生器本身要树状的。一个不太有趣的例子是，如果树发生器由十字形的4节组成，我们得到皮亚诺-蔡查罗曲线河流树(图7-4)。

补缀雪片　一个较好的例子可这样得到，取[0,1]为起始器，而用图7-27所示为发生器。我们从考察由中点位移(如图6-2所示)所产生的单支河流开始。因此每条渐近河流具有维数 $D=\log 2/\log\sqrt{3}=\log 4/\log 3$。在雪片曲线时对此 D 值已很熟悉，但现在处理的曲线不是雪片，因为发生器的放置遵循不同的规则，如图7-28所示。

为了给河流留出空地，发生器必须在左右位置之间交替放置。因此，补缀出了雪片的对称性，而把那些河流排干的区域称为补缀雪片。

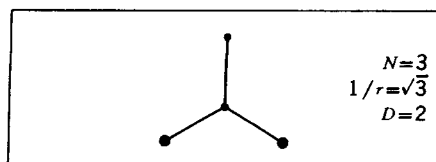


图 7-27

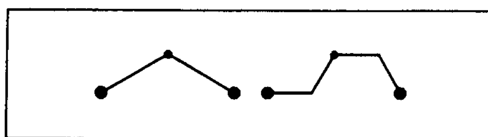


图 7-28

现在，我们转到河流树。它的奇怪折线不是自重叠的，但缺点是他们有自接触。这个特性的渐近变种是不可避免的，而且也是无可非议的，因为它十分恰当地表示了一个事实，即几条河流能发源于同一点。但是我们将会看到(在本图说明的最后)河流奇怪折线可以避免自接触。由于自接触，现在的河流奇怪折线是大块模糊的、以近似分形曲线为边界的六角形图形。

图 7-26 由于消去与源流相接触的所有河流段，并用粗笔画出主河流，图中的河流树更显清晰。由该树排干的面积为$\sqrt{3}/2\approx0.8660$。

补缀雪片的扫掠 现在来画皮亚诺曲线，用一个△形状的起始器和 Z 形状的发生器(它的每节长度相等且交成60°角)。这是在图 6-8 和图 6-9 中使用过的关于 $M=3$ 的发生器族的极端情形。但它与所有其他情形完全不同，见 Davis & Knuth 1970 中有研究。

我们可以证明这种皮亚诺曲线的河流树除了我们刚刚直接画出的以外，别无他样。此起始器的边长为 1，而相应的皮亚诺曲线扫掠的面积等于$\sqrt{3}/6\approx0.2886$。(如此低效率！)

四重奏 下面来研究一条不同的科赫曲线以及填满它的三条曲线：一条皮亚诺曲线和两条树曲线。由我设计的这些形状可说明一个另外的有趣主题。

取[0,1]为起始器。而取下面的图 7-29 为发生器。

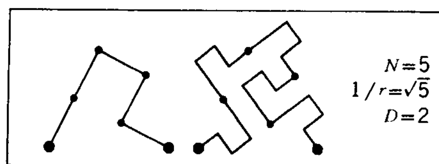


图 7-29

此曲线的边界收敛于维数 $D=\log 3/\log\sqrt{5}\approx 1.3652$ 的科赫曲线。在图6-11的中心，可以看到边界的以及皮亚诺曲线的高阶奇怪折线，我称该图为四重奏，每个"演奏者"以及他们之间的舞台遍以铺覆。

这四重奏的内部当然由它自己内部的河流树所排干，但是所有不同的链式图样是用图 7-30 所示的发生器之一得到的。

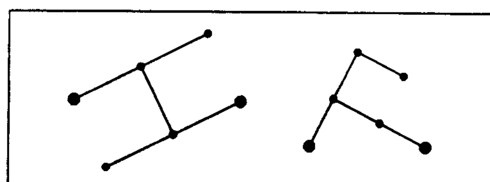


图 7-30

由图 7-30 左面发生器构造的奇怪折线是自接触的(这像本图说明中的第一个例子)，而排干的面积是 1/2；由右边的发生器构造的奇怪折线避免了自接触，而排干的面积是 1，其高阶奇怪折线示于图 7-26。

第8章　分形事件和康托尘埃

本章的主要目标是把另一个通常认为是病态的数学对象康托尘埃 $\mathcal{C}$，具体而无困难地介绍给读者。我们将要描述的该尘埃以及相关尘埃的分维在0与1之间。

因尘埃是由直线上的点组成的，所以容易研究。此外，它们还有助于以最简单的方式引进几个与分形体有关的概念，但是因为过去不常用到这些概念，所以没有专门的术语来称呼它们。首先，术语尘埃在学术上的意义等价于一个拓扑维 $D_T=0$ 的集合，就像"曲线"和"曲面"是拓扑维为 $D_T=1$ 和 $D_T=2$ 的集合。其他的新术语如凝结、间隙和孔洞也将要阐明。

噪声

对于外行来说，噪声是一种太强的声音，它没有令人愉快的节奏或目的，或者是对所需声音的干扰。帕特里奇（Partridge，1958）说明此术语"是从拉丁文 *nausea*（与 *nautes* = 海员，有关）导出的，这个语义是古代的一艘船在恶劣天气下航行时旅客的呻吟和呕吐形成的噪声"（牛津英语辞典并不十分可信）。但在当代物理中，它的角色不很光彩，更谈不上精确：把噪声作为一种偶然脉动或误差的同义词，而不管其起因和表现。本章通过研究一种神秘而简单的噪声来引进 $\mathcal{C}$。

数据传输线上的误差

一条传输线路是一个能够输电的物理系统。然而，电流属于自发噪声。传输质量依赖于由于噪声畸变而引起误差的可能性，

而噪声变化又依赖于信号和噪声强度之比率。

本章涉及到传输计算机数据和包含有很强信号的线路。一个有趣的事实是，信号是离散的，因此误差的分布彻底简化了噪声的分布。噪声包含具有几个可能值的函数，而误差只包含有两个可能值的函数。例如，它可以是一个指标函数，即当时刻 t 没有误差时的值为 0，而当存在误差时的值为 1。

物理学家已经掌握了噪声的构造，它在弱信号的情形下是占优势的，即热噪声。然而，在刚刚描述的问题里当信号很强时经典的噪声就能被忽略了。

不可忽略的剩余噪声是困难而又有吸引力的，因为对它们还知道得很少。本章考察的过量噪声，大约在 1962 年时对于电器工程师们具有实际的重要性，因此各种天才人物都来进行研究。在我对此研究的贡献中，我感到这是需要应用分形概念的第一个具体问题。没有一个古人想象到，对那时这个表面上很简单的工程问题深入研究带来的困难一直延至今日。

猝发和间隙

让我们对误差作更加细致的分析。粗糙的分析揭示存在着无误差的时间间隔。如果这种无误差间隔延续超过 1 小时，我们就称它们为“0 阶间隙”。相反，与 0 阶间隙侧面相接的任何时间间隔称为“0 阶误差的猝发”。当这种分析的精度提高 3 倍以上时就揭示出，原先猝发本身是“间歇的”。这就是说，较短的“1 阶”间隙持续 20 分钟或更长时间，相应地隔开了较短的“1 阶”猝发。同样，每一个 1 阶猝发中又包含有几个持续时间为 400 秒的“2 阶”间隙，它们又隔开了“2 阶”猝发，如此等等，每个阶段都由间隙和猝发组成，而它们又比前一阶段要短 3 倍。这个过程粗略地图示于图 8-1(还未注意到该图的说明)。

前面的描述提出了关于 k 阶猝发在 $k-1$ 阶猝发中的相对位置的问题。这些相对位置的概率分布似乎是与 k 无关的，这个不

变性显然就是自相似性的一个例子，而分形维数也就离此不远了，但我们不要太急。本书的各种实例研究打算要引进新的论点或者对老论点精确化。记住这一点，看来最好是颠倒历史的顺序，并通过伯杰和曼德布罗特误差随机模型（第 31 章）的一种粗糙而非随机的变种引进新论点。

误差猝发的粗糙模型：康托分形尘埃$\mathcal{C}$

上节从一条直线即时间轴开始构造了误差集合，然后切去越来越短的没有误差的间隙，这种过程在自然科学中是不熟悉的，而在纯数学中却有用（至少自康托以来）。（Hawkins 1970，特别在第 58 页。）

在 Cantor 1883 中，初始器是闭区间[0,1]，其中术语“闭的”和所用的方括号表示把端点包括在内；这种符号已在第 6 章中用过，当时不需要故直到现在才说清楚。第一个构造阶段是把[0,1]分为三段，然后移去中间的 1/3 开区间，记为]1/3,2/3[。术语“开的”和反方括号表示不包括端点。下一步，再移去余下的 $N=2$ 个中每一个的中间 1/3 开区间。如此下去直至无穷。

这个余下的点集 $\mathcal{C}$ 就称为二进制集，因为每次都留下 $N=2$ 段；$\mathcal{C}$ 也可称为三元集或三进制集，因为[0,1]被分割为三段。

更加一般化，把分段的数目称为基，并记作 b，而此集合的第 N 段与总长之比是 $r=1/b$。$\mathcal{C}$ 也称为康托间断集，而我马上就要建议称它为康托分形尘埃，因为把时间轴上的一个点记为一个“事件”，则 $\mathcal{C}$ 就是事件的分形序列。

凝固，孔洞和乳清

康托集的构造过程是一种级联，这是刘易斯·理查森对湍流使用的术语（而我们第一次借用它是在第 6 章，为了描述海岸线和科赫曲线）。均匀分布于初始器[0,1]上的“物质”遭到一个离心旋

涡，把中间1/3扫掠进两端的1/3。

从[0,1]中割去中间1/3段成为一个空隙，今后就称为孔洞发生器，本节中自造的这个新字孔洞，*trema* 来源于希腊文 τρημα，意思是小孔，它也有点对应于拉丁文 *termes* = 白蚁。它可能是最短的希腊字，至今没有赋予重要的科学意义。

在这里，孔洞是与空隙一致的，但在后面将要遇到的其他情形里它们有着不同的意义，所以需要用两个不同的术语。

当挖空一个"一阶孔洞"以后，全部物质就被保存并重新以均匀密度分布在外部的两段，这就称为前凝乳。然后又出现两个离心旋涡并在两个区间$\left[0,\frac{1}{3}\right]$和$\left[\frac{2}{3},1\right]$开始重复前面的操作。把此过程一直继续下去就像理查森级联一样，收敛于一个极限集，称为凝乳。如果一个阶段的延续时间正比于旋涡的大小，则全部过程具有有限的延续时间。

同时，我建议用乳清(Muffet小姐不会留意的术语)来标记这凝乳以外的空白。

要提醒一下，上面使用的术语不仅在数学上有意义，而且在物理上也有意义：凝固表示由于收缩而引起不稳定的任何级联，而凝乳是表示一个体积，其内部的物理特性由于凝固而变得更加集中。

语源 凝乳(*Curd*)源于古老的英文 *Crudan*，意思是"压，用力推"。从帕特里奇(Partridge 1958)看来，这种学问未必就不相干，因为凝乳的语源族毫无疑问包含了感兴趣的分形族：见第23章。

注意下列的松散联系：凝乳→干酪→牛奶→银河→银河系(γαλα = 牛奶)→星系。当我进行星系研究时造了字凝固，而"星系凝固"在语源学上的色彩也没有逃脱我的注意。

外界限和外推的康托尘埃

作为 $\mathcal{C}$ 外推法的前奏，让我们回顾一下历史。当康托引进集合 $\mathcal{C}$ 时，他几乎没有离开研究三角级数的原始领域。因为此级数

与周期函数有关，它所涉及的唯一外推是永无止境的重现。现在回想一下在第 6 章从湍流研究中借用的不解自明的术语内界限和外界限，它们分别是出现在一个集合里的最小和最大特征尺寸 ϵ 和 Ω，并可以说，康托本人限制了 $\Omega = 1$。第 k 个构造阶段产生 $\epsilon = 3^{-k}$，而对 $\mathcal{C}$ 为 $\epsilon = 0$。为了获得任何其他的 $\Omega < \infty$，例如适合于傅立叶级数的 2π 值，我们以比率 Ω 来放大周期性的康托尘埃。

然而，本书认为有价值的自相似性却因重现而被破坏。但是如果初始器仅仅应用于外推而且如果外推法遵循相反或向上的级联，破坏很快就被纠正。第一阶段以 $1/r = 3$ 的比例放大 $\mathcal{C}$ 而置于 $[0,3]$。其结果是对 $\mathcal{C}$ 增加一个转移到右端的复制品，其中间被一个长度为 1 的新孔洞所分开。第二阶段以同样的比例 3 放大第一阶段得到的结果，而置于 $[0,9]$。其结果是对 $\mathcal{C}$ 增加 3 个转移在右端的复制品，并由 2 个长度为 1 的新孔洞和 1 个长度为 3 的新孔洞所隔开。向上的级联逐次以形式为 3^k 的比例连续地放大 $\mathcal{C}$。

如果喜欢，我们还可以交替进行，如两个阶段是内插，然后一个阶段是外推，等等。在这种情形，每组三个阶段，将外界限 Ω 乘以 3，而内界限 ϵ 除以 3。

◁在这种外推尘埃里，负轴是空的：一个无限的孔洞。这个基本概念将在第 13 章中进一步讨论，在那里我们要处理（无限的）大陆和无限的群集。▶

维数 D 在 0 和 1 之间

由无限次内插和外推产生的集合是自相似的，而

$$D = \log N / \log (1/r) = \log 2 / \log 3 \approx 0.6309,$$

是 0 与 1 间的分数。

用如下的不同凝固规则，我们能够获得其他的 D，实际上是 0 与 1 之间的任何维数。如果第一阶段的孔洞长度是 $1 - 2r$，其中 $0 < r < \frac{1}{2}$，则维数是 $\log 2 / \log (1/r)$。

如果 $N\neq2$,就可能有进一步的变化。

对 $N=3$ 和 $r=1/5$ 的集合,我们得到

$$D=\log 3 / \log 5\approx0.6826。$$

对于 $N=2$ 和 $r=1/4$ 的集合,得到

$$D=\log 2 / \log 4=1/2。$$

对于 $N=3$ 和 $r=1/9$ 的集合,也得到

$$D=\log 3 / \log 9=1/2。$$

虽然它们的 D 相等,但后面这两个集合"看上去"非常不同。这种研究将在第 34 章中再次继续和推广,从而导致产生腔隙的概念。

还可看到,对于每一个 $D<1$,至少存在一个康托集合,而且由 $Nr\leqslant1$ 推出 $N<1/r$,因此 D 永不大于 1。

$\mathcal{C}$ 称为尘埃,因为 $D_T=0$

虽然一个康托集合的 D 能在 0 与 1 之间变化,但从拓扑学观点看来所有康托集合都具有 $D_T=0$,因为根据定义,任何一点都是从其他许多点中分离出来的,而在分离时没有再要去掉任何东西。从这个观点看,在 $\mathcal{C}$ 和有限点集之间没有什么不同!上述有限点集的 $D_T=0$ 在标准几何学中是熟知的,但在第 6 章中用它证明了科赫曲线 $\mathcal{K}$ 的拓扑维为 1,然而对所有总体上不连通的集合均有 $D_T=0$。

因为没有与"曲线"和"曲面"(它们是 $D_T=1$ 和 $D_T=2$ 的连通集)相对应的可接受的通俗名称,我建议把 $D_T=0$ 的集合称为**尘埃**。

间隙的长度分布

在康托尘埃里,设 u 是间隙长度的可能值,而以 U 表记未知的间隙长度。而以 $Nr(U>u)$ 表示 $U>u$ 的间隙或孔洞的数目。

◁这个记号是模仿概率论的记号 $Pr(U>u)$。▶我们发现存在一个常数前乘因子 F，使得函数 $Nr(U>u)$ 的图形不断地与 FU^{-D} 的图形相交。这里 D 仍是维数，而以 $\log U$ 和 $\log Nr$ 作为图形的坐标，步长是均匀的。

误差的平均数

像海岸线的情形一样，只要康托凝固终止于间隔 $\varepsilon=3^{-k}$ 就得到误差序列的初步想法。其中 ε 可以是传输一个单符号所需的时间长度。我们还必须应用具有大而有限 Ω 的康托周期外推法。

在时间 0 与 R 之间的误差数记为 $M(R)$，其中 R 是仅仅计及见到值得注意的某事的瞬时所保持的时间。这是一个分形时间的例子。

当样本从 $t=0$ 开始时（这里只讨论这种情况），$M(R)$ 的导数就像科赫曲线那样进行。只要 R 小于 Ω，当时间为 $3R$ 时误差数就加倍。由此得出 $M(R)\propto R^D$。

这个表达式与 D 维欧几里得空间中半径为 R 的圆盘或球的质量的标准表达式同样的，也是与在第 6 章中对科赫曲线所得到的表达式相同的。

作为一个推论，每单位长度上的误差平均数的变化大约与 R^{D-1} 相同，只要 R 在内界限和外界限之间，当 Ω 有限时，平均误差数连续减少到最后值为 Ω^{D-1}，这是当 $R=\Omega$ 时达到的值。此后，密度保持较大或较小的常数。当 Ω 为无限时，误差平均数减少到 0。最后，经验数据常常提示 Ω 是有限的而且非常大，但却不能以任意精度来确定它的值。如果情况正是这样，则误差平均数有一个很小而不为 0 的下限，但它太不确定了，以致无实用价值。

孔洞端点和它们的极限

◁孔洞的端点（是 $\mathcal{C}$ 中最值得注意的成员）没有把 $\mathcal{C}$ 包罗无

遗；事实上，它们只构成了 $\mathcal{C}$ 中微小的一部分。$\mathcal{C}$ 中其余的点在物理上的重要性将在第 19 章中讨论。▶

康托尘埃的实际本性

有些读者早就注意到以及(或者)已经听到，有关**魔鬼阶梯**(见图 8-5 的说明)的文献正迅速增长，必须确实找到它才能相信。当我在 1962 年开始研究本课题时，每个人都同意这康托集合至少像科赫曲线和皮亚诺曲线一样可怕。

每个自尊的物理学家一提到康托就自动"避开"，与任何一个主张 $\mathcal{C}$ 在科学上有意义的人离得远远的，而渴望证实这种主张已经被向前发展、经过试验并发现了不足。我的唯一的鼓励来源于(S. Ulam)的暗示，这是诱人的，尽管它们没有被发展或被承认，他的暗示是有关康托集合在星星聚集的引力平衡中可能起到作用；见 Ulam 1974。

为了发表康托尘埃，我必须免去每次都提到康托！

这里我们是从自然界本身的特性导出 $\mathcal{C}$，而第 19 章描述了关于 $\mathcal{C}$ 的另一个非常不同的物理作用，所有这些必定意味着康托尘埃的实际本性是非常不同的。

不可否认，在大多数情形里 $\mathcal{C}$ 本身还只是个要作许多改进的、非常粗糙的模型。然而我主张，由于把康托不连续性看作病态而引起的**非常相同的性质是间歇性模型所不可缺少的**，必须保留 $\mathcal{C}$ 的更现实的替代物。 ■

图 8-1 至图 8-3　康托三元棒和饼(水平截面维数 $D = \log 2 / \log 3 \approx 0.6309$)。土星环。康托幕。

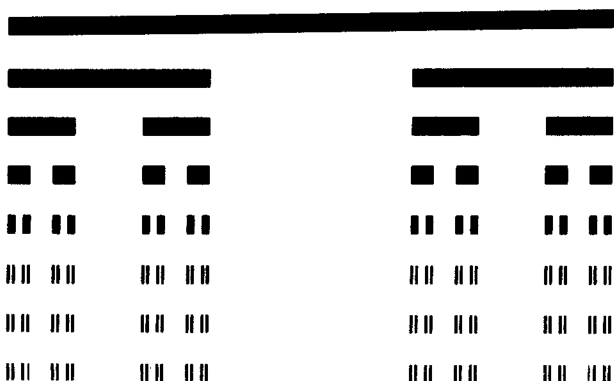


图 8-1

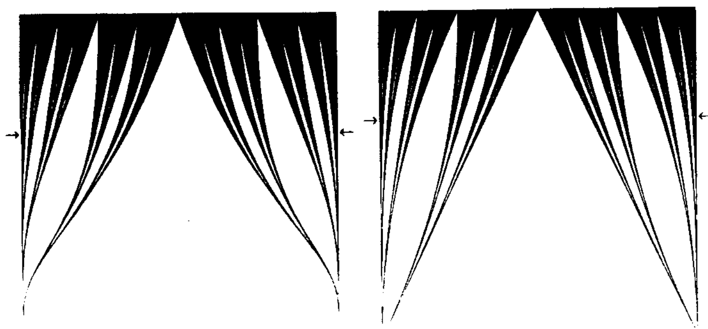


图 8-2　　　　图 8-3

康托尘埃以[0,1]作为起始器,而发生器如图 8-4 所示:

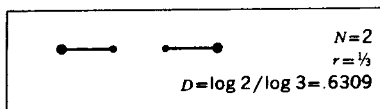


图 8-4

图 8-1 用图表示康托尘埃是极为困难的,因为它极细而又很空荡,这些点无法用肉眼看见。为了有助于直观,给出一个大概的形状,就把它变粗,所以称为康托棒。◁用专门术语说,这是长度为 1 的康托尘埃与长度为 0.03 的直线段的笛卡尔乘积。▶

凝固 我把构造康托棒的过程称为凝固。由一根圆棒(它的投影是宽度/长度 = 0.03 的矩形)开始。最好把它想象成具有非常低的密度。然后将此棒中间 1/3 的物质"凝固"到两端的 1/3 棒上,这样后者的位置保持不变。下一步,再把每端 1/3 的中间 1/3 的物质凝固到各自的两端 1/3,如此无限直至留下无限多的、具有无限高密度的、无限细的窄条。这些细条以非常特殊的形式沿直线分开,这种形状是由发生过程所诱发。在此图上,当无法制版印刷及肉眼无法分辨时,凝固(它最终要相碰了!)就停止,图上的最后一条与倒数第二条已无法辨别了;最终部分的每一条是灰色细条而不是两条平行的黑色细条。

康托饼 从一个厚度比宽度小得多的煎饼开始凝固,而把生面团凝结进较薄的煎饼(对流出物体适当的补足),直至变成一个无限地延伸的拿破仑饼,我们称它为康托饼。

土星光环 最早认为土星只有一个光环围绕它。后来发现环上有一个空隙,接着发现有二个空隙,而现在旅行者 1 号宇宙飞船已经探测到极大数量的空隙,大多数都是非常细的;旅行者号也已经确定这些环是透明的:它们能通过太阳光线。我们称它为一个"细而稀疏"的集合是很合适的。

因此,从该环的结构(见 Stone & Minen 1981,特别是封面图形)就联想起这是一些近乎圆的集合,每个圆的半径对应于从某个原点到康托尘埃中一点的距离。◁用专门术语来讲,就是康托尘埃与圆的笛卡尔乘积。实际上,它与下列图形很接近:一个圆与具有正尺度(就像在第 15 章所考察的)尘埃的乘积,▶最新插入语:同样的思想独立地在 Avron & Simon 1981 中作了阐明,并且与希尔方程相联系,其中的注 6 包含有许多其他有关的文献。

谱 文献(Harter 1979 ~ 1981)描述了某些有机分子的谱。它们与康托尘埃的类似程度使人倾倒。

图 8-2 和图 8-3 这里,康托尘埃的形状是通过置于广义尘埃($N = 2$,和变量 r)中来表明的。其垂直坐标或者是 r 本身(从 0 到 1/2 范围)(图 8-3),或者是 D(从 0 到 1 范围)(图 8-2)。这两个剧场的幕顶都充满于[0,1]区间。该两张图的每条水平截面都截出康托尘埃,图上箭头所指处为 $r = 1/3$ 及 $D = 0.6309$。

一个有名的希腊佯谬 希腊哲学家们相信,为了无限可分割,物体必须是连续的。他们没有听说过康托尘埃。

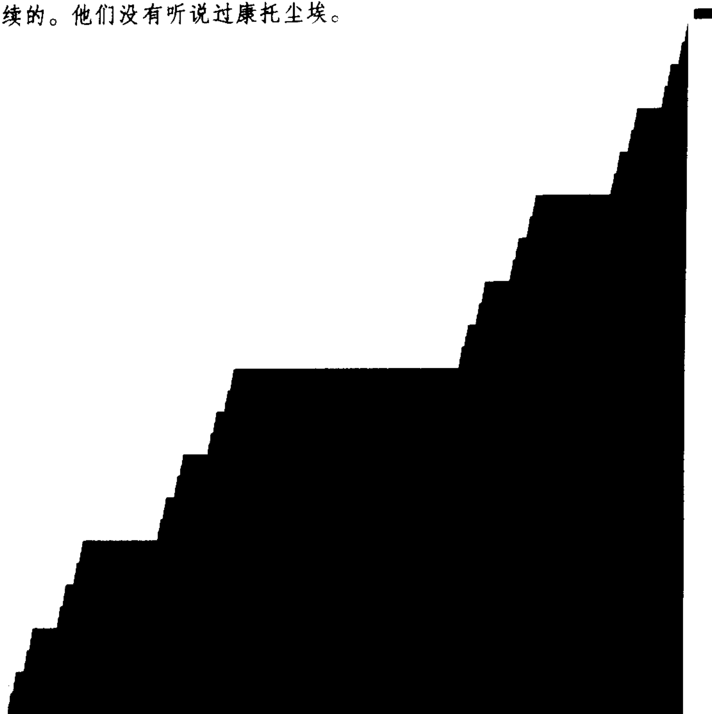


图 8-5 康托函数,或魔鬼阶梯(维数 $D=1$,竖直段的横坐标维数 $D\approx0.6309$)。康托运动

康托函数描述了如图 8-1 所示康托棒的质量分布。许多作者认为它的图形就像魔鬼阶梯,因为它的确很怪异。设棒的长度和质量都等于 1,对每个横坐标值 R 定义 $M(R)$ 是从 0 到 R 之间所包含的质量。因为间隙上没有质量,所以 $M(R)$ 在所有区间之和上,也就是沿着棒的总长度保持常数。然而,因为锤打不影响棒的总质量,$M(R)$ 就必须在从坐标为(0,0)的点到坐标为(1,1)的点的某些地方安排增加质量,这种增加无限多,无限小,相应于细条的高度群集状的跳跃。Hille & Tamarkin 1929 中详细描述了这种函数的奇特性质。

规则化映射 魔鬼阶梯的功绩是完成了把康托棒的极其不均匀性映射为均匀和齐次。从竖向长度相同的两个不同区间出发,康托阶梯的逆函数就

产生两个包含同样质量的细条集——虽然习惯上看去相互间非常不同。

因为科学促进了均匀性理论的发展，这就常常可以由这种规则化的变换使分形不规则性变得容易分析。

分形均匀性 把康托棒上的质量分布作为分形均匀性来描述，就很方便。

康托运动 就像把科赫曲线重新解释为科赫运动或皮亚诺运动的情形一样，把纵坐标 $M(R)$ 重新解释为时间是有用的。如果这样做，则其逆函数 $R(M)$ 就给出了一个康托运动在时刻 t 的位置。这种运动是极不连续的，第31章和第32章描述了对随机化的直线和空间情形的推广。

分形维数 梯级的宽度和高度之总和都等于1。此外，我们还发现这曲线具有完全确定的长度，等于2。一条有限长度的曲线称为可度长的，其维数 $D=1$。这个例子表明维数 $D=1$ 与存在多种不规则性相容，只要它们是充分地分散开的。

◁人们可能爱把现在的曲线称为分形，但是为了达到这一目的，我们就必需不太严格地在 D 概念以外再单独定义分形。▶

奇性函数 康托阶梯既非减函数也不是常数函数，它是奇性的，意即连续而不可微。它的导数几乎处处为0，而它的连续变化是控制于出现在一个其长度即按线性测度——为0的集合上。

任意非减函数都可写成下列三个函数之和，即一个奇性函数，一个由离散跳跃组成的函数和一个可微函数。这后两个函数在数学上是经典的而在物理上有着广泛的用途。另一方面，奇性函数在物理上都认为是病态的因而完全缺乏应用。本书的一个主要论题是阐明上述看法完全是个过错。

统计物理中的魔鬼阶梯 图8-2和图8-3在本书的1977年版上发表以后，使魔鬼阶梯引起了物理学家的兴趣，并且鼓励了文献的扩展。对图8-2或图8-3的“幕”图，或者对图19-1的法图幕的图解性分析，较快地增加起来。见 Aubry 1981。早期的重要工作(Azebel 1964, Hofstadter 1976)过去常被隔绝，现在则与这种新发展融汇了。■

第三篇　星系和涡旋

第 9 章　星系群集的分形观

在第 6 章和第 7 章，通过地貌学，介绍了科赫和皮亚诺分形，但是分形最重要的应用是在其他方面。为了逐渐进入科学主流，本章和下两章要处理两个特别古老、重要而困难的问题。

星体、星系和星系群集等的分布显然吸引了业余爱好者和专家们，但是群集只是在表面上作为一个整体归属于天文学和天体物理学。基本原因是至今还没有人能够解释，为什么物质的分布形成不规则的层次(至少在某个尺度范围内)。虽然有关本课题的许多著作都提及群集，但严格的理论进展却被匆忙扫入了地毯下，而主张除了某个很大又不确定的阈值尺度外，星系是均匀分布的。

不很根本地讲，在处理不规则性时的犹豫是由于在数学上没有描述的工具引起的。要求用统计学对两个假定进行选择，其中只有一个被详尽研究过(渐近均匀性)，结果是不确定的，这会惊奇吗？

然而这些问题未被搁置一边。在努力作解释的同时，我想描述群集和用纯几何方法模拟实际是不可避免的。用分形来处理此论题的工作分散在书中好几章，其打算是用显然是构造的模型来表明存在有与群聚程度相一致的迹象，其群聚程度远远超出了现有模型所提出的极限。

本章是引论性的，它描述了一种有影响的，由霍伊尔提出的星

体和星系形成的理论,即由傅尼埃·达尔博提出的(也称为沙利耶模型)主要是描述性的关于星体和星系分布的模型,而最重要的是概述了某些经验数据。这表明,理论和数据都能借助于标度分形尘埃加以阐明。我主张星系和星体的分布中含有一个自相似的区域,其中的分维满足 $0<D<3$。对于期望 $D=1$ 的理论原因只简略叙述,所引起的问题是为什么观察到 $D\approx1.23$。

预告 第22章以分形为工具使我们了解什么是宇宙学原理,它怎样才能被修改,以及为什么修改要求随机性。改进群集模型的讨论留到第22、23章和第32至35章中进行。

存在物质的整体密度吗?

让我们从周密考察物质整体密度概念开始。就像海岸线长度的概念一样,事情看来很简单,但实际上很快而极有趣地失败了。为了定义和度量密度,我们先考虑一个半径为 R,中心位于地球的一个球,其质量为 $M(R)$。计算定义为

$$M(R)/[(4/3)\pi R^3]$$

的近似密度。然后让 R 趋于无穷,则把此近似密度收敛的极限值定为整体密度。

但是整体密度必须收敛于一个正而有限的极限值吗?如果是真的,则收敛速度还离开要求的很多。此外,在过去估算极限密度有非常奇特的行为。就像随着望远镜所观察到的世界的深度逐渐增加一样,近似密度以一种惊人的、有规则的方式减少。按照 de Vaucouleurs 1970,它保持与 R^{D-3} 成正比。观察到的指数 D 要比3小得多,基于间接的证据,最好的估计是 $D=1.23$。

上述德·沃柯勒斯的论文认为近似密度的行为反映了现实,意即 $M(R)\propto R^D$。这个公式使我们想起了一个经典的结果,即在维数为 E 的欧几里得空间里一个半径为 R 的球的体积是正比于 R^E。在第6章里我们也遇到了关于科赫曲线的同样公式,但有一个主要的差别,即指数已不是欧几里得维数 $E=2$,而是分数值的分维

D。在第 8 章里对于时间轴(对其有 $E=1$)上的康托尘埃导出了 $M(R)\propto R^D$。

所有这些例子都强有力地表明,德·沃柯勒斯指数 D 是一个分维。

星星在标度范围内吗

显然,标度范围(其中的 D 满足 $0<D<3$)必须在到达具有完全确定边缘的对象(例如行星)以前就中止。但是,这包括不包括星星呢?按照文献 Faber & Gallagher 1980 中所报道的韦宾克的数据,在半径 R 以内银河的质量可以非常好地表示为 $M(R)\propto R^D$,而此 D 是从星系外推的,但是我们下面的讨论只涉及星系。

标度范围存在上界限吗?

满足 $0<D<3$ 的标度范围在非常大的尺度方向上能延伸到多远范围的问题,既是有争论的、又是一个重新活跃起来的课题,许多作者认为或暗示标度范围容许有一个与星系群集相应的外界限,另一些作者则不同意。De Vaucouleurs 1970 断言:"星系的群聚性,以及大概一切物质形式的群聚性,是在所有能观察到的而又没有趋向均匀性迹象的尺度范围内,宇宙结构的最主要的特征,甚至当考察较大的空间体积时,物质的平均密度是平稳地减少的,而认为这种趋势不会延伸到很大距离和很低密度的假设是没有观察根据的。"

这两种思想的学派之间的辩论对于宇宙学是有意义又很重要的——但这不是本书的目的。即使 $0<D<3$ 的范围的两端被限界,对它作仔细研究的重要性本身仍然很充分。

在任何一种情形里,宇宙(就像在第 3 章中讨论的丝线球一样)显示出含有几种不同的有效维数的序列。从地球半径量级的尺度开始,首先遇到维数 3(因为固体具有确切的边缘)。然后维

数降到0(把物质看成孤立点的集合),接下去就是感兴趣的范围,它是由满足 $0 < D < 3$ 的非普通维数所决定的。如果标度群聚性可延伸到无穷远,则最后这个 D 值能有用的。相反,如果存在一个有限的外界限,则在顶端要加上第4个范围,其中点丧失了其同一性而是一个均匀流,这就意味着其维数又等于3。

另一方面,最天真的想法是把星系看作在整个宇宙中是接近于均匀分布的。在这种靠不住的假设下,我们有序列:$D = 3$,然后 $D = 0$ 和再次 $D = 3$。

◁广义相对论断言,在没有物质的情况下,空间的局部几何学倾向于平坦和欧几里得的,而在有物质的情况下它被局部地黎曼化,在这里,我们可以说整体平坦而维数为3的宇宙在局部 $D < 3$。这种扰动方式在 Selety 1924 中有讨论,这是一篇不著名的文献,它没有提到科赫,但包含了在第6章中所构造的一个例子。▶

傅尼埃宇宙

尚需构造一个满足 $M(r) \propto R^D$ 的分形,并且看一下与已承认的有关宇宙的观点是否符合。第一个完整描述了这类模型的是傅尼埃·达尔博(第40章)。虽然 Fournier 1907 主要是伪装成科学的一部小说类作品,但它包含了真正有意义的考虑,对此我们马上就要读到。然而,首先描写它提出的结构,是最合适的。

它的构造从有心正八面体开始,该八面体的投影表示在图9-1的中部。此投影简化为正方形(对角线长为12个"单位")的四个角和它的中心。但八面体也包括了过正方形中心画出的垂直于纸平面且距该中心上、下各为同样6个单位的两点。

现在,每一点都用一个半径为1的球所代替,并看作"0阶星球聚集体",而包含7个基本球的最小球就称为"1阶星球聚集体"。2阶星球聚集体的获得可按比例 $1/r = 7$ 放大1阶聚集体,并且把每个半径为7的球都以1阶聚集体的复制品来代替。用同样的方法,一个3阶星球聚集体可由按比例 $1/r = 7$ 放大一个2阶聚

集体,并用 2 阶聚集体的复制品来代替其每个球而获得,如此等等。

总之,在两个逐阶的聚集体之间点数和半径都按比例 $1/r=7$ 放大。因此,当 R 是某个聚集体的半径时,函数 $M_0(R)$(表示包含在半径为 R 的球内点的数目)是 $M_0(R)=R$,而对于中间的 R 值,$M_0(R)$比 R 小(一直小到 $R/7$),但总的趋势是 $M_0(R)\propto R$。

从 0 阶聚集体出发,有可能逐次内插 -1 阶、-2 阶等等的聚集体。第一阶段,把每个 0 阶聚集体用一个按比例 1/7 缩小的 1 阶聚集体的像来代替,如此等等。如果这样做了,则关系式$M_0(R)\propto R$ 的有效性就扩展到小于 R 的值。这样无限次外推和内插以后,我们就得到一个自相似集,其维数 $D=\log 7/\log 7=1$。

我们会注意到,三维空间中 $D=1$ 的对象既不一定是直线,也不一定是任何的可求长曲线。甚至不一定是连通的。每个 D 相容于任何较小的或相等的拓扑维数值。特别是,因为双重无限的傅尼埃宇宙是完全不连通的"尘埃",它的拓扑维数是 0。

质量分布;分形均匀性

从几何学到质量分布的步骤是很显然的。如果对每个 0 阶星球聚集体赋以单位质量,则在半径 $R>1$ 的球内的质量 $M(R)$与 $M_0(R)$相同,因此正比于 R。此外,要从 0 阶聚集体产生 -1 阶聚集体是打碎一个看作均匀的球而发现它由 7 个较小的球组成,这个阶段就把 $M(R)\propto R$ 的法则推广到小于 $R=1$。

当在整个三维空间看时,最终的质量分布是极不均匀的,但在傅尼埃分形里看,它却能够作为均匀的(回想图 8-2)。特别,傅尼埃宇宙里任何两个几何学上相等的部分具有相等的质量。我建议把这种质量分布称为*分形上的均匀性*。

◁前面的定义用的是标度分形的措辞,而分形均匀性的概念是更加一般的。它适用于任何分形,只要它的维数 D 的豪斯多夫测度是正的和有限的。分形均匀性要求集合携带的质量正比于集

合的豪斯多夫测度。▶

把傅尼埃宇宙看作康托尘埃。推广到 $D\neq 1$

我相信并没有因为在本章开头几节偶尔使用分形术语而把读者头脑弄昏。显然(不知道事实)傅尼埃是沿着他的同时代人康托相平行的踪迹走过来的。其主要不同在于傅尼埃构造被嵌入空间以代替康托的直线。为了进一步改进相似程度,只要把傅尼埃的聚集体从球改为砖(填满的立方体)。现在每个0阶聚集体是边长为1的砖,而包含有7个1/7边长的聚集体:其中的一个与原先的立方体有相同的中心,其余的六个则与原先立方体侧面的小正方形中心相切。

后面我们还将考察傅尼埃怎样从基本物理现象得到值 $D=1$,以及霍伊尔怎样得到了同样的值,然而,从几何学上说,即使保持全部正八面体和值 $N=7$ 不变,$D=1$ 是一种特殊情形。因为球与球没有重叠,所以 $1/r$ 可以取3到无穷大之间的任何值。这就得到 $M(R)\propto R^D$,而 $D=\log 7/\log(1/r)$,在0与 $\log 7/\log 3\approx 1.7712$ 之间任意取值。

此外,给定任何 $D<3$,容易通过改变 N 数来构造具有这种维数 D 的傅尼埃模型的变种。

沙利耶模型和其他的分形宇宙

上面的构造办法分担了第一批分形模型的每一个固有的缺点,最明显的,就像第6章的科赫曲线模型和第8章的康托尘埃模型一样,对于怪异的图形来说它是太规则了。作为一种改进,沙利耶(Charlier 1908,1912)提出可以容许 N 和 r 取值为 N_m 和 r_m,即从一个层次水平的值变到另一个层次。

沙利耶的学术地位在于,尽管他极力用当时先进的科学语言来夸奖傅尼埃,甚至这简单模型很快成为归功于它的著名解说者

代替了它的不著名作者。这段时间里更多的讨论特别可见 Selety 1922,1923a,1923b,1924。此外,该模型吸引了非常有影响的波雷尔的注意,在 Borel 1922 中他的评论尽管平淡,却是很聪明的。但从那以后,除了断断续续的有些复苏以外,此模型就被忽视了。(不能很使人信服的理由可见 North 1965 的注释,第 20~22 页,第 408~409 页),然而它没有消逝,其基本思想又多次被独立地重新发掘,直至著名的 Lévy 1930(见第 40 章的莱维)。最重要的是,傅尼埃宇宙的分形核心概念隐含在 Von Weizsäcker 1950(见第 10 章)关于湍流和星系的研究以及 Hayle 1953 星系起源的模型中,后者我们马上就会讨论。

这基本的分形要素也在我的模型中出现,见第 32 章至第 35 章。

在这种解释下,产生了这样的问题,星系分布的模型能否不是具有一个或二个界限的分形呢? 我想不会。如果我们同意分布必须被标度(其原因将在第 11 章中详细说明),则这个有物质集聚的集合不是一个标准的标度集,它必定是个分形集。

如果承认标度的重要性,沙利耶对傅尼埃模型的无标度推广是不能令人鼓舞的。◁顺便指出,它容许 $\log N_m/\log(1/r_m)$ 随 m 在两个界限 $D_{min}>0$ 和 $D_{max}<3$ 之间变化。这里我们还有另一个论点:有效维数不一定有单个值,而可以在上限和下限之间浮动。这个论点在第 15 章再次被提及。▶

傅尼埃期望 $D=1$ 的理由

现在我们来描述一个令人难忘的争论,它导致 Fournier 1907 在第 103 页下结论,D 必须等于 1。这个争论是不要忘记它的作者的一个强有力的理由。

考虑一个质量为 M,半径为 R 的任意阶星系聚集体,不用怀疑公式能否应用到球对称的物体。假定在球面上的引力势能是 GM/R(G 是引力常数)。落到该宇宙的一颗星其碰撞速度等于

$(2GM/R)^{1/2}$。

为了给傅尼埃释义，从观测知道，没有一个星球的速度超过光速的 1/300，因此可以得出一个重要的结论，即包含在一个世界球内部的质量随它的半径而不是它的体积的增大而增大，换句话说，在一个世界球内部的密度变化与球面成反比……说得更清楚些，曲面上的势能总是相同的，它与质量成正比而与距离成反比。因此接近于光速的星球速度在宇宙的任何部分都不能达到。

霍伊尔凝固；琼斯判据也推出 $D=1$

在前述的 Hoyle 1953 的理论中也提出了分层分布，按照霍伊尔，星系和星星是从均匀气体开始的级联过程所形成的。

考虑一团气体云，其温度是 T 而质量为 M_0，在整个半径为 R 的球上分布有均匀密度，就像琼斯所阐明的，当 $M_0/R_0 = JkRT/G$（这里 k 是波尔兹曼常数，而 J 是一个数值系数）时，就显示出一种"临界"状态。这时原始的气体云是不稳定的而不可避免地要收缩。

霍伊尔假设：(a) M_0/R_0 在某个初始阶段呈现此临界值。(b) 当气体云的体积降到 1/25 时最终停止收缩。(c) 然后，每片云就分裂为 5 片云，其中每一片的大小相等，且质量为 $M_1 = M_0/5$，半径为 $R_1 = R_0/5$。这样，过程结束时就像它开始时一样：一个不稳定的状态，随后是收缩和再分裂的第二阶段，然后是第三阶段，等等。而当云成为如此不传导，即由于气体崩溃而使热量不再能散逸出时，凝固就停止了。

就像具有同样级联过程的其他领域一样，我建议，称上述五片云为凝乳，而称级联过程为凝固。还有，当我引进最后这个术语时，我并没有反对它们与星系的相并列。

傅尼埃引入 $N=7$ 是为了简化图象说明，但霍伊尔认为 $N=5$ 具有物理基础。在其他方面与傅尼埃相比，几何学上的说明详细得超出了合理性或者需要。霍伊尔关于凝乳的空间扩散是不明确

的。而明确的补充必须等到第 23 章描述的随机凝结。然而这些不同之点是无关紧要的；主要事实是 $r=1/N$，这样，如果凝固结束时就像开始时一样是琼斯不稳定性，则就必需 $D=1$。

此外，如果第一阶段的时间间隔取为 1，气体动力学表明第 m 阶段的间隔是 5^{-m}。这就产生了在 1.2500 的总时间内同样的过程能够继续到无限。

傅尼埃和霍伊尔推导 $D=1$ 的等价性

在满足琼斯判据的不稳定气体云的边缘，速度和温度之间的关系是 $V^2/2=JkT$，因为 GM/R 分别等于 $V^2/2$（傅尼埃）和 JkT（琼斯）。现在回想起在统计热力学中气体的温度正比于其分子速度的均方值。因此傅尼埃与琼斯判据结合就得出在云的边缘，宏观物体的降落速度正比于其分子的平均速度。仔细分析在琼斯判据里温度的作用确实表明两种判据是等价的。◁ 极有可能，在 Wallenqnist 1957 中报道，类似的关系式 $M(R)\propto R$ 能推广到星系内部。▶

为什么 $D=1.23$ 而不是 $D=1$

经验观测值 $D=1.23$ 与傅尼埃和霍伊尔的理论值 $D=1$ 之间的不符合，提出了一个重要的课题。皮布尔斯于 1974 年用相对论来讨论它。Peebles 1980 在物理学和统计学（但不是几何学）上对此课题作了充分的研究。

天空的分维

天空是宇宙的投影，宇宙中的每一点首先用球坐标 ρ,θ 和 φ 来描述，然后就用球面坐标为 $1,\theta$ 和 φ 的点来代替，当宇宙是维数 D 的分形，而且参考系的原点也属于宇宙（见第 22 章）时，此投影

的结构就是“典型地”由下列两者之一所支配：当 $D>2$ 推出投影覆盖了天空的一个非零部分，而 $D<2$ 推出投影就是维数 D 本身。◁就像在图 9-1 和图 9-2 所表明的，典型图容许由于分形结构和/或原点选择而引起例外，它常常意味着“真理具有概率 1”。▶

明亮天空效应的旁白（错误地称为奥尔勃斯佯谬）

前节的法则直接影响到推动各种作者（包括傅尼埃）对分形宇宙作变种。他们认为这种宇宙在几何上“驱除”了明亮天空效应，通常（其实是错误的）称为奥尔勃斯佯谬。在天体物的分布是均匀的（意即对所有尺度有 $D=3$）假设下，在太阳圆盘的光线下，不论白天或黑夜，天空都是接近均匀地照亮的。

这个佯谬对物理学家不再感兴趣，因为相对论和宇宙膨胀理论，以及其他论点已使它失去意义。但是它的终止却留下了一个特别的副产品：大多数评论员呼吁，他们所喜爱的明亮天空效应的解释是对忽略群聚性的一种解释，甚至是为了否定它的真实性的一种论点。这是一种真正奇特的观点：即使星系不需要群聚以避免明亮天空效应，但它们是群聚的，这些特征要作仔细研究。此外，就像在第 32 章所见到的，宇宙膨胀不仅与标准的均匀性相一致，而且也与分形均匀性相一致。

明亮天空论点本身是很简单的。当一颗星射出的光线正比于它的表面积，而到达距离为 R 的观察者的光线总数正比于 $1/R^2$，然而星的可见表面本身也与 $1/R^2$ 成正比。因此，光线与球面角的表观比例与 R 无关。还有，当星在宇宙中的分布是均匀时，几乎对天空中任一方向，某些星迟早会相交。因此，天空是均匀地亮着的而且似乎在闪耀的（月亮的圆盘，至少在没有大气扩散的情形下，能够形成一种例外的黑暗区域）。

换句话说，宇宙是 $D<2$ 的分形的假设解决了佯谬，在这种情形，宇宙在天空的投影是具有同样 D 的分形，因此是一个零面积的集。即使星星具有非零半径，大部分方向到无穷远也没有遇到

任何的星，沿着这些方向夜间的天空是黑的，当 $D<3$ 的范围继而 $D=3$ 的范围，天空的背景不是严格地黑的而是极端暗淡地亮着。

明亮天空效应在伽利略的星座通信中宇宙是无界的概念得到了赞扬后不久，就引起了开普勒的注意，在1610年的与星座通信的对话一书中，开普勒重又插入："你可毫不犹豫地宣布存在的可见星超过10,000个……如果这是真的，以及如果【这些星有】与我们太阳同样的性质，这些太阳集合在一起，在光亮度上为什么不大大超过我们的太阳呢？……然而是否介入以太使它们模糊了？一点也不是这样……十分清楚……我们的世界不属于毫无区别的无数其他物质中的一群。"(Rosen 1965，第34～35页。)

这个结论仍然有争论，但在1720年哈雷评论时没有忘记把这个论点作为证据，其中写道："我已经听到另外的论点坚决主张，如果固定星的数目多于有限个，则它们的可见球的整个表面能够发光"，以后，该结论由德赛西克斯和兰伯特讨论过，但其结果要归功于高斯的好朋友奥尔勃斯。这专门名词"奥尔勃斯佯谬"与他相联系是一种诽谤但也是一种征兆。已被丢进"未分类的残留物"(第39页)的观察成为十分重要，通常不会归功于第一个用一张可分类的包果纸暂时地把它们装饰起来的。有关历史的讨论可见文献 Gamow 1954，Munitz 1957，North 1965，Dickson 1968，Wilson 1965，Jaki 1969，Clayton 1975，以及 Harrison 1981。

牛顿引力的旁白

本特利不断以与明亮天空效应密切相关的观测来纠缠牛顿：如果星星的分布是均匀的，施于它们之中每一颗星上的力是无限的，我们就可进而说它们的引力势是无限的。对于大 R 有 $M(R) \propto R^D$ 的任何分布都要产生无限势，除非 $D<1$。这种势的现代理论(弗罗斯特曼理论)证实了在牛顿引力和值 $D=1$ 之间存在一种特许的联系，傅尼埃和霍伊尔导出 $D=1$ 不能不涉及这种联系。◁傅尼埃的论点"表面引力势总是相同的"是现代势能理论的核

心。▶

相对论的旁白

◁为 de Vaucouleurs 1970 释义:“相对论使我们相信在光学上能观察到,没有任何半径 R 小于施瓦兹查德极限 $R_M = 2GM/c^2$ 的定常材料的球,其中 c 是光速。由各种宇宙系统的平均密度 ρ 和特征半径 R 所作的图上,$\rho_M = 3c^2/8\pi GR_M^2$ 确定为上限。比例 ρ/ρ_M 可称为施瓦兹查德填充因子,对于最普通的天体物(星)或系统(星系),其填充因子非常小,是 $10^{-4} \sim 10^{-6}$ 量级。”傅尼埃假设的速度平方之比为 $(300)^{-2} \sim 10^{-5}$,恰好在上述范围之中。▶

一种粘合状的分形宇宙?

许多作者认为可以用上升级联(即把极大地分散的尘埃微粒粘合成为日益变大的块)而不是霍伊尔的下降级联(即把非常大而分散的质量碎裂成为日益变小的块)来解释星体和其他天体物的起源。

在第 10 章湍流研究中,也提出了类似的另一个与级联有关的假设。理查森的级联下降到越来越小的涡旋,但上升级联也可以存在:见第 40 章的**理查森**。因此可以期望在下降与上升级联之间的相互关系不久就可澄清。

分形望远镜阵

作为这一讨论的结束,没有比对用于观测星系的工具作注解更合适的了。Dyson 1977 提出,用小望远镜阵代替一片望远镜是有利的。每一个小望远镜的直径大约是 0.1m(等于光学上有效大气扰动最小的斑点大小),它们的中心形成分形分层图样,并把它们与居里干涉仪相连接。初步分析导致这样的结论:对合适的维

数值应是 2/3。戴森的结论是："一个 3 千米的阵，它是用 1,023 个干涉仪相联的 1,024 个分米望远镜组成，这在当今是个不现实的计划。作为一个理论上的想法，要证明什么是原则上能够做到的。"

星系群集的随机分形模型评述

如果我们容许星系分布在实用上由未知的分形模型(它是微妙而可变的)来描述，我们不会因为已知的分形随机模型提供了更加有效的描述而感到惊奇。首先，我们对霍伊尔凝结的了解作了改进，此时它被置于合适的形式中：随机分形(第 23 章)。我认为最有意义的是由我提出并在第 32 章至第 35 章讨论的随机模型，详细考察几个模型的理由之一是，描述性质的改善是以增加复杂性"为代价"的。第二个理由是每个模型里都包含一个值得注意的分形尘埃。让我在此评述一下这些模型(不按逻辑顺序)。

在 1965 年前后，我试图用一种不存在"宇宙中心"的模型来导出关系式 $M(k) \propto R^D$ 而 $D<3$。我用第 32 章的随机走动模型首先达到了这个目标。然后，我又提出了另一个孔洞模型，就是从空间割出的、相互独立的、且随机放置的半径为随机的孔洞所组成，其中随机半径变化的上界限 L 可以是有限也可以是无穷。

因为这两种模型仅被选作形式上简化的基础，因此当发现它们具有预期的价值时是十分惊奇而又令人高兴的。我的理论相关函数(Mandelbrot 1975m)与(Peebles 1980)(第 243 ~ 249 页)提出的曲线拟合相一致。◁更精确地说，我的两个方法与 2 点相关是一致的，我的随机走动产生了很好的 3 点相关和较差的 4 点相关，而我的球状孔洞模型对一切已知的相关函数都是非常好的。▶

不幸的是，不论哪一个模型，所产生的样本都显示出相当的不实际。因为它们具有一种难以接受的腔隙性质。用到的这个腔隙概念是我为了这个非常目的提出的，并在第 35 章加以描述。对孔洞模型的这个缺点由于引入了更加精细的孔洞形状而纠正了。对随机走动模型，我使用了较少腔隙的"从属运算器"。

这样，星系群集的研究极大地刺激了分形几何的发展。而现今在星系群集的研究中应用分形几何已经远远超出了在本章中所完成的使之简化和普及的任务。

星星就像开采金刚石

未加工的金刚石在地球外壳内的分布类似于星星和星系在天空中的分布。考察一张很大的世界地图，用一根针来表示每一个拥有金刚石矿或金刚石的地区（不论过去或现在），则从远处考察这些针的密度是非常不均匀的，有几根孤立地分散在各处，而大多数都集中在几个侥幸的（或不幸的）地区。然而在这些地区的地面金刚石并不是均匀埋藏的。再从较近处考察该地图。发现任意一个这种区域中的金刚石除了大量集中在几处分散的子区域外，几乎全是空白的。这种过程可继续好几个数量级。

在这种情况下注入凝固不是无可争辩的吗？的确，不知名的分形模型已由德魏斯向前发展了。见第 39 章的“无空隙分形”。 ▬

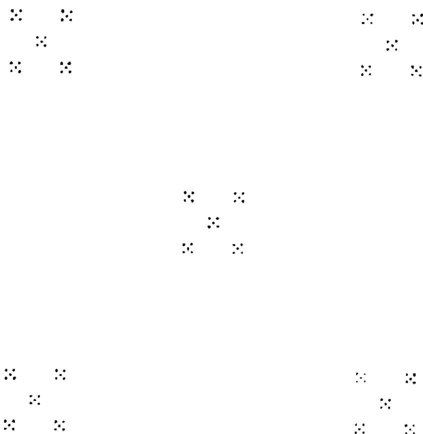


图 9-1　傅尼埃多重宇宙的投影（维数 $D \approx 0.8270$）

本图表明了正文中所描述的维数 $D=1$ 的一个宇宙的投影和“赤道”截

面的尺度。也可见图 9-2。

在 Fournier 1907 中对此标题作了解释:"由交叉形或正八角形原理构造的多重宇宙并不是世界的设计图,但它可用来阐明由相似的相继宇宙的无限系列可以存在而不产生'明亮天空'。世界球中的物质正比于它的半径。这是为满足引力定律和辐射所需要的条件。在天空的某些方向会呈现得相当黑,虽然存在无限个宇宙的后继者。在这种情形里的'世界之比'是 $N=7$,以代替实际上的 10^{22}。"

在第 34 章所描述的意义下,$D=1$ 和 $N=10^{22}$ 的宇宙之间除了惊人地分层外,只有很低的腔隙度。

图 9-2 一个扁平的 $D=1$ 的傅尼埃宇宙

图 9-1 是按照精确比例画出的,不仅难以印制和看清,而且潜伏着迷惑性。的确,它不是维数为 1 的宇宙,而是它的平面投影,其维数为 $D=\log 5/\log 7\approx 0.8270<1$。因此,为了避免留下错误的印象,我赶快展示出一个规则而类似于傅尼埃的平面图象,它的维数 $D=1$。这种包含以 $1/r=5$ 代替 $1/r=7$ 的构造比图 9-1 所可能的构造前进了一步。

第 10 章　湍流的几何学;间歇性

湍流的研究是物理学中最古老,最艰难又是最易受挫的一个篇章。

日常经验足以表明,在某些情况下气体或流体的流动是很平稳的,在学术上称为“层流”,而在另外的情况就是完全不平稳的。但分界线在哪里呢? 术语“湍流”能标志包括大部分气象学和海洋学在内的所有非光滑流吗? 还是为了一种很狭的学科而保留它? 如果是这样,那么又是哪一种呢? 每个学者似乎都很难回答这些问题。

对以上问题的不同回答在此并不重要,因为我们集中研究毫无疑问是混乱的流动,它的最大明显特征在于没有一个完全确定的长度尺度:它们都涉及与一切大小的“涡旋”共存。这种特性在达·芬奇和北斋的绘画中已有所认识。这种描述阐明,从集中研究具有完全确定尺度现象的“老”物理学精神来看,湍流必定是外来的,而正是这样的原因使我们对湍流直接发生了兴趣。

就像许多读者所知道的,实际上关于湍流的所有研究都集中于流体流动的解析研究,而把几何学搁之一边。我常想这种倾斜并不能理解为它不重要。事实上,湍流中的许多几何形状容易看到或察觉,迫切需要一种恰当的描述。但是在分形几何建立以前一直认为不值得注意它们。的确,正如我马上猜测的,湍流包括了许多分形的侧面,在本章和以后几章里就将讨论其中的一些内容。

有必要放弃两个问题。首先,我们不考虑在层流中怎样开始产生湍流的问题。有充足的理由可以相信这种湍流的开始有着极其重要的分形样式,但它们还没有被弄清到足以在这里讨论。其次,我们也不在这里涉及例如贝纳德胞和卡门街之类的周期性结构。

本章更多地是从几何上研究湍流和应用分形作解释开始。这些解释很多但每一个都很简短,因为其中包含了一些至今还是很难的结果。

以后我们集中研究那些实际上由我研究过的间歇性问题。我最重要的结论是耗散区域,即湍流耗散集中于其上的一个集合,可是用分形作为模型。为不同目的所作的测量暗示该区域的维数 D 位于 2.5 至 2.6 附近,大概低于 2.66。

不幸的是,直至确定耗散区域的拓扑维数以前,不能精确地点明此模型。特别地,它是尘埃,还是波状的分支曲线(涡管),或者是波状的成层曲面(涡面)? 这第一种猜测是不可能的,而第二和第三种提出的模型与第 14 章的树枝状分形模型很相近。但是我们处于无法决定的状态。新的分形前沿上的进展对老的拓扑前沿全然没有帮助。我们的拓扑几何学知识的确仍然是原始的。

本章的大部分内容都不需要专门知识。◁但专家将会看到湍流分析的分形部分是相关性和谱的解析分析的几何对应物。在湍流和概率论之间的关系式是老生常谈。的确,G. I. 泰勒早期工作对诺伯特·维纳创建随机过程的数学理论产生了继佩琳的布朗运动之后又一个重要的影响。谱分析早已"偿还"(附带利息)它从湍流研究所借的。而现在是湍流理论来利用复杂的随机几何研究成果的时候了,特别,柯尔莫哥罗夫谱具有在第 30 章中确定的几何对应物。

云,航迹,射流等等

湍流几何学的问题通常要涉及到一些区域边界的形状,在这种区域里带有某些流动的特性。著名的例子是巨浪般的飘动,在普通的(水)云以及受到火山爆发影响的云和核爆炸蘑菇云中都能发现,在本书的范围内,的确难于逃脱这种影响,就是在具有标度范围的限度内一片云能被看成有完全确定的边界,则云的边界必定是分形曲面。同样的陈述可应用到在雷达屏幕上见到的暴风雨

的图样(这部分内容的首次证实,可见第12章)。

但是我更愿意对较简单的形状作处理。湍流也可以限制于非层流的一段,例如一道航迹或一道射流。在最粗糙的近似下它们都可看成一根杆。然而,如果考察其边界上的细节,则可显示出锯齿状的层次,它的深度随着水力学尺度的经典测度值(称为雷诺数)而增加。这个非常明显和复杂的"局部"结构没有使一根杆像一条绳那样有许多松散地连着的浮于四周的线股,它的典型横截面并不完全是圆周,而是接近于科赫曲线的形状,甚至是接近于在第5章研究的最凹凸不平的岛屿海岸线。不论怎样,一个射流的边界似乎是分形。当存在涡环时,它们的拓扑是有趣的,但没有耗尽结构。

下一个注释要求读者想象一幅航迹图,比如说,很像一艘管理不善的油轮上泄漏出油的形状。作为最粗糙的近似"杆"来描述,如此航迹,已具有了结构的大部分:它不完全是个圆柱,因为它的横截面变宽而迅速离开船体,而它的"轴线"也不完全是直线而呈弯曲状,它的典型尺寸也是随离船体而增加。

类似的特性也可在流动质量之间相互摩擦剪切而引起的湍流中发现,可见文献 Browand 1966 和 Brown & Roshko 1974。所产生的粘合结构("动物")在当今已引起了极大的注意。分形没有涉及它们的总体形状,但我认为下面一点是完全清楚的,"骑"在弯曲物上的优美的分层特性明显是分形结构。

土星上著名的红斑也属于这一类的例子。

当研究戈尔夫流时引起了与此有关但不同的问题。它并不是一种单个的完全确定的海洋流而分为多个波状分支,而这些分支自己又再分为树枝状的。这种分支习性的全面而详细的说明是有用的,它肯定包含有分形。

等温,耗散等等

类似地,研究等温面或在流动中任何其他标度特征的等值面

也是有意义的。所谓等温面,可描述为曲面周围有着激增的浮游生物,它们只能在温度 $T>45°$ 的水中生存而且充满于体积中一切可到达的地方。如此一团的边界是极端地复杂;在第 30 章的专门模型里可论证为分形。

当介质里完全由湍流所充满时,就要出现一类广泛的几何问题,但部分可记上"被动的"或不活跃的特征而不影响其流动。最好的例子是一滴颜色受扰动后的弥散,各个分支向一切方向无尽头地散射开去,但现存的分析方法和标准几何学对于描述所产生的形状都无能为力。图 6-18 和文献 Mandelbrot 1976 c 认为这些形状必定是分形。

其他的几何问题

清净空气扰动 我考察了扩散的证据,认为带有这种现象的集合是一个分形。

流过分形边界 这是另一个典型的实例,其中的流体力学必然包含分形(图 6-7 和图 7-16)。

涡的延伸 流体的运动推动旋涡延伸,而一个延伸的旋涡必需折叠才能在一个固定体积之内容纳其增加的长度。就流动是标度性的意义上说,我猜想涡流趋于分形。

一个流体质点的轨迹 在粗糙近似下,由于受到行星运动模型的启发,设质点始终由单位速度的流动垂直地传送,而此流动受到旋涡层(其每一个都是水平面中的圆运动)的扰动,其合成函数 $x(t)-x(0)$ 和 $y(t)-y(0)$ 是余弦和正弦函数之和。当高频项很弱时,此轨迹是连续且可微的,因此它是可度长的而 $D=1$。然而,当高频项很强并连续下降到 0,其轨迹就是 $D>1$ 的分形。假定旋涡是自相似的,就说轨迹的发生等同于数学分析中著名的反例:外尔斯特拉斯函数(第 2、39 章和第 41 章)。这就导致我去猜测所有扰动流的传递是否都能与轨迹是分形的环境相联系。

湍流的间歇性

湍流到最终因耗散而结束：由于流动的粘性，宏观运动的能量转变为热量。早期的理论认为耗散在空间是均匀的，但是这种“均匀性湍流”的直觉模型由于 Landau & Lifshiz 1953～1959 而破灭，因为他们指出某些区域是高耗散的，而另一些区域相比之下几乎没有耗散。这就意味着熟知的突如其来的狂风特性在较小的尺度上也有所反应(以更加一致的形式)。

这种间歇性现象首先在 Batchelor & Townsend 1949 第 253 页中研究，也可见 Batchelor 1953 中 8.3 节和 Momin & Taglom 1963，1971，1975。当雷诺数很大时，间歇性就特别明显，这就意味着湍流的外界限相对于内界限说来是大的：在星星，海洋和大气中就是如此。

对耗散集中的区域可方便地作为输送或支撑描述。

本书把湍流的间歇性和星系的分布放在一起是很自然的而并不是新的。不久以前，物理学家们(von Weizächer 1950)企图用湍流来解释星系的起源，承认均匀湍流不能作为星体间歇性的原因，冯韦兹赛克尔按照傅尼埃(“沙利耶”)模型(第 9 章)作了修正，就是现在提出的理论。如果再次采纳冯韦兹赛克尔的统一尝试，他们就可以在两类间歇性和相应的自相似分形之间建立一种物理的联系。

此种统一尝试的一个目的，是表明星系分布的维数(我们已知 $D \approx 1.23$)应与包含有湍流的维数(注意到它位于 2.5～2.7 附近)有关。

湍流的定义

我们注意到，好像很奇怪，同一个术语湍流(*turbulence*)可应用于几种不同的现象。这种保留至今的定义的贫乏性很容易理解，

因为我的主张和建议表明，一种合适的定义需要用到分形。

湍流的概念在通常人的脑海里几乎被“冻结”在专门术语里，大约在一百年以前首先由雷诺在管道流动中把它“解冻”：当向上流动的压力很弱时，流体运动是规则而“成层”的，但当压力充分大时，突然一切都变得不规则了。在这个模型实例中，湍流耗散的支撑不是“空的”（即不存在）就是整个管道。在其他实例里不仅没有几何性可研究，而且也没有定义湍流的迫切原因。

在航迹的情形就要复杂得多。在湍流区和围绕它的海洋之间存在着边界，我们必须研究它的几何性。然而这种边界仍然是很清楚的，对这样的一个“客观”标准实际上没有必要来定义湍流。

在缠绕管道里充分发展的湍流，事情仍然很简单，出现的湍流的总体情况就与雷诺管里的相同。然而，如果我们相信某些曲折的故事，则达到这一目标的过程有时就很有趣。据说，首次“告吹”的缠绕管道用湍流研究是不合适的。决不是整个体积里都充满了湍流，湍流本身似乎是在不规则的阵风里出现的“混乱”。只要逐渐努力处理使总体平稳下来，以后的样子就像雷诺管了。由于这样的事实，对于把在缠绕管道的非间歇性“实验室湍流”推广为看作在大气中间歇的“自然湍流”一样有相同的物理现象，我是很怀疑的。

从什么是湍流这个不确切概念出发，并考察点速度的一维记录，我们间接地着手上述的工作。以一架大飞机重心的运动来说明这种记录的粗略分析。每次都是如此，飞机的抖动显示了那里的某个区域是强耗散的。一个小的飞机起着一个更加敏感的探测器的作用：它能“感觉到”大飞机没有扰动到的湍流阵风，而对于大飞机受到的每个冲击，小飞机的感受只是一闪而过的弱冲击。因此，当详细地考察强横截的耗散片时，就可以看到层流垫片。在更加精细的分析中又可发现更小的垫片。

每个阶段都要求重新定义什么是湍流。记录的湍流瞬间的概念是有意义的，如果把它解释为“记录瞬时并不是完全没有湍流”。另一方面，更加需要的概念，记录的全部湍流瞬间似乎没有观察意

义。进行连续阶段分析，总记录长度的少许增长，湍流会产生一个大的跃变。耗散支撑体积似乎在减少。我们下面的任务是对此支撑建立模型。

自相似分形的作用

如前所述，不必惊奇，按照我的观点，只有非常少的几个湍流的几何形状已被实际研究过，因为仅有的合适的方法都是欧几里得的。为了跳出它们的圈子，使用了许多欧几里得以前的术语，例如，讨论间歇性的论文造了些不常用的术语，例如不稳定(*spotty*)和多块状(*lumpy*)以及 Batchelor & Townsend 1949 中想象的"形状只有四种类型：滴状、杆状、枝状和带状"。某些讲演者(但作者很少)，也使用术语豆、面条和青菜，一个想象的术语并不企图隐藏基础几何学的不足。

与此相反，自 1964 年以来我进行了研究并于 1966 年东京专题学术讨论会上(Mandelbrot 1967 k)第一次提出了通过发展自相似分形可以增扩经典几何的工具箱。

拥护使用分形是根本性的新步骤，但是把湍流分形限制为自相似是传统的思想，因为首先想到用于描述湍流的就是自相似概念，先驱者是在第 5 章已读到过的刘易斯·弗莱·理查森。Richardson 1926 引进了与级联相联系的尾流分层的概念(见第 40 章)。

在 1941 年和 1948 年之间，级联理论和自相似理论获得了所预言的成就。这也是湍流研究的转机。主要贡献者是柯尔莫哥洛夫、奥布霍夫、翁萨格和冯韦赛克尔，而习惯上认为是由柯尔莫哥洛夫在这段时期里发展的。然而，在理查森和柯尔莫哥洛夫之间有一些微妙的变化。

虽然自相似是从研究直观上可觉察到的尾流中提出来的，但柯尔莫哥洛夫理论是纯分析的。另一方面，分形却可能把自相似方法应用于湍流几何。

分形的研究应该不同于具体的事实，以前涉及的四种选择(如

滴、杆、枝和带)没有自相似,这就是为什么 Kuo & Corrsin 1972 中承认这种选择是“原始的”,而我们需要的是介于中间的图样。

我们的头脑里由若干特别的变化而成为标准的图样是可能的。例如,我们可以把杆子撕裂为周围带有松散而多股的绳子(还记得这是尾流或射流的模拟状态),以及把板切为周围带有松散层次的薄片。而这些细线和层可以用某种方法做成自相似的。

然而,自相似的特别纳入却永不能做到,我发现这既是无希望完成,又是很乏味的。我喜欢的是完全不同的步骤,允许所有的形状和线股与层片的细部都由同样的过程产生。因为基本的自相似分形还没有特定的方向,我们的研究(现在)放在一切有兴趣的几何问题一面,即湍流与全部强运动组合在一起。

◁Obukhov 1962 和 Kolmogorov 1962 首先对间歇性作了分析研究。在此直接影响下,几乎与 1941 年同样作者的文章相匹配,但它们是有严重缺陷的,所以他们长期影响下去的希望不大。见 Mandelbrot 1972 j,1974 f,1976 c;Kraichnan 1974。▶

内界限和外界限

由于粘性,湍流的内界限是正的,而尾流、射流和类似的流动明显地显出一个有限的外界限 Ω。但是广泛流行的相信 Ω 的有限性应该经受批评。Richardson 1926 中提出,“观察表明,数值(对于 Ω 大小的样本假定为收敛的)完全依赖于在平均意义下要包括多长一个体积。迪方特的研究表明,大气层内部没有得到任何极限”。气象学家们低估了,然后又忘了这个结论,我认为是太过急躁。在第 11 章的新材料和第 34 章中对腔隙的研究,都使我更加坚信事情还没有结束。

凝固和分形状的均匀湍流

在一个粗糙的初级阶段,我们可由前章通过凝固求得的一种

自相似分形来表示湍流的支撑。凝固是第 23 章中诺维可夫(Novikov)和斯图尔特(Stewart)模型的粗糙的“去–随机化”形式。在进行有限凝固级联 m 阶段以后,耗散均匀地分布在出自 r^{-3m} 的 $N=r^{-3D}$ 个第 m 级非重叠的子旋涡上(它的位置由发生器所决定)。以后级联无穷尽地继续下去,而耗散的极限分布均匀地散布在一个 $D<3$ 的分形上。我建议把此极限称为分形状的均匀湍流。

对 $D\to 3$,就得到 G. I. 泰勒的均匀湍流。明显的事实是凝固并不排除 $D=3$,但是它容许新的可能性 $D<3$。

直接的实验证明间歇性满足 $D>2$

从线性截面的观点看来,很大一类无界分形的性态是非常简单的:当 $D<2$ 时,截面几乎肯定是空的;而当 $D>2$ 时,其截面是非空的且具有正概率。(第 23 章对一类简单的分形证明了此结果。)

假定支撑湍流耗散的集合满足 $D<2$,则由前述就会推出几乎所有的实验探头都将落在湍流区之间,但事实并非如此,这就暗示了实际上是 $D>2$。这个结论是非常强的,因为它依赖于一个不断重复的实验,而此实验的可能结果可归结为“永不”和“常常”之一。

试验的拓扑对应物 $D_T>2$ 是很有吸引力的(见 Mandelbrot 1976 o),然而太专门了,不宜在此详述。

星系与湍流的比较

对于支撑湍流耗散的集合有不等式 $D>2$,而第 9 章中对于宇宙的质量分布有相反的不等式 $D<2$。这与下面的原因密切相关,即 $D-2$ 的符号影响到一个分形的典型截面以及它在平面或空间的典型投影。对于本章所研究的现象,其截面必须是非空的。与此相反,在第 9 章里如果从地球画出的大部分直线永不遇到星,则

明亮天空效应是“驱过邪的”，这就要求星在天空上的投影是零面积的。

在这两个问题里 $D-2$ 的符号之差别，必定与它们结构之间的差别有着重要的关系。

指数之间的(不)等式(Mandelbrot 1967 k, 1976 o)

分形状均匀湍流的许多有用特性仅依赖于 D。该课题已在 Mandelbrot 1976 o 中研究，其中间歇湍流的特征为一系列由等式(或不等式)相联系的、概念上有所不同的指数所刻画。◁这种状态与临界点现象相仿。▶

谱(不)等式 在 Mandelbrot 1967 k 中首先建立的(不)等式(书中应用记号 $\theta=D-2$)通常借助于湍流速度的谱来表达，但这里却借助于方差。在分形均匀湍流里，在 x 点的速度 v 满足

$$\langle[v(x)-v(x+r)]^2\rangle=|r|^{2/3+B},$$

其中 $B=(3-D)/3$。

在泰勒均匀湍流里，$D=3$ 而 B 为 0，留下经典的柯尔莫哥罗夫指数 2/3，我们还将在第 30 章中再次见到。

Mandelbrot 1976 o 还证明了更为一般的加权凝固模型，正如 Mandelbrot 1974 f 中描述的那样，包含有不等式 $B\leqslant(3-D)/3$。

β 模型 在 Frisch, Nelkin & Sulem 1978 中，把伪动力学词汇嫁接到分形状均匀湍流的几何学上，就像 Mandelbrot 1976 o 中所描述的。已经证明，这种解释是有帮助的，但其数学论证和结论完全与我的相同。他们在解释中用的术语“β 模型”已经有些流行，并且它常常等同于分形均匀性。

湍流的拓扑学仍然是一个未解决的课题

前面几章已经讲得十分清楚，相同的 D 值能在拓扑连通性不同的集合中出现。拓扑维数 D_T 给出了分维 D 的下界限，但这个

界限经常大大低于下确界，以致没有什么用处。一个分维 D 在 2 与 3 之间的形状可以是“片状的”、“直线状的”或“尘埃状的”，它们的构形多种多样，很难确认它们，或给它们全都找到名称。例如，当分形形状几乎极像绳子，但“绳股”是如此地多，以致事实上比绳还更像绳。类似地，接近于片状的分形是“更”像片状的。还有，也可能是片状和绳样任意地混合的形状。在直观上，我们可以期望在分维和连通度之间应该存在某些更密切的关系式，但这在 1875 年至 1925 年期间却使数学家们失望。在第 23 章我们将转到这类专门问题，可以这样说，在这些结构间的真实松散关系，实质上是一个未被探索的领域。

在第 14 章中提出的树枝状问题也是很重要的，然而它对湍流研究的影响也未被探索过。

峰态不等式　在 Corrsin 1962，Tennekes 1968 和 Saffman 1968 中，用一个称为峰态的间歇性测度来处理连通性问题。在表面上，这些模型研究的形状属于平面（片）或直线（棒）的拓扑维数。然而，它们通过在峰态和雷诺数之间一个预测的幂次规律关系式的指数来间接地检验此拓扑。不幸的是，这个尝试失败了，因为峰态指数事实上是受各种附加假设所支配的，而最后仅仅依赖于此模型产生的形状的分维 D。在 Corrsin 1962 中，预言 D 值等于它假设的拓扑维数 $D_T = 2$。这个预言是错误的，因为实际材料含有分形，而该模型却没有。另一方面，在 Tennekes 1968 中假设 $D_T = 1$ 却得到了分数值 $D = 2.6$，因此它包含有近似的分形。无论如何，企图从峰态推断出直观“形状”和拓扑维数间的联系是没有根据的。

■

第 11 章　微分方程的分形奇性

本章首次讨论大自然的分形几何与数学物理主流之间的联系。它是如此重要，以致值得单独设章。兴趣在其他方面的读者也应循序一读。

湍流理论的分裂

当前湍流理论研究的主要缺点，是它被至少分割为互不联系的两部分。一部分包含 Kolmogorov 1941 提出的成功的现象学（将在第 30 章中作极详细的考察），而另一部分包含水动力学的微分方程，即由欧拉对非粘性流体和纳维（和斯托克斯）对粘性流体作出的方程。这两部分间仍然没有关系：如果“阐明”和“理解”意味着“简化基本方程”，则柯尔莫哥洛夫理论至今没有被阐明或理解。因此柯尔莫哥洛夫对解流体运动方程没有帮助。

在第 10 章里，我断言湍流耗散并非在整个空间都是均匀的，而只在一个分形子集上均匀，粗看起来似乎间隙更大了，但是我坚决主张情况正是与此相反。对我有利的情况正在明显增加。

奇性的重要性

让我们回顾一下成功地求解一个数学物理方程的手段。通常，先要拟一张表，把在特定条件下求解方程得到的解，与在物理观测的基础上所猜测的解相结合。然后，略去解的细节，我们就得到一张表征该问题基本“奇性”的特征表。此后，对更复杂的方程例子，常常能够用第一级近似求解，即确认合适的奇性，并把它们按要求联合在一起求解。这就是微积分的学生如何画有理函数图

象的方法。当然,标准的奇性是标准的欧几里得集合:点,曲线和曲面。

猜测:流体运动的奇性是分形集合(Mandelbrot 1976 c)

在这个展望中,我把从欧拉和纳维-斯托克斯方程的解来导出湍流所感受到的困难看作是我们没有标准奇性来说明直观上理解的湍流特性。

我主张替换为(Mandelbrot 1976 c)基本方程的湍流解包含有完全新一类型的奇性或"近乎奇性"。此奇性就是局部标度的分形集,近乎奇性就是近似的上述集合。

形成上述论点的一个普通原因是标准集已被证明是不合适的,我们可以用更好的已知集合作同样的试验,但是还可能有更特殊的原因。

非粘性(欧拉)流体

第一个特别猜测 我的论点之一,是欧拉方程解的奇性是分形集合。

原动力 上述论点的信念依赖于一个古老的概念,即存在于方程中的对称性和其他不变性"必定"要反应到方程的解之中(对于一种自成系统的、仔细而生动的描述,可见 Birkhoff 1960 中的第Ⅳ章)。当然,保持对称性决不是大自然的普遍原理,因此我们不能排除在此有"破坏对称性"的可能。然而,我提议可以来试一试保持对称性的结论。因为欧拉方程是无标度的,所以方程的典型解也应是无标度的,而且它们可能有的任何奇性也应同样是无标度的。如果这些努力都失败,则可以证明其奇性就不是标准的点、线或曲面,它们一定是分形。

当然也可能发生这种情况,标度是由于边界的形状和初始速度所强加的。然而,很可能解的局部性质受到"对边界无感觉的原

理"支配,因此解是局部无标度的。

亚历山大·肖兰的工作 Chorin 1981 为我的论点提供了强有力的支持,他把涡流的方法应用于分析充分发展的湍流的惯性范围。他发现高度拉伸的涡旋将它本身聚集到一个体积不断减小以及维数 $D\approx2.5$(与第 10 章的结论相容)的物体内部。对柯尔莫哥洛夫指数的修正 $B=0.17\pm0.03$ 是符合实验数据的。计算表明,三维欧拉方程的解在有限时间内要毁掉。

未发表的肖兰的工作更接近于实验数据:$2.5<D<2.6$。

粘性(纳维-斯托克斯)流体

第 2 个特别猜测 此外,我主张纳维-斯托克斯方程解的奇性只能是分形。

维数不等式 而且,我们有一种直观的感觉,即纳维-斯托克斯方程的解必定是较为光滑的,因此比欧拉方程解的奇性要少。所以进一步猜测在欧拉情形中的维数要大于纳维-斯托克斯情形。通向无粘性的道路无疑是奇性的。

近乎奇性 我全部论点实施中的最后一个猜测,涉及到耗散的峰包含于间歇性概念中:它们是由于粘性而变光滑的欧拉奇性。

V. 谢弗的工作 在粘性情形下对我猜测的考察是由 V. 谢弗倡导而最近又有其他人加入的研究,即在这种观点下研究受纳维-斯托克斯方程($t=0$ 时具有有限的动能)支配的有限或无限流体运动。

假定奇性确实存在,Scheffer 1976 中证明了它们必定满足下述定理。首先,它们在整个时间轴上的投影最多具有分维 1/2。其次,它们在空间坐标上的投影最多是维数等于 1 的分形。

事实上,结果是上面的第一个结论是对一篇陈旧但很有名的论文(Leray, 1934)的注释所作的推论,勒雷在一个形式不等式(谢弗的第一定理是它的一个推论)后面的注释突然停住,实际上仅仅是一种重新叙述。但是说成"仅仅"是公正的吗? 用更加优美的术

语来重新叙述一个结果(为了传播的缘故)极少被看成科学上的进展,但我认为现在的情况是不同的。勒雷定理中的不等式,在曼德布罗特-谢弗推论把它放在适当的位置之前几乎是无用的。

在最近关于纳维-斯托克斯方程研究中对豪斯多夫-伯西柯维奇维数几乎常规的使用完全可归溯于我的猜测。

物理学中其他非线性方程的奇性

对本书提出的包含标度分形的其他现象,无论欧拉方程还是纳维-斯托克斯方程,都无能为力。例如,星系分布由引力方程所支配。但是,对称性守恒的论点应用于所有的标度方程。事实上,拉普拉斯的一个模糊的注记(见第 41 章,**莱布尼兹和拉普拉斯标度变换**)现在可被看成是(几乎百分之百)为点明第 9 章的主题。

更一般地,奇性的分形特征很可能被描述为许多不同的数学物理方程所共有的一般特性。这可能是某些非常广泛的非线性类吗? 这个课题将在第 20 章中以不同的术语再次相遇。 ■

第四篇　标度分形

第 12 章　长度—面积—体积关系

第 12 章和第 13 章将通过大量微型案例的研究来拓展分维的性质，这些案例的重要性不同，难度逐渐增加。第 14 章将说明分形几何学必须涉及的概念不限于分维。

本章描述（并应用于不同的具体情况）关于欧几里得几何学中某些标准结果的分形对应物（由我发展的）。可以认为它们与第 6、8、9 章所得到的 $M(R)\propto R^D$ 形式的分形关系相平行。

标准的维数分析

根据半径为 R 的圆的圆周长度等于 $2\pi R$，而此圆周围成圆盘的面积为 πR^2 的道理，可得

$$(\text{长度})=2\pi^{1/2}(\text{面积})^{1/2}。$$

对于正方形，相应的关系是

$$(\text{长度})=4(\text{面积})^{1/2}。$$

一般地，在几何上相似但有不同线尺度的每个标准平面形状族中，比值：(长度)/(面积)$^{1/2}$是完全由共同形状所决定的一个数字。

在空间($E=3$)中，长度，(面积)$^{1/2}$和(体积)$^{1/3}$提供了形状的线尺度的各种估计，其中的任意两个量之比是与测量单位无关的形状参数。

不同线尺度的等价性在许多应用中是很有用的。再加上时间和质量的扩充就构成了一种有效的工具,即物理学家所谓的"量纲分析"。(Birkhoff 1960 是一本值得推荐的说明量纲分析的基本特点的教材。)

自相矛盾的维数结果

然而,在大量情况下,诸线性尺度之间的等价性显得令人难以理解。例如哺乳动物的大脑满足

$$(\text{体积})^{1/3} \propto (\text{面积})^{1/D},$$

$D \approx 3$,远远超过预期值 2。Hack 1957 测量了在流域中主河流的长度,并发现

$$(\text{面积})^{1/2} \propto (\text{长度})^{1/D},$$

D 肯定大于预期值 1。早年的作者对这最后一个结果的解释为,流域并非自相似的,主流瘦长而支流矮胖。遗憾的是这种解释与实际情况不符。

本章叙述我对这些情况和有关结果的一种较为令人信服的说明。我的工具是一种新的、分形的长度—面积—体积关系。

分形长度—面积关系

为了点明论据,考虑一个具有分形海岸线(维数 $D > 1$)的并在几何上相似的岛屿的集合。在此,标准比值(长度)/(面积)$^{1/2}$是无限的,但我将说明它有一个有用的分形对应物。我们把用长度为 G 的标尺测量得到的海岸线记为G-长度,并把用 G^2 作为单位测量得到的岛屿面积记为G-面积。注意到G-长度对于 G 的依赖性是非标准的,而G-面积对于 G 的依赖性是标准的,构成广义比值

$$(G\text{-长度})^{1/D}/(G\text{-面积})^{1/2}。$$

我断言这个比值对我们的几何相似岛屿均取相同的值。

其结果是,可以用两种不同方式来计算每个岛屿以 G 为单位

的线尺度：标准表达式$(G\text{-面积})^{1/2}$以及非标准的$(G\text{-长度})^{1/D}$。

新的特点在于，如果用另一标尺长度 G' 代替 G，诸线尺度之比用

$$(G'\text{-长度})^{1/D}/(G'\text{-面积})^{1/2}$$

代替，它与原先那个的差别只在于因子$(G'/G)^{1/D-1}$。

作为线尺度的比值，它对相互相似的有界图形构成的不同的族是不同的，不论它们是分形的还是标准的，都是如此。因此它定量地表征了图形形状的一个方面。

值得注意的是，长度—面积关系可以用来确定环绕标准区域的分形曲线的维数。

关系式的证明　第一步是用内在的与面积有关的标尺

$$G^* = (G\text{-面积})^{1/2}/1000$$

来测量每一条海岸线的长度。当我们把岛屿的每一个海岸线用周边长为 G^* 的多边形来近似时，这些多边形也是相互相似的，它们的长度正比于标准线尺度$(G\text{-面积})^{1/2}$。

其次，把 G^* 用所述的标尺 G 来代替。由第 6 章知道，测量长度以比值$(G/G^*)^{1-D}$改变。从而

$$\begin{aligned}(G\text{-长度}) &\propto (G\text{-面积})^{1/2}(G/G^*)^{1-D}\\ &= (G\text{-面积})^{1/2-1/2(1-D)}G^{1-D}1000^{D-1}\\ &= (G\text{-面积})^{1/2D}G^{1-D}1000^{D-1}。\end{aligned}$$

最后，对两侧作 $1/D$ 乘幂，就可得到前述结论。

密苏里河如何蜿蜒

上面的论证帮助说明了测量得到的河流长度有什么意义。为了定义流域中主流的长度，我们把河道用维数 $D>1$ 的一条波浪状自相似曲线来近似，它由称为源头的一点通向称为河口的另一点。如果所有河流以及它们的流域彼此都是相似的，那么长度—面积的分形关系意味着

(河流的 G-长度)$^{1-D}$正比于(流域的 G-面积)$^{1/2}$。

此外,常识表明

(流域的 G-面积)$^{1/2}$正比于(由源头到河口的直线距离)。

组合这两个结果,我们得到结论

(河流的 G-长度)$^{1/D}$正比于(由源头到河口的直线距离)。

前面已提到,最引人注目的是 Hack 1957 根据经验发现,比值

(河流的 G-长度)/(流域的 G-面积)$^{0.6}$

确实对于所有河流是共同的。这样就间接地算出了 $D/2=0.6$,从而 $D=1.2$,使人联想起由海岸线长度推知的数值。如果用 D 来量度不规则程度,那么河床的局部弯折与大范围内的弯曲将是同等的!

然而,对于流域面积 $>10^4$ 千米^2 和相应的很长的河流,J.E.米勒观察到 D 的数值下降为 1。D 的两个不同数值提示我们,如果把所有流域映射到同样大小的纸片上,那么短的河流与长的河流的映象几乎相同,但特别长的河流更接近于直线。非标准的自相似性有可能在外界限 Ω 处被破坏,Ω 的数值为 100 千米量级。

河流树的累积长度 上面的论述预测流域中所有河流的累积长度应正比于流域面积。有人告诉我这个预测是正确的,但我未找到参考文献。

回到几何学 对于与"雪花扫掠"曲线(图 7-16 和图 7-18)相联系的河流和堤岸,$D\approx1.6218$,稍高于观察数值。图 7-20 至图 7-23 中曲线的相应维数为 $D\approx1.1291$,低于观察数值。

图 7-2 和图 7-5 的皮亚诺曲线与之相差甚远,因为 $D=1$。

注意河流与堤岸维数的等同并非在逻辑上必须如此,而只是某种递归模型的特点。作为对照,在 Mandelbrot 1975 m 中描述过的,用箭头曲线(图 14-4)相连接的河道网,涉及维数 $D=1$ 的河流,这太小了,而堤岸的维数为 $D\approx1.5849$,又太大了。

雨和云的几何学

前面提到的分形可能用于模拟云。这种猜测现已为 Lovejoy

1982所证实，见图12–1中的分形面积–周边图。在气象学中还有很少几张图涉及在很大尺度范围内所有可能得到的数据，它们颇接近于这一条直线。

这些数据综合了在热带大西洋雨区(降雨率约为0.2毫米/小时)的雷达观察，以及跨越印度洋上空云区(=最高云层温度低于-10℃的地区)的同步卫星红外线观察。区域范围从1至大于1,000,000平方千米。至少在6个量级上拟合的周边维数为4/3。提供物理解释(这是件愉快的事情)就留待洛夫乔伊博士来进行了。

云层的最大扩展可以由中非至南印度，这个尺寸远远超过大气层的厚度，大气湍流的外界 L 与大气厚度总是十分接近的。第35页上所引理查森的说法可证明是有预见性的。

面积—体积关系·微滴的凝聚

长度—面积关系的推导很容易推广到以分形曲面为界的空间区域，并导致关系式：

$$(G\text{-面积})^{1/D} \propto (G\text{-体积})^{1/3}。$$

为了说明这个关系，考虑蒸汽凝聚成液体。这是一种众所周知的物理现象，但它的理论是近来才发展的。为了说明 Fisher 1967，下面描述的几何图画显然是由J. 弗伦克尔、W. 班德和A. 比尔在30年代后期完全独立地提出的。气体是由相互完全分离的孤立分子组成的，但其中也有偶然出现的集团，它们由引力或紧或松地结合在一起。不同尺寸的集团处于相互间统计平衡的状态中，有时相聚而有时相离，但甚至与液“滴”类似的相当大的集团也有小的出现机会。对于一个足够大的集团，(它并不过分拉长而像作为例子的一片海藻!)其表面积是相当好地确定的。集团块的表面给它以稳定性。如果温度降低，集团组合成小滴和小滴合并便是有利的，由此减少总的表面积，并从而减少总能量。如果条件合适，小滴将迅速长大。宏观水滴的出现表明凝聚开始发生。

建立在这张图画上，M. E. 费希尔认为凝聚水滴的面积与体积用等式(面积)$^{1/D}$=(体积)$^{1/3}$来联系。费希尔解析地计算了 D，而未涉及 D 的几何意义，但我们现在肯定会猜测水滴的表面是维数为 D 的分形。

哺乳类大脑的折叠

为了说明在重要的极限情况 $D=3$ 时的面积—体积关系，并同时驱除第 7 章所述皮亚诺形状的魔魇，我们用几乎充满空间的曲面来说明解剖生理学的一个著名问题。

哺乳类大脑的体积在 0.3 至 3000 毫升之间变化，小动物的大脑皮层比较光滑或完全光滑，而大动物的大脑皮层趋于目视可见的卷缠，且与动物在进化系列中的位置无关。动物学家认为，白质(由神经原形成)与灰质(神经原在此终止)之比，对于所有哺乳类都是相同的，从而为了保持这个比例，大动物的大脑皮层就必须是折叠的。知道了折叠程度纯粹是几何学问题，就使人们不至于在海豚和鲸鱼面前感到害怕：它们虽然大过我们，却没比我们更加进化。

对这种折叠的定量研究并非标准几何学所能胜任的，而应用分形几何学却十分相宜。灰色物质的体积大约等于它的厚度乘以大脑表面皮膜(称为“软膜”)的面积。如果厚度 ε 对于所有的动物都相同，那么软膜面积将不仅正比于灰色物质体积，而且也正比于白色物质体积，从而正比于总体积 V。因此，面积—体积关系将导致 $D=3$，而软膜将在 ε 的范围内充满整个空间。

经验性面积—体积关系的较好拟合式为 $A \propto V^{D/3}$，$D/3 \sim 0.91$ 至 0.93[是 Jerison(私人通信)基于伊莱亚斯和施瓦茨，布罗德曼等人的数据]。最直接的说明是软膜只是不完全地充满空间，D 的范围在 2.79 与 2.73 之间。在第 17 章总结这个题目时，将给出较深入的论证。

肺泡和细胞膜

是否有哪一位生物学家愿意站起来声称，上节并未给出有价值的结果，并未给出意料之外的见解？我很高兴能听到这样的反对意见，因为它进一步支持了第7章得以开始的论据。尽管生物学家会与数学家所装扮的皮亚诺曲面相距十万八千里，我却认为它的基本思想对该领域中的优秀理论家其实是很熟悉的。

于是，上节的主要新鲜之处在于 $D<3$ 的曲面（如我们所看到的）需要一个好的拟合。让我们来看看它们对生物学的全新用途，即它们如何帮助搞清几种活的膜的详细结构。

先用一小段来综述 Weibel 1979 中第4、3、7节。对人的肺泡面积的估计是相互矛盾的：用光学显微镜得出80平方米，而用电子显微镜得出140平方米。这种分歧有实质性意义吗？涉及的细部对空气交换并不起作用，因为它们被液体状内层光滑化了（导致作用面积更小），但它们对溶质的交换是重要的。测量（受我的文章“英国的海岸线”的启发）表明，在第一级近似下，在相当大的尺度范围内，膜的维数是 $D=2.17$。

Paumgartner & Weibel 1979 考察了活细胞中的子细胞膜。同样，过去对单位体积的面积的不同估算之间的明显差别，通过对于外线粒体膜（它缠绕着细胞，只是稍微偏离具有最小面积/体积比的膜的光滑性特征）取 $D=2.09$ 就消失了。另一方面，对于内线粒体膜，$D=2.53$，对于内质网状结构，$D=1.72$。

值得指出，许多动物的鼻骨结构具有特殊的复杂性，而使覆盖鼻骨的“皮肤”在小体积内有很大的面积。对于鹿和北极狐，这种膜可能对于嗅觉有作用，但（Schmidt-Nielsen 1981）骆驼中类似形状的作用却是为了节省宝贵的水分。

模块计算机几何学

为了进一步说明面积—体积关系，我们来看看计算机的一个方面。计算机并非自然系统，但这不应当使我们却步而止。这个和另外几个案例研究有助于说明，在最终的分析中，分形方法可以用来分析“任何”自然的或人造的“系统”，条件只是它们能被分解成以自相似模式结合起来的“各部分”，且这些部分本身的性质不如把它们组合起来的规律那样重要。

复杂的计算机回路总可以分解成许多个小模块，其中每一个都包含大量(C)元件，它们与外界用大量的(T)终端相连接。在百分之几的误差范围内，可以发现 $T^{1/D} \propto C^{1/E}$。下面即将验证写出这种指数的方式。在国际商用机器公司(IBM)中，上述规则归功于 E. 瑞特；见 Landman & Russo 1971。

最早的原始数据提示 $D/E=2/3$，这个数值就是 Keyes 1981 对神经系统(视神经和胼胝体)中的巨大“回路”的外推值。然而，比例 D/E 随着回路功能的完善而增大。而功能本身又反映了在设计中所存在的并行程度。特别地，采用极端特性的设计导致 D 的极值。在移位记录器中，模块形成了一个链，不论 C 值如何总有 $T=2$，从而 $D=0$。采用并行积分，每个元件只需要它自己的接头，$T=C$，从而 $D=E$。

为了说明 $D/E=2/3$，R.W. 凯斯注意到诸元件典型地安排在模块的体积中，而连接线则经过其表面。为了说明这种观察需要瑞特规则，得假定诸元件有大致相同的体积 V 和表面积 σ。因为 C 是模块的总体积除以 V，$C^{1/3}$约略正比于模块的半径。另一方面，T 是模块的总表面除以 σ，于是 $T^{1/2}$就约略正比于模块的半径。瑞特规则简单地表达了对一个标准空间形状的半径的两种不同度量的等价性。$E=3$ 是回路的欧几里得维数，而 $D=2$ 是标准曲面的维数。

注意到模块的概念是含糊甚至几乎是不确定的，但只要任何

模块的子模块是通过它们的表面相互连接的，瑞特规则就相当好地描述了这个特征。

解释上面提到的极端情形是容易的。在标准线性结构中 $E=1$，边界简化为两点，从而 $D=0$。在标准的平面结构中，$E=2$ 和 $D=1$。

然而，当比值 E/D 既不是 3/2，又不是 2/1，也不是 1/0 时，标准欧几里得几何学就不能把 C 解释为体积表示，也不能把 T 解释为面积表示。然而这种解释仍然是十分有用的，且在分形几何学中是容易的。在与外界用全部表面相接触的一个空间回路中，$E=3$，D 值在 2 与 3 之间。在全部边界曲线与外界接触的一个平面回路中，$E=2$，D 值在 1 与 2 之间。整数并行性情况 $D=E$ 对应于皮亚诺边界。进而，如果边界并未全部利用，那么“有效边界”可以是 D 值在 0 与 E 之间的任何曲面。

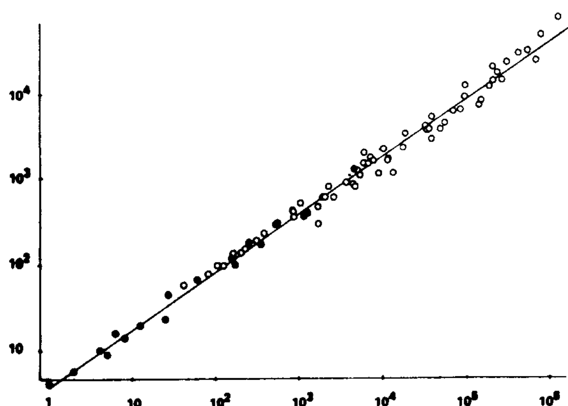


图 12-1　对云(○)和雨区(●)的 LOG(周边)相对于 LOG(面积)。取自 Lovejoy 1982

第 13 章　岛屿、群集和逾渗；直径—数量关系

本章讨论分形 σ-曲线，即可分解为无限个分离碎片的分形，每一碎片都是一条连通曲线。具体情形从群岛中诸岛屿的海岸线到一个重要的物理学问题：逾渗[①]。本章前面几节中的资料对1977 年版《分形》是新的，本章的其余部分多数也是新的。

让我们从回顾"英国海岸线有多长"这个问题开始，并寻问环绕着不列颠海岸有多少个岛屿？这个数目肯定既是很大的，又是很不确定的。随着增加的小岩石堆被作为岛屿登记入册，总的清单增长着，岛屿的总数实际上是无限的。

因为地面起伏是细微的"波状"，毫无疑问，类似于海岸线长度，岛屿的总面积在地理上也是无限的。然而被海岸线环绕的部分有完全确定的"映射面积"。诸不同岛屿如何分享总的映射面积，是一个重要的地理特征。人们甚至可以认为，这个"面积—数量关系"对地理形状的贡献，比诸海岸线形状的贡献更大。例如，如果爱琴海不包括那些希腊岛屿的海岸，那将是难以想象的。这个问题显然值得进行定量研究，本章通过推广科赫曲线来提供一种研究。

其次，本章考察通过推广熟悉的分形发生过程(或者是科赫步骤，或者是凝结)而得到的其他各种支离破碎形状。这种形状就称为*接触群集*，可以证明它们的直径—数量分布与岛屿的相同。

对充满平面的接触群集有特别的兴趣，尤其是那些为某些皮亚诺曲线所发生的群集，这些皮亚诺曲线的奇怪折线并不自相交，但具有被小心控制的自接触点。这样一来，驯服的皮亚诺怪物的

---

① 逾渗(Percolation)，过去文献都译成"渗流"。——校者注

传奇故事就被新的剧情所充实！

最后但并非最不重要，本章包括了逾渗几何学案例研究的第一部分，这是也在第14章中研究的一种十分重要的物理现象。

广义的柯尔恰克经验定律

把一个区域内的所有岛屿按其尺度大小的减少次序列成一张表。尺度大于 a 的岛屿总数记为 $Nr(A>a)$ ◁仿照概率论中的记号 $Pr(A>a)$。▶这里 a 是一个岛屿投影的面积之可能值，A 记未知数值的面积。

B 和 F' 是两个正的常数，分别称为指数和前乘因子。找到下列引人注目的面积—数量关系：

$$Nr(A>a)=F'a^{-B}$$

Korčak 1938 已接近于得到这个规则，只是他说 $B=1/2$，而我发现这是不可能的，实际数据也表明这是无根据的。事实上，B 随区域不同而变化，但总是 $>1/2$。我现在来说明上述的广义定律可与第8章中得到的康托尘埃中间隙长度的分布相对应。

科赫大陆和岛屿，以及它们不同的维数

为了构造康托间隙的科赫对应物，我把发生器分裂为不相连的部分。为了保证极限分形仍然可以被说成是海岸线，这个发生器包括了一条 $N_c<N$ 个链构成的相连折线，它连结着区间[0,1]的两个端点。这部分将称为海岸线发生器，因为它规定了原来的直海岸线怎样变换为分形海岸线。剩余的 $N-N_c$ 个链构成一个封闭回路，它“播种”了新的岛屿，并将被称为岛屿发生器。图13-1是一个例子。在下一阶段，子岛总位于海岸线发生器（由0至1）和岛屿发生器（顺时针方向）的左侧。

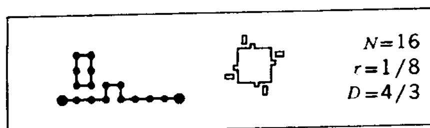


图 13-1

第一个新意是极限分形现在涉及两个不同的维数。集中所有岛屿的海岸线，$D = \log N / \log(1/r)$，但对每一岛屿的海岸线有 $D_c = \log N_c / \log(1/r)$，并有不等式

$$1 \leqslant D_c < D。$$

不相连的累加海岸线本身不是一条曲线，而是回线的一个无限和（$\sum$，西格玛）。我建议称它为西格玛回线，或简称为 σ 回线。

注意对真实岛屿观察到的 D 与 D_c 之间关系的模拟需要补充假设，除非它可以像第 29 章中那样从理论上导出。

直径—数量关系

要证明上节的岛屿有柯尔恰克定律成立，当发生器只涉及一个岛屿，且奇怪折线为自回避时最为简单（回忆起奇怪折线是近似折线）。于是第一阶段的构造产生了一个岛屿；设它的直径为 λ_0，定义为$\sqrt{a}$。第二阶段产生了 N 个直径为 $r\lambda_0$ 的岛屿，而第 m 阶段产生了 N^m 个直径为 $\lambda = r^m\lambda_0$ 的岛屿。综合起来，因为 λ 乘以 r，故 $Nr(\Lambda > \lambda)$需乘以 N。从而 Λ 的分布（对所有形为 $r^m\lambda_0$ 的 λ 值）取以下形式

$$Nr(\Lambda > \lambda) = F\lambda^{-D},$$

其中关键性的指数就是海岸线的分维！作为一个推论，有

$$Nr(A > a) = F'a^{-B}, \text{其中 } B = D/2,$$

这样我们就导出了柯尔恰克定律。对于其他 λ 值或 a 值，就有根据康托间隙长度分布（第 8 章）已知的阶梯形曲线。

这个结果不依赖于 N_c 和 D_c。它可以推广到发生器包括两个

或更多岛屿的情形。我们注意到,就整个地球来看,经验性的 B 为 0.6 左右,十分接近于由海岸线长度测量得到的 D 的一半。

推广到 $E>2$

在推广到空间的同样构造中,以下命题仍然成立,用(体积)$^{1/E}$定义的 E 维直径,由形为 $Nr(\text{体积}^{1/E}>\lambda)=F\lambda^{-D}$的双曲线表达式所支配,其中的关键指数是 D。

指数 D 也支配了 $E=1$ 的康托尘埃的特殊情况,但这里有一个重要区别。康托间隙以外的长度消失,但"科赫"岛屿以外的面积却可能存在,且一般为正。我们将在第 29 章中再回到这个问题上来。

分维可以只是支离破碎程度的一种度量

上述构造也可如图 13-2 所示的发生器。总的 D 并未改变,但海岸线 D_c 取最小的允许值 $D_c=1$。在本模型中,岛屿的海岸线是可以求长的! 如果情况是这样,那么总的 D 将不是不规则性的度量,而只是支离破碎性的度量。代替个别曲线的波折性,D 度量了矩形岛屿的一个无限族的面积—数量关系。

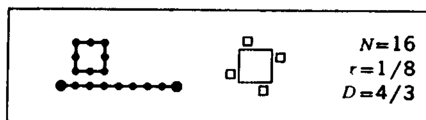


图 13-2

当用一根 ε 的标尺测量长度时,当 $\varepsilon\to0$ 时结果趋于无限,这也还是正确的,但这里有一个新的理由。长度为 ε 的标尺只能测量直径为 ε 的岛屿。然而当 $\varepsilon\to0$ 时,这种岛屿的数目增加,测量长度遵循规律 ε^{1-D},恰如无岛屿时一样。

在一般情况下，$D_c > 1$，D_c 的值只度量了不规则性，而 D 的值度量了不规则性和支离破碎性的某种组合。

一条支离破碎的分形曲线可能处处有切线 把岛屿的尖角弄钝，可在每条海岸线的每一个点上作一条切线，由此面积从而总的 D 则不受影响。这样，一条分形 σ 曲线和不存在切线并非等同。

岛屿的无限性

一种无关紧要的发散性 当 $a \to 0$ 时，$Nr(A > a) = Fa^{-B}$ 趋于无限。从而，柯尔恰克定律便与我们原先的观察即岛屿数目实际上无限这一点相吻合。

最大岛屿的相对面积 最后这个事实在数学上是可以接受的，因为许多很小岛屿的累计面积是有限的和可以忽略的。◁所有面积小于 ε 的岛屿的面积总和为 $a(Ba^{-B-1}) = Ba^{-B}$ 从 0 到 ε 的积分。因为 $B < 1$，这个积分收敛，它的数值 $B(1-B)^{-1}\varepsilon^{1-B}$ 随 ε 趋于 0。▶

因此，对全部岛屿的面积总和而言，最大岛屿的相对面积的贡献当岛屿数目增加时趋于一个正的极限。它不是渐近地可忽略的。

最长海岸线的相对长度 另一方面，假定 $D_c = 1$，则海岸线长度随指数 $D > 1$ 呈双曲线分布。因此小岛屿海岸线的总长度无限。随着构造的细化和岛屿数目的增加，最大岛屿的海岸线长度就成为相对可忽略的。

相对可忽略的集合 较为一般的，不等式 $D_c < D$ 表明，只用海岸线发生器画出的曲线，与全部海岸线相比是可以忽略的。同样，直线（$D = 1$）与平面（$D = 2$）相比是可以忽略的。正如在平面上随机地选取的一个点几乎决不会落在 x 轴上一样，在“主”岛屿及环绕它的子岛屿的海岸线上随机地选取的点，几乎决不会落在主岛屿的海岸线上。

寻找无限的大陆

在标度宇宙中，对岛屿和大陆的区分不能基于惯例或“相对大小”。唯一适用的方法是把大陆定义为有无限直径的特殊岛屿。我现在来说明，本章开始时提出的构造方案实际上决不能生成一块大陆。◁对了解概率论的读者：生成一块大陆的概率为0。▶

聪明地寻找一块大陆时，我们一定不再分别选择起始器和发生器。从现在开始，需把同一发生器既用作内插，又用作外推。这个过程是分阶段进行的，每一阶段又分为若干步骤。它十分相似于第8章中康托集合的外推，但值得更加彻底地加以描述。

第一步把我们选定的发生器用 $1/r$ 的比例放大。第二步在放大的发生器的某一个链节上做一个“标记”。第三步移动放大的发生器，使它的有标记的链节与[0,1]吻合。第四步即最后一步是把放大的发生器的其余链节进行内插。

无限重复同样的过程，它的进程和输出由带“标记”的链节位置的序列所确定。这个序列可以取不同的形式。

第一种形式要求海岸线发生器包括正数 N_c-2 个“非端部”链节，这些链节属于海岸线发生器，但并不以0或1为一端。如果总是把标记置于非端部链节，那么每个外推阶段都将扩展海岸线的原始小段。最终并合成为一条双向无限的分形海岸线。这表明这样确实可能得到一条大陆海岸线。

其次，总可在海岸线发生器的端链节作标记，每种可能性都选择无限多次。于是我们那一小段海岸线又无限地延伸。如果我们总是选择同一个链节，那么海岸线将只在一个方向上延伸。

第三，总可在属于岛屿发生器的一个链节上作标记。然后，总把外推前的最大岛屿置于较大岛屿的海岸之外，然后置于一个更大的岛屿的再外面，如此直到无限。实际上这样决不能到达一块大陆。

下一条注记包含一点“概率上的共同意义”，读者对之应当是

熟悉的，我们假设标记是根据撒一个有 N 个面的骰子而定。为了外推生成一块大陆，显然超过一个有限(第 k 个)阶段的所有标记都必须放在海岸线发生器的 $Nc-2$ 个非端部链节上。称它们为"得胜的"链节。为了确知经过 k 阶段后到达了一块大陆，需在尔后的每次掷骰子中无一例外地全赢。这样好的运气不是不可能有，但它具有零概率。

岛屿、湖泊和树的组合

科赫岛屿相互间是相似的，它们的直径 Λ 可以重新定义为最好在海岸线上选择的任意两个特殊点之间的距离。其次，我们看到，直径—数量关系的推导当假设发生器包含一个海岸线发生器时特别有用。但关于发生器其余的链节形成岛屿，或者是自回避的假设，却从未真正应用过。于是，关系式

$$Nr(\Lambda>\lambda)=F\lambda^{-D}$$

的适用范围很广。◁甚至可以放宽由两个区间起始的奇怪折线必须不相交这个条件。▶我们现在通过例子说明原始的 $N-N_c$ 个链节的构造如何影响最终的分形拓扑学。

岛屿与湖泊的组合　放宽关于发生器需在顺时针方向进行时置于左面这个要求。如果把它放在右面，那么代替岛屿，它将形成湖泊。换句话说，可以把湖泊和岛屿两者包括在同一个发生器中。对于这两种方式，最终的分形都是一条 σ 回线，它的组成回线相互嵌套。例如考虑图 13-3 所示的发生器，当由一个正方形起始时，这个发生器导致图 13-4 所示的奇怪折线。

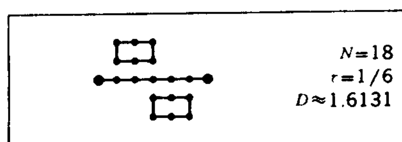


图 13-3

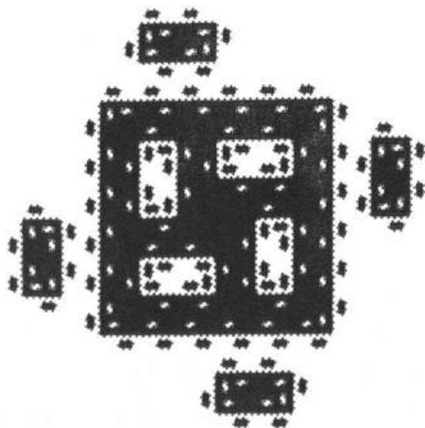


图 13-4

难以捉摸的大陆 在上面的图画中，对起始器边长施加一个非固有的外界限。较为一致的途径是对它进行外推，如像我们对无湖泊的岛屿所做的那样。几乎又可以确信，决不会到达一块大陆，岛屿嵌套在湖泊中，湖泊又嵌套在岛屿中，永无止境。

面积—数量关系 为了定义一个岛屿（或湖泊）的面积，可以随心所欲地或是取总面积，或是取海岸线内的土地（或水面）面积。两者只差一个固定的数字因子。从而通过前乘因子 F'，而不是通过指数 $D/2$ 来影响 $Nr(A>a)$。

区间和树的组合 现在假设 $N-N_c$ 个链节或是形成有两个自由端的折线，或是一棵树。在两种情况下，分形都分裂为无限个不连接的小块，其中每一个都是一条曲线。这条 σ 曲线不比一个 σ 回线长；它或者是一棵 σ 树，或者是一个 σ 区间。

接触群集的概念

发生器也可以组合成回线、分支和其他不同的拓扑构形。如果是这样，极限分形的连通部分将使人想起逾渗理论（本章后面也

将提到)以及物理学的许多其他领域中的群集(*cluster*)。对我们来说,这种用法是极其不幸的,原因是在尘埃研究中用到了 *cluster* 的另一意义——集团(第9章)。因此我们需要较为专门和烦琐的术语。我取名为"接触群集"。幸好术语 σ-群集并非含糊不清的。

(可以看出,接触群集有唯一的和自然的数学定义,同时尘埃的群集化的说法则是普及和直观的,最好通过可论证的统计规则来定义。)

充满平面的接触群集 当 D 达到其最大值 $D=2$ 时,上节的论据仍然成立,但需作附加的注记。每一个群集趋于一个极限,虽然也可以是一条直线,但在大多数情形是一条分形曲线。另一方面,所有的群集并在一起形成一条 σ 曲线,它的股越来越密地填充平面。这条 σ 曲线的极限性如像第7章所述:它不再是一条 σ 曲线,而是平面中的一个区域。

难以捉摸的无限群集 在现行方法中并未包括真正无限的群集。容易安排发生器的拓扑构造而使任何给定的有限区域几乎肯定地为一个接触群集所环绕。这个群集又几乎肯定地为一个更大的群集所环绕,如此等等。不存在群集尺寸的上界。更为一般地,当一个群集因为遍及了很大的一个区域,从而似乎无限时,考虑更大的面积几乎肯定能说明它是有限的。

质量—数量和加权的直径—数量关系

指数 $D-D_c$ 和 D/D_c

我们现在用两种方式来重新写出函数 $Nr(\Lambda>\lambda)$ 的公式:第一种方式是把群集的直径 λ 用它的质量 μ 来代替,然后给予较大的接触群集的权重。

在此,群集的质量只是群集中长度为 b^{-k} 的链节的数目。(不计入群集回路中的链节!)事实上,我们在第6章和第12章中通过把边长为 b^{-k} 的正方形的中心置于每个角顶,以及在每个端点加上半个正方形,创造了一个变形的闵科夫斯基香肠(图5-5)。

直径为 Λ 的群集的质量是它的变形香肠的面积，$M\propto(\Lambda/b^k)^{D_c}(b^k)^2=\Lambda^{D_c}/(b^k)^{D_c-2}$。因为 $D_c<2$，当 $k\to\infty$ 时 $M\to 0$。所有接触群集的质量总和 $\propto(b^k)^{D-2}$；如果 $D<2$，它也趋于 0。而任何一个接触群集的相对质量是 $(b^k)^{D_c-D}$；它以随着 $D-D_c$ 而增加的速率趋于 0。

质量—数量关系 显然

$$Nr(M-\mu)\propto(b^k)^{-D+2D/D_{q\mu}-D/D_c}$$

用质量加权的直径的分布 注意 $Nr(\Lambda>\lambda)$ 计算了在一张表（由最大的接触群集开始，接着是次大的，如此等等）中比线段 λ 长的线段数目。但我们将暂时给予每个接触群集以等于它的质量的线数。容易看出，所导致的关系为

$$Wnr(\Lambda>\lambda)\propto\lambda^{-D+D_c}$$

质量指数 $Q=2D_c-D$

用 $\mathcal{F}$ 记一个直径为 D 的分形，它是以 $[0,\Lambda]$ 为起始器而递归地构造的，并设其总质量为 Λ^D。当 $\mathcal{F}$ 是一个康托尘埃时，第 8 章表明，半径 $R<\Lambda$ 而中心在 0 的圆盘质量是 $M(R)\propto R^D$。◁量 $\log[M(R)R^{-D}]$ 是 $\log_b(\Lambda/R)$ 的周期函数，但我们将不陷在这些复杂性中，因为当分形变形而使所有 $r>0$ 都是可采纳的自相似比时，这些复杂性将会消失。▶

我们知道，$M(R)\propto R^D$ 也适用于第 6 章的科赫曲线。进而，用 D_c 代替 D，这个公式可以推广到本章的递归岛屿和群集。在所有情况下，半径为 R 且中心在 0 的圆盘的质量取形式

$$M(R,\Lambda)=R^{D_c}\Phi(R/\Lambda),$$

其中 Φ 是可以由 $\mathcal{F}$ 的形状导出的函数。特别是，

$$M(R,\Lambda)\propto R^{D_c}\quad 当\ R\ll\Lambda,$$

及

$$M(R,\Lambda)\propto\Lambda^{D_c}\quad 当\ R\gg\Lambda。$$

现在考虑 $M(R)$ 的加权平均值，记作 $\langle M(R)\rangle$，它对应于 Λ 是一个扩展得很开的双曲分布 $W_{nr}(\Lambda>\lambda)\propto\lambda^{-D+D_c}$ 的情形。我们知道

$1 \leqslant D_c < D \leqslant 2$。除开 $D = 2$ 和 $D_c = 1$ 的组合，都有 $0 < D - D_c < D_c$。由此得到

$$\langle M(R) \rangle \propto R^Q, \text{和 } Q = 2D_c - D > 0。$$

当圆盘的中心是 $\mathcal{T}$ 中 0 以外的一个点时，比例因子发生变化，但它的指数不变。对 $\mathcal{T}$ 中所有的中心位置取平均，以及把[0,1]用不同的起始器来代替，它也是不变的。◁通常，随机尺寸 Λ 的弧也是随机的形状。但对 $M(R,\Lambda)$的上述公式也可以应用于对所有形状的平均$\langle M(R,\Lambda) \rangle$。最终结果不变。▶

注记　上述推导并未涉及群集的拓扑学：群集可以是回线、区间、树或任何别的东西。

结论　公式$\langle M(R) \rangle \propto R^Q$ 表明，当 Λ 是呈双曲线形分布，从而在相当程度上分散时，维数的一个重要作用是通过一个不同于 D 的指数来体现。最自然的指数是 $2D_c - D$，但不同的权函数给出不同的 Q。

注意：并非每个质量指数都是一个维数　组合量 Q 是重要的。因为它是一个质量指数，会引诱人们称它为维数，但这种诱惑并无好处。把 D_c 相同但 Λ 不同的许多集群混合在一起，D_c 维持不变，因为维数不是多个集合的混合物的性质，而是单个集合的性质。D 和 D_c 都是分维，但 Q 不是。

更一般地，物理学的许多领域包含有形式为$\langle M(R) \rangle \propto R^Q$ 的关系，但这样一个公式本身不能保证 Q 是一个分维。如果像有些作者那样称 Q 为一个有效维数，那么这是一种无意义的表达，因为 Q 并不具有任何其他表征 D 的性质(例如，D 的和或积的意义在 Q 的情形没有对应物)。此外，这种无意义的表达已被证明是一种潜在的混淆根源。

不成团的凝固群集

现在描述另外两种发生接触群集的方式。第一种基于凝固，适用于 $D<2$，另一种基于皮亚诺曲线，适用于 $D=2$。只对逾渗感

兴趣的读者可以跳过本节和下节。

首先，把科赫构造用康托凝固对平面的自然推广来代替。作为例子，考虑图 13-5 所示的五个发生器，它们的下一个构造阶段画在其下面。

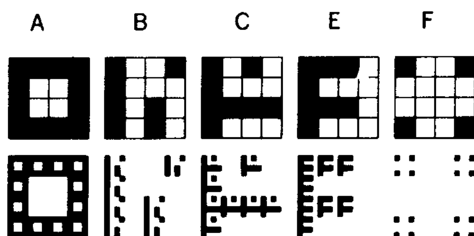


图 13-5

在所有这些情形中，极限分形的面积为 0，并且不包含内点。它的拓扑构造可以取不同的形式，这由发生器决定。

应用发生器 A，每个阶段 k 的预凝乳是连通的，极限分形是一条曲线，这是在第 14 章中将讨论的十分重要的谢尔宾斯基地毯的一个例子。

应用发生器 F，预凝乳分裂为不相交的几部分，$k \to \infty$ 时，其最大线尺度不断增加。极限分形是尘埃，与第 9 章的傅尼埃模型同类。

发生器 B、C 和 E 更有趣：预凝乳分裂为几块，称为预群集。可以说每个阶段都把每个"老的"预群集弄薄和弄弯而加以变化，并产生"新的"预群集。尽管如此，通过谨慎地选择发生器，每个新生的预群集都完全包含在它诞生前点阵的一个最小胞中。与下节的"交叉成团群集"不同，称这种群集为"不成团的"。从而极限接触群集的维数形式为 $\log Nc / \log b$，这里 Nc 是一个整数，最多等于发生器的最大分量中的胞数目。对发生器 B 和 C 达到这个极大值，对它们的接触群集分别是 $D_c = 1$ 的区间和 $D_c = \log 7 / \log 4$ 的分形树。但出自发生器 E 的分形不能达到这个极大值：在这种情况中 F 形预群集不断分裂成各个部分，极限也是由 $D_c = 1$ 的直

线区间构成。

把伪闵科夫斯基香肠用边长为 b^{-k}，并与接触群集相交的胞集所代替，则直径—数量关系和上节的其他结果都不改变。

交叉成团凝固群集

其次，设平面凝固发生器取图 13-6 所示形式之一，下一构造阶段画在旁边。两种情形都有大量“交叉成块”，意味着每个新生的预群集组合了它诞生之前几个最小的晶格胞所作的贡献。

图 13-6

在科赫的意义上，若允许奇怪折线自接触，那么将有一种类似的情况，导致小群集奇怪折线的合并。两种情况下的分析都是繁琐的，不能在此进行。但 $Nr(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-D}$ 仍然是对于小的 λ 成立的关系。

◁然而，如果试图由这个关系估算 D 而不排除大的 λ，那么这种估算将有系统偏差，小于准确值。▶

关于量值 b^{D_c} 出现新的特点：它不一定是通过简单地观察发生器就可以得出的整数，而可以是一个分数。理由在于每个接触群集组合了：(a)由其本身决定的一个整数，它以比值 $1/b$ 缩小，和(b)由于成团导致的许多缩小的形式，它们涉及形为 $r_m = b^{-k(m)}$ 的较小比值。第 69 页上确定维数的方程 $\sum r_m^D = 1$，可用 $x = b^{-D}$ 改写为形式 $\sum a_m x^m = 1$。$1/x$ 是整数的情况只能看成例外。

被驯服的打结皮亚诺怪物

充满平面的群集($D = 2$)的集合不能通过凝固而创立，但我找

到另一种方式，即应用不同于我们在第 7 章中看到的被驯服的那种皮亚诺曲线。读者必须回忆起，具有自避免奇怪折线的皮亚诺曲线产生河流和堤岸树。但另一些皮亚诺曲线奇怪折线（例如图 7-1 中的例子，但假设角顶未圆化）简单地就是点阵块。继续构造过程，被这些曲线分隔的开点阵胞"收敛"为处处稠密的尘埃，即收敛到无论 x 和 y 都不是 b^{-k} 乘子的点。

在这些极端情形之间，有一类新而有趣的皮亚诺曲线。它们的发生器举例如图 13-7，其中也给出了第二步。这类皮亚诺曲线现已容易驯服。我们注意到每个自接触点使一个开预群集打一个结，它可以有分支和自接触点，经历了本身不断向外打结的几团，最终变稀成为高度分岔的曲线，这就定义了一个接触群集。如在本章前几节中定义的群集的直径 Λ，从其诞生之时开始就是固定的：粗略地等于"播种"这个群集的正方形的边长。它的分布受熟知的关系式 $Nr(\Lambda > \lambda) \propto \lambda^{-2}$ 所支配。

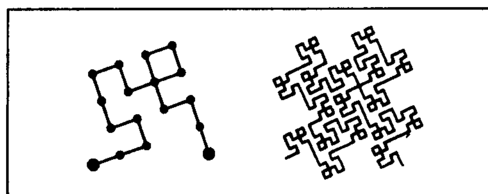


图 13-7

顺便注意到，科赫接触群集是递归地构造曲线的极限，这个群集就是曲线的补的开分量的极限（在一种特别的意义上）。

伯努利逾渗群集

无论用哪一种方法来产生 $D = E$ 和 $D_c < D$ 的分形接触群集，它们都对物理学中一个很重要的问题——通过点阵的伯努利逾渗，提供了原先缺少的几何模型。J. M. 哈默斯利提出并第一个

研究了这个问题但并未冠以伯努利的名字,因我们在第23章中将遇到分形逾渗,使我们在这里不得不采用这个全称。(它独立地被Smythe & Wiermann 1975采用。)

文献 在以下文献中综述了伯努利逾渗:Shante & Kirkaptrick 1971,Domb & Green 1972,特别是其中J. W. 埃萨姆所写的一章,Kirkpatrick 1973,de Gennes 1976,Stauffer 1979和Essam 1980。

定义 逾渗包含概率概念,从而若要完全按部就班,就不便在这一阶段讨论。但偶有一点不按部就班是值得的。$E=2$的最简单逾渗问题是在正方形点阵中的有界逾渗。为了以通俗的方式说明这一点,设想构造一个大的正方形点阵,连接杆用绝缘的乙烯,或是用导电的铜制成。若每根连接杆都是随机地选择的,与其他连接杆无关,且选用导体杆的概率是p,就称得到了一个伯努利点阵。连接铜杆或乙烯杆的最大集合称为铜群集或乙烯群集。若点阵至少包含一串不间断的铜杆,电流可以由点阵的一面流向另一面,称这个点阵是逾渗的(*percolate*)(在拉丁语中,*per* = 通过,*colare* = 流动)。若连接杆与点阵的顶面和底面有不中断的电接触,那杆就形成了一个"逾渗群集",实际参与导电的杆起着逾渗群集"中枢"的作用。以上结果可以直接推广到其他点阵和$E>2$的情况。

临界概率 哈默斯利的最引人注目的发现涉及某个阈值概率——临界概率p_{crit}所引起的特殊作用。这个量值当伯努利点阵的尺寸(用杆的数目来度量)趋于无限时起作用。人们发现,当$p>p_{crit}$时,有一个逾渗群集存在,它的概率随着点阵尺寸的增加而增加,并趋于1。相反地,当$p<p_{crit}$时,逾渗的概率趋于0。

正方形点阵上的联合逾渗指的是或者铜或者乙烯的渗透,$p_{crit}=1/2$。

分析标度性质 对逾渗的研究长期以来着眼于寻找有关标准物理量的分析表达式。所有这些量发现都是标度的,即它们之间的关系呈幂次规律。对于$p\neq p_{crit}$,标度扩展到取决于$p-p_{crit}$的一个外界限,记为ξ。当$p\to p_{crit}$时,界限满足$\xi\to\infty$。物理学家猜测(见Stauffer 1979,第21页)$\langle M(R,\Lambda)\rangle$遵循得到的规律。

群集的分形几何学

群集的形状 设 $p = P_{crit}$，且诸杆的尺寸减小而总的点阵尺寸保持不变。那么群集将越来越薄（"全是皮肤而没有肌肉"），越来越缠绕，并且有越来越多的分支和迂回（"纤维粘连状"）。特别是 Leath 1976 中具体地说明位于群集之外但与群集内的杆相邻的杆的数目大致正比于群集中杆的数目。

群集是分形的假设 自然会猜测把标度性质由分析性质推广到群集的几何学。但这一思想不能在标准的几何学中体现，因为群集不是直线。分形几何学当然正是规定用来消除这种困难的：我猜测群集可以用满足 $D = 2$ 和 $1 < D_c < D$ 的分形 σ 曲线来表示。这种看法已得到认可并且发现是富有成效的。在第 36 章中将予以说明。

◁为了确切起见，用标度分形来表明未被原来点阵的边界所截断的群集。这就排除了逾渗群集本身。（术语群集容易造成混淆！）为了说明这个困难，从一个特别大的点阵开始，取其中的一个群集以及被这个群集所夸张的一个较小的正方形。根据定义，这个群集与较小正方形的交包含着一个较小的逾渗群集，但它又包含着通过正方形外的链与较小逾渗群集相连的"残余"。注意忽略这种残余会导致计算 D_c 所得的数值偏低。▶

很粗糙但具体的非随机分形模型 为了令人信服，在声称任何一种自然现象是分形时，必须找出一种特殊的分形集合作为一级近似的模型，或至少作为臆想中的图形。我的海岸线科赫曲线模型，以及星团的傅尼埃模型，表明粗糙的非随机图形是很有用的。我期望递归构造的接触群集（如像本章引入的那些），将对通常用伯努利群集模拟的那些所知甚少的自然现象提供有用的分形模型。

然而，伯努利群集本身却是（至少在原则上）完全清楚的。因此，通过明显的递归分形对它模拟是一项不同的任务。我研究的

科赫接触群集并不适合，因为乙烯与铜之间并无对称性，即使当两种类型的杆的数目相等也是如此。其次考察打结的皮亚诺曲线群集。取一个构造好的奇怪折线，并把曲线左面的胞制成铜的，其余的胞制成乙烯的。结果包含了应用于点阵胞（或对它们的中心而言，称为边）的一种逾渗形式。这个问题是对称的。但与伯努利问题不同，因为铜胞或乙烯胞的构形与相互独立的情形并不一样：例如9个胞形成的一个超正方形在伯努利情况可以全部是铜的或乙烯的，但在打结皮亚诺线的情况并非如此。（另一方面，两个模型都允许形成一个超正方形的一组4个胞，可取任意可能的构形。）这个差别具有影响深远的后果：例如无论是铜还是乙烯，都不能在 $p=1/2$ 的伯努利边问题中逾渗，但两者在打结曲线的情形都能逾渗，这意味着1/2是一个临界概率。

各种伯努利联合逾渗方案的清单已经足够长了，并且容易进一步再延长。我已考察了递归地构造分形接触群集的许多种方案。遗憾的是，这些清单之间的详细比较是很复杂的，我不拟在此进行。

因此，我们将满足于从以下较宽松的结论开始：伯努利逾渗问题的重要分形本质，看来可以用本章前面所定义的充满空间的非随机 σ 群集来说明。这个模型原则上的缺点在于，除去上面所说的以外，它是完全不确定的。它可以集中已观察到的任何不规则和支离破碎程度。关于拓扑方面的实质，见第14章。

临界群集的模型　特别是，考虑临界群集 $p=p_{crit}$ 的群集。为了表示它们，如在本章前面各节中所做的那样，对一个递归 σ 群集作外推。然后通过中止内插而作截断，使正的内界限作为原点阵中的胞尺寸。

非临界群集的模型　为了把这张几何图画推广到非临界群集，即 $p\neq p_{crit}$ 的群集，我们寻找具有正的内界限和有限外界限的群集。分析上要求当 $p<p_{crit}$ 时，最大铜杆群集范围为 ξ 量级，当 $p>p_{crit}$ 时是无限的。这两种结果都容易实现。例如，可以如同上一小节那样从同样的发生器开始。但代替对它自然地外推，由图

13-8 的两种形状之一开始。

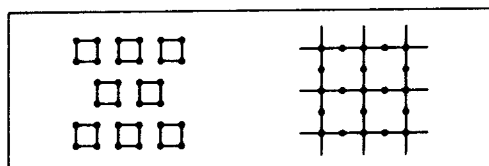


图 13-8

亚临界群集 左边那个趋于 $p < p_{crit}$ 的起始器，由边长为 $\xi/2$ 的正方形构成。现设选定的发生器在通过每个起始器的左边接通，而在通过另一边时关闭。起始器正方形将会变换成长度为 ξ 的不典型群集，为许多长度小于 ξ 的典型群集环绕。

超临界群集 右边那个趋于 $p > p_{crit}$ 的起始器，由起始正方形点阵的那些 x 或 y 坐标为偶整数的直线构成。从每个节点射出四个链节，它们的坐标为偶整数；所选的发生器总位于右面。在特殊情况下，当海岸线发生器既不包含回线又不包含不相连结的链节时，最终的图画是只基于"节点和链节"群集的粗糙模型的、除去随机的和系统化的方案。

注意分形几何图画由临界群集导出非临界群集，而物理学家更愿意把临界群集看成 $\xi \to \infty$ 时的非临界群集。

临界伯努利群集的 D_c

D_c 的值可以直接由以下两途径推知：对 $Nr(M > \mu)$ 的公式中的指数 $D/D_c = E/D_c$ 或对 $\langle M(R) \rangle$ 的公式中的指数 $Q = 2D_c - D = 2D_c - E$。采用希腊字母 τ, δ 和 η 在这类问题中的普遍意义，求出 $E/D_c = \tau - 1$ 和 $2D_c - E = 2 - \eta$。从而

$$D_c = E/(\tau - 1) = E/(1 + \delta^{-1})$$

和

$$D_c = 1 + (E - \eta)/2。$$

基于物理学家确定的 τ, δ 和 η 之间的关系，上述对 D_c 的两公式是等价的。相反的，仅从物理学不能得到它们之间的等价性，

因为这个概念是出自几何学的。

Harrison, Bishop & Quiun 1978, Kirkpatrick 1978 和 Stauffer 1979 相互独立地得到了同样的 D_c。他们是由 $p > p_{crit}$的群集的性质出发的，用不同的临界指数(β, γ, ν 和 σ)表示了他们的结果。这些推导并不涉及一种具体的内在分形图画。这种方法的固有危险(对此我们在本章前面提醒过读者)可以从以下事实看出：Stanley 1977 因此而误以为 Q 和 D_c 是同等有用的维数。

对于 $E = 2$，数值是 $D_c = 1.89$，可与其他形式所熟知的步骤中的经验结果相比拟。选取 r，它不必有 $1/b$(b 是一个整数)的形式。然后取一个大的涡旋，它简单地是边长为 1 的一个正方或立方点阵。用边长为 r 的子涡旋铺满它，计数与群集相交的正方形或立方体的数目 N，并计算 $\log N/\log(1/r)$。然后对每个边长为 r 的非空子涡旋，通过造成边长为 r^2 的子子涡旋来重复这一过程。如此尽可能地不断进行下去。最有意义的结果在当 r 接近 1 时得到。一些早期的模拟给出的估计有偏差，$D^+ \approx 1.77$ (Mandelbrot 1978 h, Halley & Mai 1979)，但大规模模拟(Stauff 1980)证实了 D。

◁偏差的实验值 D^+ 颇接近于 Q，从而看来似乎证实了 Stanley, Birgenau, Reynolds & Nicoll 1976 和 Mandelbrot 1978 h 的理论结果，两者都犯了认为维数是 Q 的错误。S. 柯克帕特里克提醒我注意这个错误。在 Leath 1976 中可以找到一个不同的、但甚至更早的对 D 的不正确估计。▶

奥凯芬诺基(沼泽地)的柏树

从飞机上观察一个未经系统地“管理”的森林，森林的边界令人想起一个岛屿的海岸线。树木的斑点的外形十分破烂或皱折，每一个大的斑点都拖曳出面积不同的小斑点。我对这些形状可能遵循理查森和/或柯尔恰克定律的猜想，确实被 H. M. 黑斯廷斯、R. 蒙底西奥罗和 D. 冯卡诺对奥凯芬诺基沼泽地所作的未发表

过的研究(Kelly 1951)所证实。柏树的斑纹是大的,$D\approx1.6$,阔叶树和混合阔叶树的斑纹要小得多,D 近似于 1。告诉我情况的人说,无论由视看或考察生长图,都令人印象深刻地发现存在着不同的尺度。内界限约为 161,874.4m^2,可能是由于航空摄影而引起的。

第 14 章　树枝状和分形点阵

第 6 章研究了满足 $D<2$ 且无二重点的平面科赫曲线，因此可称它是自回避的或非树枝状的。第 7 章研究了皮亚诺曲线，它在极限情况下不可避免地有处处稠密的二重点。本章进行下一步，即研究有树枝状的自相似形状的例子：$1<D<2$ 的平面曲线，$1<D<3$的空间曲线和 $2<D<3$ 的曲面。在树枝状的自相似曲线中，二重点的数目是无限的。

本章的数学是古老的（虽然没有几个专家知晓），但我对描述大自然的应用是崭新的。

作为怪物的谢尔宾斯基垫片

我建议用谢尔宾斯基垫片这个术语来记图 14-4 中的形状。对空间情形的推广见图 14-8。构造方式在插图说明中描述。

Hahn 1956 指出："如果曲线上一点的任意小邻域的边界与曲线的公共点多于两个，则称该点为分支点……。直觉似乎表明不可能有一条曲线只由分支点构成。但谢尔宾斯基曲线否定了这种直觉信念，它的全部点都是分支点。"

埃菲尔铁塔：牢固而优美

哈恩的观点是全无根据的，他的含糊表述"似乎表明"是聪明地选择的词语。我的第一个反驳论据借用自工程。（如像前面指出的，在我们于第12章末与计算机打交道之前，我曾说明，把有联系的工程系统包括在这本涉及大自然的书中，并无不合理之处。）

我的断言是，（远在科赫、皮亚诺和谢尔宾斯基之前）古斯塔

夫·埃菲尔在巴黎建造的铁塔就有意识地结合了充满分支点的分形曲线的思想。

作为第一级近似，埃菲尔铁塔可以看成由四个A形结构组成。传说埃菲尔选择A来表达他对工作的热爱(Amour)。所有四个A分担同样的尖顶，任何两个相邻的A分担一个上升部。顶上耸立着一个直塔。

然而这些A和直塔并不是由实体梁而是由巨大的衍架构成的。衍架是相互连接的构件组成的刚性集合，只有当至少一根构件变形时，衍架才可能变形。衍架可以做得比同等强度的圆柱梁轻得多。埃菲尔知道，如果衍架的"构件"本身又是子衍架，那么它还可以轻得多。

强度的关键在于分支点这个事实，经过巴克明斯特·富勒才广为知晓，但哥德式教堂的老练设计师们对此早已了解。越深入地应用这个原则，就越接近于谢尔宾斯基的思想！在 Dyson 1966 的第646页中描述了埃菲尔铁塔设计的一个无限外推，伯西柯维奇的一名以前的学生用这种方式寻找轻重量的坚固的星际结构。

临界逾渗群集

我们现在回到大自然，或者更确切地说，回到由统计物理提供的对大自然的想象。我认为谢尔宾斯基垫片这一类几何形体，是对通过点阵的逾渗研究所要求的。在开始我们对此课题的案例研究的第13章中声称，逾渗群集是分形。我现在进一步补充声明，谢尔宾斯基垫片分支结构是群集中枢结构的一个有希望的模型。

物理学家多半会根据这个模型很容易满足对它的期望的事实来作出判断：Gefen, Aharony, Mandelbrot & Kirkpatick 1981 证明了用这个模型可以精确地进行通常的计算。但其细节过于技术性而不宜包括在本书中，而我的断言的原始根据却是值得一提的。它出自我感觉到的垫料和群集中枢线之间的想象物，如图14-1所示。其最显著的特点在于孔洞，即由于消除悬挂接线（当群集退化为它

的中枢线)而留下的空位,以及完全包含于感兴趣的群集中的群集。其次,在谢尔宾斯基垫片中的分支是自相似的这一点在第13章中已被说明,这在逾渗群集的几何模型中是一个极具期望的性质。最后,维数符合程度如此之好,不太可能是巧合! S. 柯克帕特里克估计,在平面中 $D\approx1.6$,令人惊讶地接近于谢尔宾斯基垫片中的 D! 而在空间 $D\approx2.00$,令人惊讶地接近于图14-8中分形斜网的 D。进而,Gefen, Aharony, Mandelbrot & Kirkpatrik 1981 注意到,中枢线与广义垫料的 D 之间的等同性保持在 $\mathbb{R}^4$ 中。有利于垫料模型的一个补充论据,将在后面作为树枝状的最后一个应用中提到。

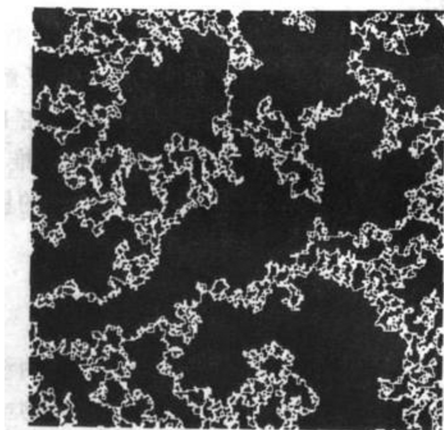


图 14-1

三元谢尔宾斯基地毯

我们现在由三角形点阵转向正交点阵。这使得在设计(即在平面或空间中产生曲线,或在空间中产生曲面)中有极大的灵活性。这样产生的曲线尽管与谢尔宾斯基垫片十分相似,但由树枝状的基本观点看来却是极不相同的,对此我们将在给出定义以后

谈及。

照搬康托去掉正方形中间三分之一的方法，见图 14-4 的插图说明。通过继续到无限而得到的分形，以日常用语三元谢尔宾斯基地毯命名，它的维数是 $D = \log 8/\log 3 = 1.8927$。

非三元分形地毯

给定一个整数 $b > 3$，并照例记 $r = 1/b$，取一个正方形为起始器，作中心相同边长为 $1 - 2r$ 的正方形孔洞，再取边长为 r 的 $4(b-1)$个正方形的薄环为发生器，就得到一条“大的中心圆形”的花地毯，其维数是 $D = \log[4(b-1)]/\log b$。给定一个奇整数 $b > 3$，可以通过取一个中心与起始器相同、边长为 r 的子正方形孔洞以及 $b^3 - 1$ 个小正方形的厚环作发生器，得到一条“小的中心圆形”的花地毯，其维数是 $D = \log(b^3 - 1)/\log b$。这样，用中心型地毯就可以任意近似地接近所有在 1 与 2 之间的 D。

对 $b \geq 2$ 可以定义非中心型地毯。例如设 $b = 2$ 和 $N = 3$，由一个子正方形构成的孔洞可以位于上右方的子正方形中。相应的极限集是用正方形的左下半部为三角形构成的谢尔宾斯基垫片。

三元分形泡沫

三元地毯的横向空间推广是去掉一个立方体的中间 1/27 的子立方体作为孔洞，留下 26 个子立方体的外壳，所导致的分形称为三元分形泡沫，它的维数是 $D = \log 26 / \log 3 = 2.9656$。

在此，每个孔洞完全为一条连续边界所包围，这条边界分裂为密度无限的无限多、无限薄的层。为了把位于不同孔洞中的两点连接起来，就必须穿越无限多层。我尚未足够彻底地掌握这个论题而不能在这里叙述，只是回想起按照 J.A. 惠勒和 G.W. 霍京，“时-空泡沫”表征了物质最精细的结构。

门杰的三元分形海绵

卡尔·门杰选择另一种孔洞，其形状如同前后有穗子的十字形，构成由 $N=20$ 个边长为 1/3 的相互连通的子立方体。其中有 12 个形成“杆”或索，而其余 8 个是结、连接线或系绳。极限情况（图 14-9）满足 $D=\log 20/\log 3=2.7268$。我称它为一块海绵，因为凝乳和乳浆都是连通集合。可以由水能在乳浆中任意两点之间流动加以证实。

为了得到绳索和板片的混合物，令孔洞为一个三元十字形，经由前方的一个穗连接。通过频繁改变穗的方向，最终得到一个多孔板片。也许值得指出，我曾想通过所有这些图形来寻找湍流间歇性的模型，那时我还未读过门杰的文章。

非三元海绵和泡沫

给定一个非三元基 $b>3$，当孔洞是三个正方形基面的柱体之并时得到广义门杰海绵，而每个圆柱的轴线都与单位立方体的一根轴线重合，它的长度为 1，基面的边平行于其他轴线。当基面的边长为可能的最大值时，称海绵是“轻的”。对于 $E=3$，它们的长度为 $1-2/b$，留下 $12b-16$ 个边长 $r=1/b$ 的立方体的集合为发生器。因此维数为 $D=\log(12b-16)/\log b$。类似地，仅当 b 为奇数，柱体底面的边长为 $1/b$ 时得到“重海绵”。对于 $E=3$，它们留下 b^3-3b+2 个边长为 $r=1/b$ 的立方体的集合为发生器。这时 $D=\log(b^3-3b+2)/\log b$。

分形泡沫以类似的方式推广。对于 $E=3$，“厚壁”泡沫有 $D=\log(b^3-1)/\log b$，而“薄壁”泡沫有 $D=\log(6b^2-12b+8)/\log b$。当孔洞很大和 D 近似为 2 时，泡沫像一种非常镂空的乳酪——埃门泰勒（Emmenthaler），当孔很小和 D 近于 3 时，它像另一种乳酪——阿平采勒（Appenzeller）。

间隙尺寸的分布

海绵的孔洞相互贯通但地毯和泡沫的孔洞却仍然是类似于康托尘埃(第 8 章)的间隙。它们的线尺度 Λ 的分布满足

$$Nr(\Lambda > \lambda) \propto F\lambda^{-D},$$

其中 F 是一个常数。我们由康托尘埃的间隙和第 13 章的岛屿和群集就已熟知这条规律了。

分形网的概念、点阵

标准几何学的点阵由分成相等的正方形、三角形或类似的规则形状的平行线条形成。同样的术语看来适用于规则分形,其中的任意两个点可由至少二条路径相连结,它们在别处不重叠。当图形并非规则、而倒如是随机的,我将用网这个名称来代替点阵。

然而,对标准点阵和分形点阵作较仔细的比较显示出相当大的差别。第一个差别在于标准点阵在位移下不变,而不是在标度变化下不变,但对分形点阵,却正好相反。第二个差别在于任何标准点阵尺寸减少时收敛到整个平面。又,平面中的几个标准点阵可以通过在已有平行线的正中间加入线段并重复直至无限来内插。结果又收敛到整个平面。类似地,当一个空间标准点阵可以作内插时,它的极限是整个空间,并非一个点阵。在分形意义上,相反地,一个近似分形点阵的极限是一个分形点阵。

树枝状分形点阵这个术语也可以应用于分形泡沫。

截面的分维

基本规则　在许多分形的研究中,重要的是知道截线或截面的维数。基本事实(在第 10 章用来证明对湍流有 $D>2$)涉及用一个“与分形无关的”区间对一个平面分形作的截面。人们发现,如

果截面是非空的，那么“几乎”可以确认其维数是 $D-1$。

在空间中的相应值是 $D-2$。

例外　遗憾的是，难以对具有对称轴的非随机分形说明这个结果。我们考虑的区间平行于这些轴，从而是非典型的，并且几乎由一个区间所作的每个简单截面都属于例外集合，对此不能应用一般的规则。

例如，考虑谢尔宾斯基地毯、三元门杰海绵和三元泡沫，其 $D-1$（几乎肯定它是由区间所作截面的维数）分别为

$\log(8/3)/\log 3$，$\log(20/9)/\log 3$，和 $\log(26/9)/\log 3$。

另一方面，设 x 是平行于谢尔宾斯基地毯的 y 轴的一个区间的横坐标。当三进制的 x 终止于一个不中断的 0 或 2 的无限长串时，诸截面本身又是区间，因此 $D=1$，大于所期望的。相反，当 x 终止于一个不中断的 1 的无限长串时，截面是康托尘埃，因此 $D=\log 2/\log 3$ 就太小了。若 x 终止于一个周期为 M 的周期形式（包括 pM 个 1 和 $(1-p)M$ 个 0 或 2），截面的维数为 $p(\log 2/\log 3)+(1-p)$。预期的 D 值对 $p\approx 0.29$ 有效。◁如果 x 的数字是随机的，则同样成立。▶这样，这里包含三个维数：最大的、最小的和平均的。

在空间情形有十分相似的结果。

对于谢尔宾斯基垫片，几乎可以肯定 $D=\log(3/2)/\log 2$，但“自然”切面的 D 值在 1 与 0 之间。例如，穿过垫片的一边的中点的短区间如果足够接近于垂直的，则交垫片于单一点，和 $D=0$。

在一部分里，这些特殊截面的可变性起源于原始形状的规则性。但在另一部分，不可避免的情形是：最经济的截面（不一定是直线）是拓扑维数概念的基础，以及树枝状阶数的基础，对之我们现在进行讨论。

把树枝状分形看成曲线或曲面

如通常说的，曲线在本书中用作“拓扑维数 $D_T=1$ 的连通形状”的同义词。事实上，这个词语对数学家并不完全满意，有必要

精确地重新叙述。幸运的是，对第 6 章是可以满意的，理由很简单，因为以[0,1]为起始器的任意科赫曲线可以称为曲线，就像[0,1]本身一样，因为它是连通的，但若去掉 0 或 1 以外的点，它就将是不连通的。雪花的边界像一个圆，它是连通的，但若去掉任意两个点，它就是不连通的。

现在有必要重新较为细致地叙述，拓扑维数是递归地定义的。对于空集，$D_T = -1$。对于任何其他集合 $\mathcal{S}$，D_T 的值与使得 $\mathcal{S}$ 不连通的"割集"的最小维数 D_T 相比高出 1。有限集合的康托尘埃满足 $D_T = 1 - 1 = 0$，因为不需要去掉任何东西(空集)来使它不连通。下列连通集合都可以通过去掉一个满足 $D_T = 0$ 的割集成为不连通的：圆周、[0,1]、雪花边界、谢尔宾斯基垫片、谢尔宾斯基地毯、门杰海绵。(最后三种情形需避免包括区间的特殊相交。)从而，所有这些集合有维数 $D_T = 1$。

根据同样的表征，分形泡沫是 $D_T = 2$ 的曲面。

下面给出对于 $D < 2$ 的垫片、所有地毯和所有海绵有 $D_T = 1$ 的另一证明。因为 D_T 是一个 $\leqslant D$ 的整数，$D < 2$ 的事实意味着 D_T 或是 0 或是 1。但问题中的集合是连通的，因此 D_T 不小于 1。仅有的解是 $D_T = 1$。

曲线的树枝状阶数

尘埃、曲线和曲面的拓扑维数及相应的概念只导致第一级分类。事实上，分别包含 M' 个点和 M'' 个点的两个有限集合有同样的 $D_T = 0$，但它们在拓扑上是不同的。康托尘埃又与所有有限尘埃不同。

让我们来看看并行的区别如何以在曲线上所作的集合中点的数目◁它的势▶为依据，导致一个拓扑概念：树枝状阶数，这是由保尔·乌里佐恩和卡尔·门杰在 20 世纪 20 年代初期定义的。这些概念除了开创者以外，只在很少几本数学书籍中提及，但现在却在物理学中成为不可缺少的，因此在被驯服后比在野性时更为人所

熟悉。这给出了首先讨论垫片而不是地毯的理由，远远超过了美学上的和寻求完整性方面的要求。

树枝状阶数涉及一个割集，这个割集包括为使集合 $\mathcal{S}$ 不连通需去掉的最小数目的点。这分别涉及 $\mathcal{S}$ 中每个点 P 的邻域。

圆周 作为由标准几何学得到的基础，从取 $\mathcal{S}$ 为半径为 1 的圆周开始。以 P 为中心的圆周 $\mathcal{B}$ 割 $\mathcal{S}$ 于 $R=2$ 个点，除非 $\mathcal{B}$ 有一个超过 2 的半径，在这种情形，$R=0$。以 $\mathcal{B}$ 为界的圆盘称为 P 的邻域。这样，任意点 P 位于其边界交 $\mathcal{S}$ 于 $R=2$ 个点的任意小邻域中。这就是可做得最好的：$\mathcal{B}$ 是 P 的一个一般邻域的边界，不一定需要是圆的，但"不太大"，R 至少为 2。上句中所用的词语"不太大"引起了复杂性，但遗憾的是不可避免。$R=2$ 称为圆周的树枝状阶数。我们注意到这时圆周上的所有点都是相同的。

垫片 其次，设 $\mathcal{S}$ 是通过孔洞构造的谢尔宾斯基垫片。这里 R 不再对每个 P 是同样的。我现在按照谢尔宾斯基来说明（除开起始器的角顶），R 可以是 $3=R_{min}$ 或 $4=R_{max}$。

值 $R=4$ 适用于 $\mathcal{S}$ 的任意三角形有限近似的诸角顶点。在 $h\geqslant k$ 阶近似中的一个角顶是两个边长为 2^{-k} 的三角形的公共角顶 P。中心为 P，半径为 $2^{-k}(h>k)$ 的圆交 $\mathcal{S}$ 于 4 个点，并围成 P 的任意小邻域。若 $\mathcal{B}$ 围成 P 的一个"充分小"邻域（在起始器角顶位于 B 之外的新意义下），可以证明 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{S}$ 至少交于 4 个点。

值 $R=3$ 适用于作为一个无限三角形序列的极限的 $\mathcal{S}$ 中的每一个点，每个三角形包含于序列的前一个中，但与之有不同的角顶。环绕这些三角形的圆交 $\mathcal{S}$ 于 3 个点，并界成 P 的任意小邻域。又若 $\mathcal{B}$ 界定了 D 的一个充分小邻域（起始器角顶又必须在外面），可以证明 $\mathcal{B}$ 至少交 $\mathcal{S}$ 于三个点。

地毯 当 $\mathcal{S}$ 是谢尔宾斯基地毯时，结果截然不同。任何充分小的邻域边界，将交 $\mathcal{S}$ 于一个不可数无限割集，而不论参数 N，r 或 D 取何值。

注记 在这个有限与无限的二分法中，垫片无异于标准曲线，而地毯无异于全平面。

均匀性。单一性 用 R_{min} 和 R_{max} 记关于 $\mathcal{S}$ 中一点的最小和最大 R。乌里佐恩证明了 $R_{max} \geqslant 2R_{min} - 2$。若等式 $R_{max} = R_{min}$ 成立，则称树枝状为**均匀的**；这就是 $R \equiv 2$（如简单闭曲线）和 $R \equiv \infty$ 的情形。

对于 $R_{max} = 2R_{min} - 2$ 的其他点阵，我建议用术语**拟均匀的**。一个简单而有名的例子——谢尔宾斯基垫片是自相似的。其他非随机例子是 Urysohn 1927 建立的集合的一部分，且并非自相似的。于是，成为拟均匀和自相似的条件就只有一个已知解——谢尔宾斯基垫片。能否对这种看起来的单一性给出严格的证明？

标准点阵 在此，树枝状阶数的范围从极小值 2（全部点在点阵位形之外）到一个可变的有限极大值，取决于点阵的位形：4（正方形），6（三角形或立方体）或 3（六角形）。然而，因为任何种类的标准点阵都是尺寸递减的，它由曲线转化为一个平面区域，其树枝状成为 $R = \infty$。

最后这个事实通过以下步骤成为显然的：把极大与极小交换，但保持固定胞尺寸的点阵和注意到了隔离点阵的越来越大的部分，必须去除一定数目的点，它个数目无有限的界。

正式定义 ——见 Menger 1932 和 Blumenthal & Menger 1970，第 442 页。

树枝状的应用

我们现在来面对一个熟悉的问题。不管谢尔宾斯基和门杰形状及其同类对数学家是何等地有兴趣，大自然的学生对树枝状阶数可能毫无兴趣，这还不明显吗？引起的反响与问题本身对我们是同样熟悉的。树枝状阶数在有限近似的“实际世界”中已是很有意义的，这种近似当内插导致分形时在某个正的内界限 ε 上中止。

事实上，给定一个由边长为 ε 的三角形充满的近似谢尔宾斯基垫片，就可以通过去掉 3 或 4 个点，把线尺度超过 ε 的一个区域分离开来，其中的每一个都属于两个邻近间隙的边界。这个数字

(3 或 4)当近似程度提高时并不改变。从而,由树枝状的观点来看,所有近似垫片都类似于曲线。

相反地,所有地毯都有以下性质:任意两个间隙的边界都不会重叠。为了使这类形状的一个有限近似(其中不考虑直径 $<\varepsilon$ 的间隙)不连通,必须去掉整个区间。这些区间的数目当 $\varepsilon \to 0$ 时增加。Whyburn 1958 证明具有这个性质的所有分形曲线是拓扑等价的◁同胚▶的,并用以下事实表征:它们不能通过去掉单个点成为不连通的两部分。

由于上述注记,如果认为分形几何学是用来确定一条平面分形曲线如何分享它的两种标准极限:直线和全平面时,就无需惊讶树枝状的有限性得到了清晰的涵义。一般说来,知道分形维数并不够。例如,Gefen, Mandelbrot & Aharony 1980 考察了在一个分形点阵上的伊辛(Ising)模型的临界现象并发现,最重要的结果◁无论临界温度为 0 或正值▶取决于 R 的有限性。

我们现在已能给出延迟很久的说明。在临界伯努利逾渗中的群集中枢线,用垫片模型看来比用地毯模型更好的理由,见 Kirkpatrick 1973 的这个发现报告。即使对特别大的点阵,也可以通过去掉实质上不变的阶为 2 的很少数量的连线,切割出临界中枢线。尽管可能有一定的偏差,我可以想象,这在趋于 $R<\infty$ 时十分明显地被看出。

树枝状的另一形式

科赫雪花片的两种方案通过无回线的分支达到树枝状。第一种是平面曲线,当起始器是一个正方形,发生器如图 14-2 时得到。

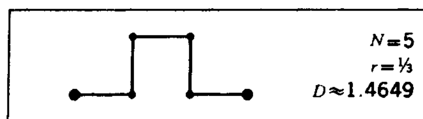


图 14-2

所构成形状完全不同于雪花片，如图 14-3 所示。

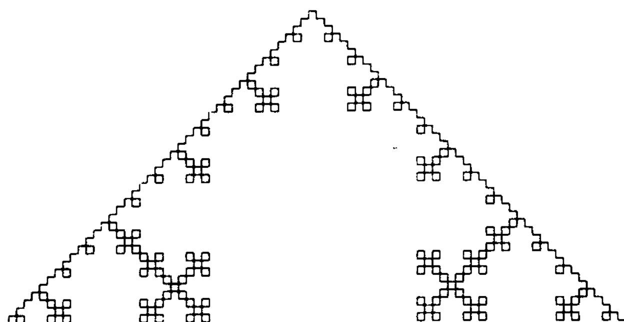


图 14-3

第二个例子是体积为 0、面积无限的曲面，维数等于 $\log 6 / \log 2 = 2.58497$。起始器是一个规则的四面体。对每一面的中间四分之一（等于以每边的中点为角顶的三角形）得到以比值 1/2 缩小的四面体。对所得的规则（斜和非凸）24 面体的每个面重复这个过程，直到无限。由第二阶段开始，添加的四面体沿着每条直线自接触但无自相交。它们最终遍及整个起始器。称生长在起始器的一个表面上的每四个形状为科赫金字塔。

科赫金字塔的秘密

科赫金字塔是一种不可思议的形状——从上面看是平的，但却富于密室而违背直观想象。

从上面看，它是一个四面体，以一个等边三角形为底面，其他三个面则是等腰三角形，在它们的 90°角顶处连接。如果把三个科赫金字塔放在一个正四面体的各面上，组合形状将是一个正立方体。

现在把这样的一个金字塔从它的沙漠地基上提起。从远处看，它的底面被分成四个相等的正三角形。但在中间那个三角形的位置有一个孔通向一个“一阶密室”，密室的形状像一个正四面

体，它的第四个角顶与金字塔的最上角顶一致。其次，当我们继续进行而察觉进一步细节时，我们发现形成密室底面和顶面四周的正三角形甚至并非光滑的。其中每一个都被一个二阶密室所打断。类似地，我们进一步探测到，二阶密室的每个三角形壁面在其中央部分有一个三阶密室。如此无尽头地出现越来越微小的密室。

所有密室加在一起，正好是科赫金字塔的体积。另一方面，如果把密室看成只有底面而没有其他三个侧面，则它们并不重叠。设想我们的金字塔是从小山中挖出来的，那么密室挖掘者将挖空它的全部体积，而只留下一个外壳。底面上这些墙面所在的曲线，以及密室“墙壁”，就是谢尔宾斯基垫片。

球形孔洞和点阵

Lieb & Lebowitz 1972 无意中对分形几何学作出了一个贡献，他们把 $\mathbb{R}^E$ 用半径具有形式 $\rho_k=\rho_0 r^k(r<1)$ 的球包容；单位体积内半径为 ρ_k 的球的数目具有形式 $n_k=n_0 \upsilon^k$，这里 υ 是一个整数，并有 $\upsilon=(1-r)r^{-E}$ 的形式，这就大大限制了 r。这样，间隙尺寸分布的指数是

$$D=\log \upsilon / \log (1/r)=E-\log (1-r) / \log r。$$

首先，在边长为 $2\rho_1$ 的点阵中央放一个半径为 ρ_1 的大球。大球外面的一个边长为 $2\rho_2$ 的点阵的角顶足够多而能作为下一批较小球的中心，如此等等。这个构造涉及 r 的这些上界：

对 $E=1, r\leqslant 1/3$；对 $E=2, r\leqslant 1/10$；

对 $E=3, r\leqslant 1/27$；当 $E\rightarrow\infty$ 时，$r\rightarrow 0$。

用不相重叠的许多球来包容 $\mathbb{R}^3$，进展可以快得多。例如，直线上的最大 r 是 1/3，相应于康托三分尘埃！且有 $r>1/3$ 的康托尘埃的存在性说明一维包容可以留下任意低的维数。然而，较为致密的包容包含较丰富的结构。

关于腔隙度的预告

在许多场合里，即使除了维数 D_T 和 D 外还加上树枝状阶数 R，仍然不足以完全确定一个分形。特别重要的是我发展的关于腔隙度的补充概念。腔隙度强的分形的间隙是很大的，反之亦然。基本定义已可以在此叙述，但到第 34 章再谈较为方便。■

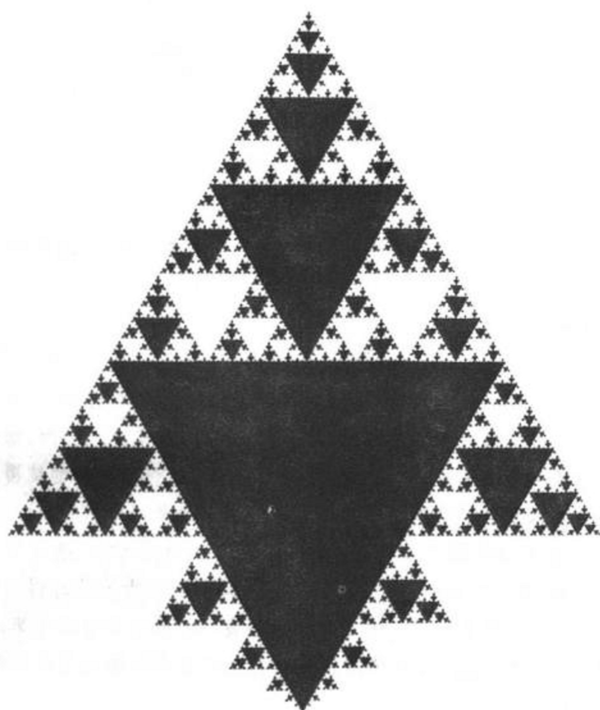


图 14-4 谢尔宾斯基箭头(边界的维数 $D\approx1.5849$)

在 Sierpiński 1915 中，起始器是[0,1]，发生器和第二阶段的折线图形如图 14-5。构形的下两个阶段如图 14-6。进一步的演化示如图 14-4 上部的"海岸线"(最大的实心黑色三角形以上)。

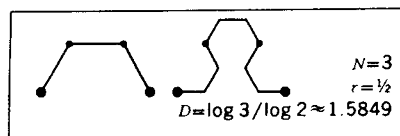


图 14-5

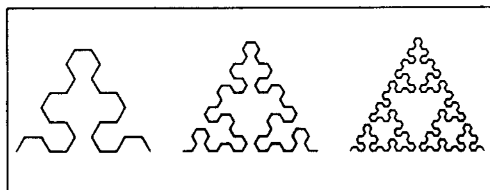


图 14-6

自接触　有限的构形阶段无自接触点，如第 6 章所述，但极限曲线却无限频繁地自接触。

铺覆箭头　图 14-4 中的箭头（横过来看，它像是一条热带鱼）定义为在两次连续回归到一个自接触点（即[0,1]的中点）之间的谢尔宾斯基曲线段。箭头铺在平面上，与邻近的铺覆通过凡克罗（*Velcro* 混合性的隐含：一条鱼的鱼翅恰好合于另外两条鱼的鱼翅）的梦魇般外推相互连接。进而，通过把四个适当选择的邻近铺覆融合在一起，就可以得到以比值 2 增加的铺覆。

谢尔宾斯基垫片的孔洞　我称谢尔宾斯基曲线是一个垫片，因为还有另一种基于割出孔洞的构造方法，这种方法在第 8、31 章和第 35 章中普遍应用。当起始器、发生器和两个相继阶段是图 14-7 所示的闭集时得到谢尔宾斯基垫片。这个孔洞发生器包括了上述的杆发生器作为专用的子集。

堤岸　当我在 Mandelbrot 1975 m 中研究某种堤岸时用到箭头曲线，那时我还不知道谢尔宾斯基的工作。■

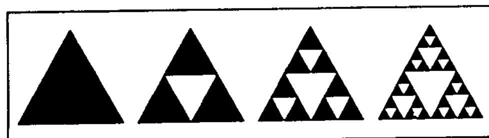


图 14-7

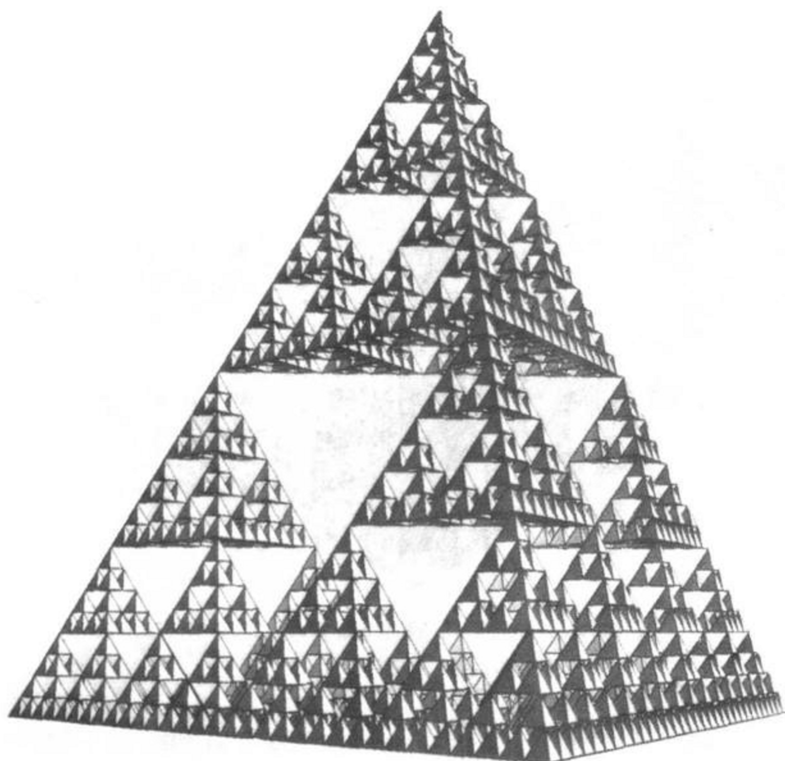


图 14-8　分形斜网(维数 $D=2$)

这种网是递归地得到的,其 $N=4$ 和 $r=1/2$,利用闭四面体作为起始器,四面体的一个集合作为发生器。

它的维数是 $D=2$。设把它沿着连接一对对边的二中点的方向投影。起始器四面体投影在一个正方形上,称为起始形。每个第二次发生的四面体投影在一个子正方形上,也就是起始正方形的四分之一上,等等。这样,网投影在起始正方形上。子正方形的边界相互重叠。■

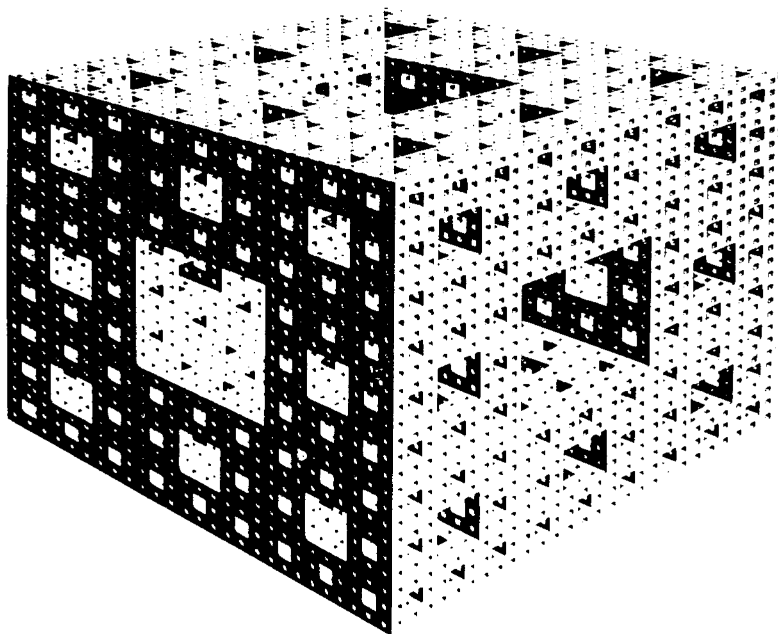


图 14-9　谢尔宾斯基地毯(维数 $D \approx 1.8928$)和门杰海绵(维数 $D \approx 2.7268$)

谢尔宾斯基地毯　在 Sierpiński 1916 中,起始器是一个镂空的正方形,发生器和随后两个步骤如图 14-10。其 $N = 8, r = 1/3, D \approx 1.8928$。这个地毯的面积为 0,孔的总周界长度无限。

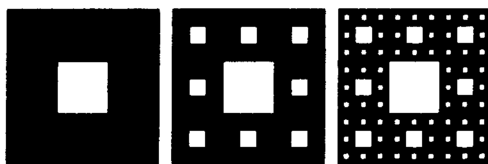


图 14-10

图 14-9　门杰海绵　构造原则是明显的。无限继续,遗留部分被称为门杰海绵。我很遗憾,在以前的版本中它错误地归于谢尔宾斯基(复制自伦纳德·M·布卢门撒尔和卡尔·门杰的《几何学研究》。)海绵与起始立方体的经线或对角线的交是三分康托集。

融合的岛屿 就像图 14-8 中的垫片一样，地毯也可以通过科赫递归的另一种推广得到，其中允许有自重叠，但重叠部分只计算一次。

为了得到一个垫片，起始器是一个正三角形，取发生器如图 14-11 左。为了得到一张地毯，起始器是一个正方形，取发生器如图 14-11 右。又遇到由第 13 章已知的两种现象：每个岛屿的海岸线是可调整的，从而维数为 1，垫片或地毯的维数表达了大陆支离破碎为岛屿的程度，甚于表达了岛屿海岸线的不规则程度。

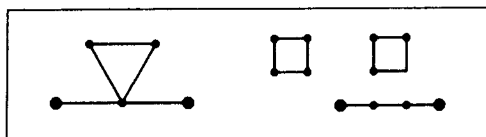


图 14-11

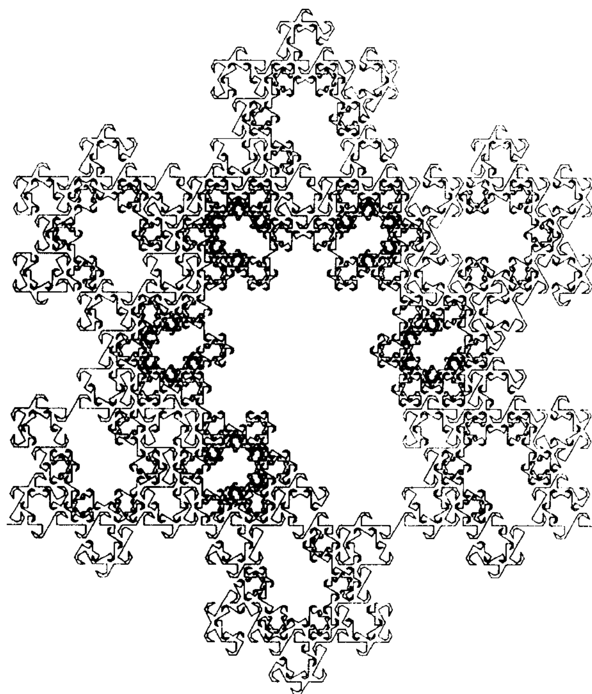


图 14-12 分裂的雪花走廊（维数 $D \approx 1.8687$）

在其他方面，结果就是不熟悉的了：第13章中的海洋是连通的，它看来是航道的适当拓扑解释。它不包括边界，因而在集合拓扑的意义上是开的。由现在的构造带来的新东西是：科赫岛屿有可能渐近地融合为一个实体超岛屿；没有大陆，海岸线组合在一个点阵中。

◁在拓扑上，每块谢尔宾斯基地毯是一条平面普适曲线，而门杰海绵则是一条空间普适曲线，也就是说，这些形状分别是平面中最复杂的曲线和任何高维空间中最复杂的曲线，见 Blumental & Menger 1970，第433页和501页。

▶ ▬

在很早很早以前和很远之外，大皇帝和他的侍从把他们的统治扩展到华丽的雪花长廊。出现了分裂，随后是战争，结束于驾崩。最后，聪明的长老划了一条线来由北到南分割走廊给争斗者。

迷宫之迷 谁控制长廊，如何从外面到达它？为什么某些长廊不能指向基本方位点？图5-1的猴树给出提示。

第五篇　无标度分形

第 15 章　具有正体积的曲面和躯体

分形曲线、曲面和尘埃(现在这些名词是为科学目的而描述和驯服的),仅仅是在渐近的或另外的极限意义下标度的。

本篇的第一章集中讨论具有正(非零!)体积的曲面,把相互矛盾的特性组合在一起多么有趣啊!我们是否最后又回到了对于自然哲学家毫无用处的数学怪物?回答再次是断然否定的。虽然相信它们在大自然中是没有的,但两位著名的纯数学家不知不觉地为我所要掌握的……躯体的几何学准备了正确的工具。

正测度的康托尘埃

作为第一步,先回顾一下三元集 $\mathcal{C}$ 的康托结构。它的长度为0(严格地说是线性测度为0)是从下面事实得出的,即所有中间三分之一孔洞的长度之和为

$$1/3+2/3^2+\cdots+2^k/3^{k+1}+\cdots=1。$$

但是 $\mathcal{C}$ 是完全不连通的,因此拓扑维 $D_T=0$ 与孔洞长度无关。实际情况是每个结构阶段都通过移去中心在"原"直线段中点的孔洞,而把前一阶段的每个直线段都分为两段,用 λ_k 来记孔洞与原直线段的长度之比,在第 k 阶段以后,所余下的直线段的累计长

度为$\prod_{k=0}^{k}(1-\lambda_k)$，当 $k\to\infty$ 时它减少到一个极限，记作 P。在康托的原始结构里 $\lambda_k\equiv 1/3$，因此 $P=0$。但是当$\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k<\infty$时有 $P>0$。在这种情形里，剩余集 $\mathcal{C}_*$ 具有正长度 $1-P$。该集是非自相似的，因此没有相似性维数，但是由第 5 章的豪斯多夫–伯西柯维奇定义可得出结论 $D=1$，从 $D>D_T$ 就得出 $\mathcal{C}_*$ 是一个分形集合，因为 D 和 D_T 都与孔洞长度 λ_k 无关，用它们的值来描述 $\mathcal{C}_*$ 是十分肤浅的。

这种结构在平面情形时更为清晰，从一个单位正方形中切去面积为 λ_1 的十字形而留下四个正方形。然后再从每个正方形中切去相对面积为 λ_2 的十字形。这样的级联就产生一个尘埃。其面积为$\prod_{k=0}^{\infty}(1-\lambda_k)$而 $D_T=0$，当该面积不为 0 时 $D=2$。

在 E 维空间中，我们可以类似地得到一个满足 $D_T=0$，和 $D=E$ 的具有正体积的尘埃。

缓慢地变化 log *N* / log (1/*r*)

◁虽然具有正的长度、面积或体积的康托尘埃不具有相似性维数，但它对于规定 $r_k=(1-\lambda_k)/2$ 并研究由 $D_k=\log N/\log(1/r_k)$定义的形式维数是有用的。

◁当 D_k 缓慢地变化时就体现出在第 5 章中当描述一个丝线球有效维数时的思想。在一条线段上，极限集 $\mathcal{C}_*$ 的维数 $D=1$ 是 $\log 2/\log(1/r_k)$的极限。此外，结论 $D=1$ 并不要求$\sum\lambda_k<\infty$而只要求较弱的条件 $\lambda_k\to 0$。因此存在三类线性康托尘埃：(a)$0<D<1$ 而长度 $=0$，(b)$D=1$ 而长度 $=0$，以及(c)$D=1$ 而长度 >0。

◁上述(c)类的对应物能在科赫曲线中出现，这只要改变每个构造阶段的发生器使它的 D 趋于 2。例如，取 $r_k=1/2^k$ 而对 N_k，因而对 D_k 都采用在图 6–15 注释中所讨论的最大值。此极限具有一种值得注意的各种性质的组合：它的分维 $D=2$ 对于曲线是非

标准的;但是它的拓扑维是标准的:$D_T=1$,而它的面积也是标准的:等于0。

◁同样的性质在第25章的布朗运动中也是存在的,但在那儿它们是当避开双重点时获得的。

◁正式维数也可以偏离 $D=2$。例如,填满平面的树结构的 k 个阶段可以用 $D<2$ 的阶段来完成。这个结构可以应用于某些河流树的模型,这种河流树似乎对内界限 η 以上的尺度范围是填满平面的,但对完全小于 η 的精细尺度范围是十字形的,这个 η 在荒芜的地方应该非常大,而在浸泡丛林的地方应该非常小,也许等于0。这种河流的有效维数对超过 η 的范围应是 $D=2$,而对低于 η 的范围是 $D<2$。▶

具有正面积的曲线

我们对尘埃的直觉是不完美的,因而对于正长度或正体积的尘埃不会感到困惑,但正面积的曲线真正是难以接受的。在 Lebesque 1903 和 Osgood 1903 中表明我们必需接受它们以后,它们就代替皮亚诺曲线而成为最主要的怪物。在举例以后我将说明这种想法与实际不符:在最原始的意义下,具有正体积的曲面十分接近于人类的心脏。

这种想法是推广图6-2的中点位移构造,我们保持海湾和海角,通过沼泽地三角形突起的每个三角形把它的基中心置于沼泽地之基的中点,对这新的元素,海湾和海角的相对宽度 λ_k 不再是常数,而是当 k 增加时要趋于0,用这种方法使 $\prod_{k=0}^{\infty}(1-\lambda_k)>0$。现在由沼泽地所覆盖的面积不趋于0,因此沼泽地的极限满足 $D=2$。另一方面,它又完全不同于任何维数为2的标准集合。它不仅没有内点而且是一条 $D_T=1$ 的曲线,因为对任何一点的邻域,只要仅仅移去两个点就能与集合中其余的点分开。

上述的构造仿效了 Osgood 1903,但对他构造时的奇特方法作

了简化,使之较易遵循,但是一种发现的实用性并不以引人它的原因来判断的。

动脉和静脉的几何学

摘录 Harvey 1628 中的话,“我们容许把血液的运动称为循环的,用同样的方法,就像亚里士多德所说,空气和雨仿照了高等人体的循环运动……类似地,在人体内通过血液运动……由于较暖和,较完美,多蒸汽、纯洁和有营养的血液使得体内的各部分得到滋养、抚育和加快增长;另一方面,由于血液与这些部分相接触而变得冷却、凝固,好比是枯竭了。”

哈维提出了血液循环的观点,认为几乎在人体每一点的很小距离以内都能找到动脉和静脉(也可见《威尼斯商人》),这种观点没有考虑毛细管,但是作为一级近似这是最好的,即要求在无限地接近它每一点处都应有一条动脉和一条静脉——当然,下面的情形要除外:对于一条动脉(或一条静脉)内部的点是不能十分接近于一条静脉(或一条动脉)的。

不同的表述(但是这种重新的表述作出的结果听起来多么奇怪啊!)在非血管的组织里的每一点应该位于两种血液网状组织之间的边界上。

另一个设计因素是血液十分昂贵,因此所有动脉和静脉的体积必需只占人体体积的一个很小的百分比,而大部分都留给非血管组织。

勒贝格-奥斯古德怪物对我们的躯体是非常基本的

从欧几里得的观点来看,我们的判据里包含着一种巧妙的矛盾。一种形状必需在拓扑上是二维的,因为它形成二块形状(拓扑上为三维)的公共边界,然而这就要求具有一个这样的体积,它不仅与它围住的形状的体积相比不可忽略,而且它要大得多!

分形方法对解剖学的优点是它显示出上述的要求是完全相容的。在前二节中描述的奥斯古德构造的一个空间变种满足我们强加于血管系统的设计的全部要求。

在这种构造里,静脉和动脉是标准区域,因为小球(血液细胞)能完全在它们内部被拉长。另一方面,脉管在全部体积中仅占很小的百分比。其组织是非常不同的:它不包括片,但是很小,这样动脉和静脉并不十字形相交,它是一个分形曲面:其拓扑维数是2,而它的分形维数是3。

再次重申,这些性质不再使人觉得过分,没有一个人注意到它们首先是从普通意义下创造的数学飞跃所引起的,我已证明,它们在直观上是不可避免的。此勒贝格-奥斯古德分形怪物对我们的躯体是非常基本的!

直观性:老的和新的

肺的导管和它的血管系统的组合也被证明具有一种非常有趣的构造,其中的三个集合——动脉、静脉和支气管——具有普通的边界。此种集合的第一个例子是由布劳韦尔建立的。当用这种方法引进时,布劳韦尔的构造完全与直观相符合。但是把它放到历史中展望,我们就必需回到传统观点的代言人哈恩那里。

“直觉似乎表明三国相会仅仅在孤立点出现……直觉上不能理解布劳韦尔模式,虽然逻辑分析上要求我们接受它。我们再次发现在简单和基本的几何问题里直觉是一种完全不可靠的导引,它不可能在数学学科中起到开拓和基础的作用,几何学空间是……一种逻辑结构……

“[然而,如果]我们越来越习惯于处理这些逻辑结构;如果它们渗透到学校的全部课程中;如果我们,比如说,从小就像学习三维欧几里得几何一样来学习它们——那么就没有人会认为这些几何学是与直觉相矛盾的。”

本书说明哈恩是完全错误的。为了驯服他自己的例子,我发

现为了完成新的任务，训练我们现在的直觉是很必要的。但它不容许特性作任何不连续的变化。哈恩作出了一个错误的判断和提出了一个毁灭性的分析。很久以前几何直观就认识到它需要具有奇特和曲折方法的逻辑学的帮助，为什么要使逻辑学从直觉中消失呢？

无论如何，典型的数学家关于什么是直觉的观点是完全不可靠的；不允许把它作为建立模型的指南：数学太重要了，以致不能把它放弃给盲目相信的逻辑学家。 ▬

第 16 章　树;标度剩余物;非均匀分形

本章讨论近乎标度化的纤维状分形树和其他的分形,也就是除了从分形上可忽略的一些剩余物以外都已标度的分形。注意到在这些集合的不同部分 D 和 D_T 取不同的值,在此意义下分形是非均匀的。与此相反,迄今为止所讨论的分形都具有均匀特性。

标度剩余物集的概念

标准区间　包含右端点而不包含左端点的半开区间$(0,1]$是标度的,因为它是 $N=2$ 的缩小复制品$\left(0,\frac{1}{2}\right]$和$\left(\frac{1}{2},1\right]$ 的并集。与此相反,开区间$]0,1[$没有标度,因为它除了含有 $N=2$ 的缩小尺度标度复制品$\left(0,\frac{1}{2}\right)$和$\left(\frac{1}{2},1\right)$以外,它还包含了中点 $x=\frac{1}{2}$。我建议把此中点称为标度剩余物。它在 D 的计算以及其他目的中都可忽略。一个物理学家会说,它与整体和各部分相比具有较小的物理量级。

上述例子引导我们像学究式那样复杂地来考察剩余项而不影响到标度的结果。但是在关于我称为非均匀分形的类似例子里,其剩余物可以是十分重要的。一个非均匀分形是具有不同分维和拓扑维的部分之和(或差)。其中的任一部分都不可完全不考虑,即使在分形和拓扑上都可忽略。这两种观点在其重要性和感兴趣效果上常常有抵触。

康托尘埃和孤立点　通过把区间$[0,1]$分为四部分而保留$\left[0,\frac{1}{4}\right]$和$\left[\frac{3}{4},1\right]$来构造康托尘埃,另一种结构是从$[0,1]$中去掉

开区间$\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$和$\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$，它产生与上面同样的尘埃再加上剩余点 $x=\frac{1}{2}$。这孤立的剩余物并不是一个分形，因为其 D_T 和 D 都等于0。

在空间推广到 $\mathbb{R}^E$，康托尘埃满足 $D_T=0$ 和 $D>0$，而非分形剩余集满足 $D_T=D=E-1$。这剩余物就可在拓扑上和/或分形上完全控制尘埃。

分形树骨架，它的剩余项是区间

图 16-1 表明了具有无限细茎的伞状树的例子，它们没有生命能力，在第 17 章中经修正后作为植物模型是很适当的。而树的骨架在许多数学部门里都引起极大的兴趣。在拓扑学家看来它们都是相同的，因为在他们看来任何树都是由无限多条弹性线构成的，而我们的树可以拉长或者缩短而变成另一棵树。然而这些树在直观上以及作为分形是相互不同的。

分枝顶端 一棵树是分枝顶端和枝管两大部分之和，它们的维数以十分有趣的形式相抵触。其中的分枝顶端集合比较容易研究。它是一个分形尘埃，与我们许多已知尘埃相类似，它是标度的，$N=2$ 而 r 在 $1/\sqrt{2}$与 0 之间，因此 D 能从 2 到 0 之间变化，虽然图 16-1 上的图形的 D 限制于 1 与 2 之间，在每个分岔点的内分枝角取成相同的角度 θ：它能在一个很大范围内变化而不影响 r 和 D。因此对各种各样的树形状容许同一个 D。

当 $1<D<2$ 时，这些树在 $\theta<\theta_{crit}$时是自重叠的，因此自回避性使 θ 的选择变窄。在图 16-1 上的树满足 $\theta=\theta_{crit}$，而我们首先将要讨论的是满足 $\theta=\theta_{crit}+\varepsilon$。

树 粗看起来整个树似乎是自相似的，因为每一个分枝及其携带的枝管是整体的一个缩小尺度的形式。但在事实上，在主分岔上的两个分枝加起来并不就是整体，除非再加上一个剩余物：树干。在直观上，这剩余物是决不能忽略的，事实上我们认为树的树干和

分枝比分枝顶端更为重要，在直观上，分枝“决定了”分枝顶端。

还有，不管怎样的 D 值，自回避树的分枝顶端形成的尘埃 $D_T=0$，而分枝形成的曲线 $D_T=1$（不管是否把它们的顶端包含在内），因此，分枝在拓扑上占主导地位。的确，把一点 P 和它的邻域分离出来，就需要消除 1 点（如果 P 是分枝顶端）或 2 点（如果 P 位于分枝内部）或 3 点（如果 P 是交叉点）。

现在回到分形观点，分枝顶端的维数是 D，而每个分枝的维数是 1。总的说来，这不是标度，但由豪斯多夫–伯西柯维奇公式定义的、它的分形维数不能小于 D 或 1，结果就要大于 2，让我们重新分别说明得到的两种可能性。

分形树 当 $D>1$，整个树的分形维数也是 D。即使分枝在直观上和拓扑上是占统治地位的，它们在分形上可忽略！因为 $D>D_T$，此树是一个以 D 来度量分枝充足性的分形集。这样，我们遇见了分形维数的另一方面，增加到作为度量不规则性和支离破碎性的作用，在第 17 章里，当我们转到非纤维状树时就会发现，一个光滑的但包含有非常局部的鲜明“丘疹”的曲面可以成为比一个标准曲面还“更”标准。

子分形树 当 $0<D<1$，相反，整棵树的线性测度（累计长度）是有限且为正的，所以它的分形维数必定是 1。这样，$D=D_T$ 意味着该树不是一个分形。

事实上，如果我们这样来选取单位，使树干的长度是 $1-2r$，则分枝（看作开区间）就能重新放置于 $[0,1]$ 上的线性康托尘埃 $\mathcal{C}$ 的间隙中，此 $\mathcal{C}$ 具有与分枝顶端同样的 $N=2$ 和 r。类似地，分枝顶端也可重新放置于 $\mathcal{C}$ 上。我们看到，区间 $[0,1]$ 完全被我们树上点的映象所填满，只有那些没有被映射的点与分枝结合成一体，它们形成可数的剩余物。

关于图 8–5 的说明提醒我们，魔鬼阶梯曲线是很特别的，但不是分形。如果这种形状变得很重要了，就需要给它取个名称，现在就称它为次分形。

作为最后一个注释，由维数为 $D^*>1$ 的分形曲线代替直角分

枝。当 $D < D^*$ 时，树的分形性质由分枝所决定，而这树是维数为 D^* 的分形。但是当 $D > D^*$ 时，树就是维数为 D 的分形了。

非均匀分形，等等

现在我们准备给出一个新的定义。一个分形 $\mathcal{F}$ 被称为均匀的，如果由 $\mathcal{F}$ 与圆心在 $\mathcal{F}$ 上的圆盘(或球)的相交所得到的任何集合都有同样的 D_T 值而且 $D > D_T$。

我们看到，科赫曲线、康托尘埃、树枝状曲线等等都是均匀分形，但是上节的 $D > 1$ 的树骨架是非均匀分形。

事实上，树可称为部分分形。它们与圆心在分枝上的足够小的圆盘的交集不是分形而是由一个或几个直线段所组成的。

分形伞顶

迄今为止，图 16-1 是作为几乎没有自回避的树的图例。但事实上，这些树的顶端是渐进地自接触的。因此，分枝顶端的集合终止于一个 $D_r = 0$ 的尘埃，而由 $D_T = 1$ 但不改变其分维的曲线所代替。对这类新的分形曲线，我建议称为张开的分形伞顶，注意到它们竖直阴影的长度随 D 而增加。

在最终的形状以外围住开区域的曲线称为"分形伞顶"。由于打开的伞顶没有"折叠"，随 D 增加而算得的伞顶的维数还得不到 D。

因为对于树主要考察的是光线，张开的分形伞顶折叠末端的分枝可以想象会减少。树的设计者或是允许某些分枝成长，然后由于缺乏阳光照耀而枯萎，或是写一个比较复杂的程序以指导这些分枝永不生长，我会选择较简单的程序。

当 $D < 1$ 时，维数为 D 的尘埃合并到一条曲线是不可设想的。当我们由减小内分岔角 θ 来寻找自接触时，直至 θ 变成 0 也不能达到目的，而该树已倒塌成一个直线段了。另外，如果我们保持树

的竖直阴影为固定长度1,而由伸长分枝来寻找自接触,这个目的永远不能达到:该树趋向于一个线性康托尘埃 $\mathcal{C}$,再加上 $\mathcal{C}$ 的每一点向下挂的半直线。

没有剩余项的树

分形树并不局限于前面几节里的那些结构。例如,回想一下第184页上的结构。另外,取科赫发生器为一个叉架,它以长度 r_t(顶),r_b(底)和 r_s(边)为分枝,使得 $r_t^2+r_b^2+2r_s^2<1$。在由此产生的分形树里,每个分枝,不论它怎样短,都被称为子分枝。如果根点排除在外,则这种树是标度的而没有剩余物。

高能物理学:射流

Feynman 1979 中报道说,分形树使他能够目视和模拟当粒子以很高能量对面碰撞时所形成的"射流"。这种思想由韦尼察诺在CERN报告中披露。 ▬

图 16-1 分形伞树和分形伞顶

图16-1上的树具有无限细的茎,而且所有分枝之间的夹角都是同样的 θ。D 的范围从1变到2。而对每一个 D,把 θ 取为与自回避性相容的最小值。

对刚超过1的 D(图16-1的顶部左边图),结果是像小刷帚,然后像扫帚,当 D 增加时,分枝就张开了,而轮廓线或者"伞顶"张开到折叠在日光下隐藏起来。人们可回想起(芸薹)*Brassica oleracea* 种植的各种花:菜花和花菜。把菜花和花菜之间几何学上的差别部分用分形维数使之定量化是有意义的吗?

对于较大的 D(图16-1底部,左边图),一个法国人回想起了符邦[①]的防御工事。值 $D=2$ 和 $\theta=\pi$ 产生一棵填满平面的树。要允许 $\theta>\pi$(图16-1底部右边图),我们必须再次减小 D,而雨伞的所有伪装都由足以表现印度古典

① 符邦(Marquis de Vauban, 1633~1707),法国军事工程师及元帅。——译者注

舞蹈雕塑的歪扭图样所替代。

在最有名的图画之一,论增长和形式(Tompson 1917)中,不同种类鱼的头颅在欧几里得意义下通过光滑和连续变换能相互映射。把现在的树相互映射的变换有点相同的灵感,但有非常不同的精神。■

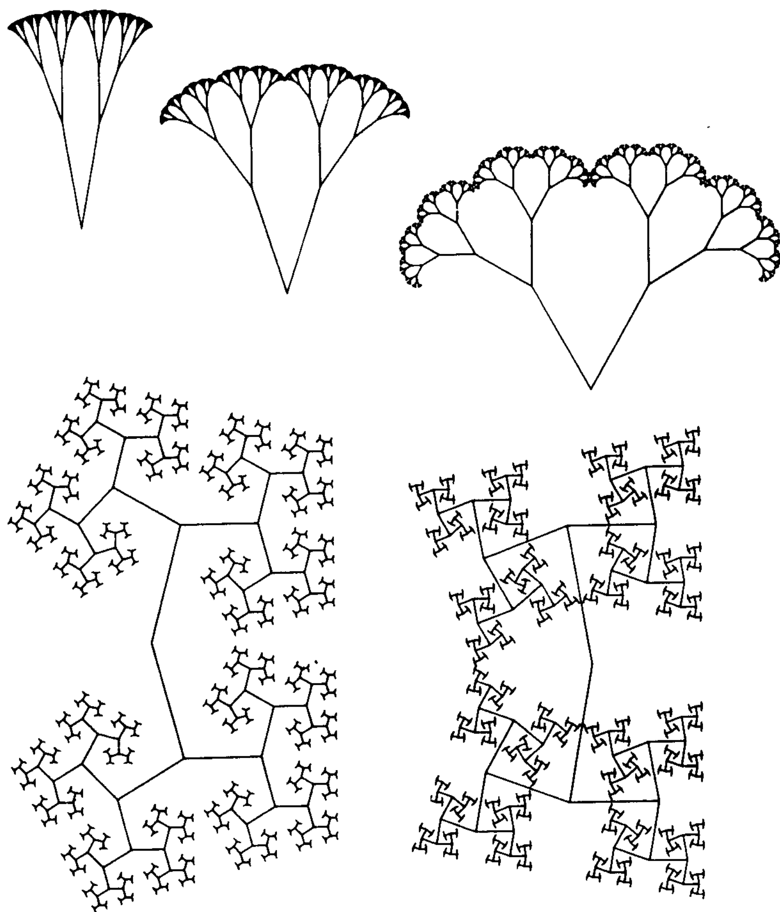


图 16-1

第 17 章　树和直径指数

本章讨论包含在肺、血管系统、植物树、河流网等等之中的、在几何上嵌入的、厚管状的“树”。

这些自然对象是极为熟悉的。事实上，没有其他对象能像它们那样刻划具有大量不同线性尺度因素的形状的想法。不幸的是，树不如它们看上去的那样简单。以前没有处理它们，是因为在前一章遇到了一个复杂问题：树不是自相似的。我们希望自相似最好对分枝顶端是成立的，就像我们在本章里所假定的，树除了包含顶端的分枝维数 D 以外，还包含有一个称为直径指数的参数 Δ。当树是带有一个剩余物的自相似，就像第 16 章中所述，Δ 与分枝顶端的 D 相一致。否则，Δ 和 D 有不同的特性，而我们来研究一种生物学家称为“异质”的现象。我们讨论两个例子：$\Delta = D$ 和 $\Delta < D$。

直径指数 Δ

达·芬奇在他的《笔记本》的第 394 个注中指出，“一棵树的全部分枝在长大的每个阶段，当把它们放在一起时，等于树干（它们下部）的厚度”。形式的表达式如图 17-1 所示。植物树的分枝在分叉前后的直径分别为 d、d_1 和 d_2，它们间满足关系式

$$d^{\Delta} = d_1^{\Delta} + d_2^{\Delta}$$

其中指数 $\Delta = 2$。其复杂性在于：如果把分枝的厚度计算在内，植物树就不与带有接近于填满空间的树皮自相似。的确，自相似要求 $\Delta = D$，而接近填满空间就要求 D 接近于 $E = 3$。

换句话说，不论何时上面的关系式能成立，Δ 就是加于 D 的一个新参量，它称为直径指数。已有许多人研究过它，相互间常常

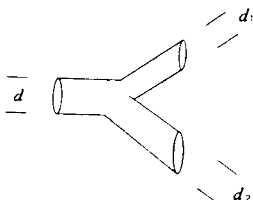


图 17-1

不了解,有参考文献(Thomson 1917~1942~1961)为证。本章要证明,对于支气管有 $\Delta\approx3$,对于动脉有 $\Delta\approx2.7$。植物树接近于达·芬奇的 $\Delta=2$。而对于河宽有 $\Delta=2$。本章还要探索几个物理学、哲学和几何学的有关 Δ 值的结果。

◁侧维数　在 1977 版的《分形》一书中,称 Δ 为侧维数(来源于 $\pi\alpha\rho\alpha$ = 旁),但我不再倡导这一术语,Δ 的作用很难处理——有时作为维数而有时又不是——在 Besicovitch & Taylor 1954 中起了指数的作用,见第 39 章。▶

肺的支气管树

作为第一个例子,肺气管的精细部分在全部实际目的中是自相似的,具有 $\Delta=D$ 和 $\Delta\approx E=3$。

我们不是非常清楚肺的内部形状,如果能插入一张实际的照片对此将有启发(在 Weibel 1963 和 Comroe 1966 中有例子)。但是本书的宗旨(这可能是唯一抱歉的场合)是建立模型,因此一种简短的口头描述就足够了。把肺中的空气用非硬化的塑料代替,以后塑料硬化和细胞组织分解,留下一个极为沉重的分枝树,它以一定的密封度,均匀性和视觉的不可入性充满了肺的轮廓,这是植物树永远达不到的。在我们不予关心的头两个分岔和最后三个(它将导致气泡,在第 12 章中讨论过)之间,存在有 15 个惊人规则性

的逐次分岔。

根据 Weibel 1963 中的数据，在一阶近似下气管段都是彼此相似的，而且 $\Delta\approx3$。气流是在分岔的分枝之间被分开的实物的数量，因此气流等于气管的横截面积乘以空气速度，我们看到速度像 $d^{\Delta-2}$那样变化：当空气流向细的支气管时要减速。

精确值 $\Delta=3$ 是重要的。Murray 1927 中第一次的解释包含有一个争论，因此 Thompson 1942 第 954 页，或 1961 第 129 页提出："分枝面的增长不久就意味着增加摩擦，(流体)流动的步伐就放慢了，因此分枝就必须比第一次出现的有更大的容积。有问题的不是容量，而是阻力。一般说来，答案是在系统的每一部分，在分岔前后阻力与横截面的比值是相等的，就像整个系统的最小可能阻尼条件。因此，总的分枝横截面要大于与阻力成正比的树干。这个近似的结果对学水力学的学生是很熟悉的[现代的处理可见 Hersfild & Cummings 1967, Willson 1967]，即阻力最小而条件最佳。"当全部分枝比是 $2^{1/3}\approx1.26$ 时。

因此，$\Delta=3$ 是目标确定的设计或者要努力达到的有选择的发展中的最佳值。当然，默里的最佳判据纯粹是局部的，设计者对于局部的最佳部分是否能构成为合适的整体永远不会有把握。

以支气管包装三维空间

我对 $\Delta=3$ 的另一种分形观点是非常不同的：它对肺的胎期生长和肺气管的充分生长的形状产生一种非顽固的几何约束的影响。一个明显的优点是，这里分枝比 $2^{1/\Delta}\approx2^{1/3}$不一定是遗传学规则(就像在默里方法中的实例)的一部分。

基本证据是这样的，一个肺的胎期从芽开始生长，芽生长为支气管，它又生成两个芽，每一个又重复上面的过程。此外，这种增长是自相似的。(带有树干作为剩余物！)为了说明自相似性，我们不要求这是最好的，而只要是最简单的：这个控制生长的程序是最短的，每一步都是在较小的尺度，或者在前阶段生长以后的同样尺

度上重复前面的过程，如果是这样，那么生长的结果完全由分枝的宽度/长度的比值和直径指数所确定。我们还需要增加一个规则，以对停止生长作标记。

现在，依赖于 Δ 值（宽度/长度之比值是完全固定的），按照这些规则，生长达到下列三种后果之一：(a) 在有限阶段以后，分枝从生长的空间中向外长出来；(b) 分枝永不充满超过有效空间的一部分；或者(c)它们发现有效空间正是它们所需要的。当我们希望此极限是充满空间的树时，没有详细的指令要编入到生长程序中，因为对空间的竞争对不确定性留下很少一点地方，过程的二维缩减已图示于图 17-3 至图 17-5，我们可从图中看到，当分枝的宽度/长度之比值减少到 0 时，填满平面的分枝比增加到 $2^{1/2}$，就得出 $\Delta = E = 2$。类似地，对应于无限细的分枝，填满空间的分枝比是 $2^{1/3}$，由此得出 $\Delta = E = 3$。

因为 $\Delta = 3$ 对应于无限细气管的极限，它不能真正实现。多么遗憾，因此由无限细分岔延续至零而构成的树具有充满空间的"皮肤"。上面这个性质会给出一个目的论的解释，以与默里的解释相对抗：从在空气和血液之间作化学交换的目的而容许最大可能曲面的观点看来是最好的。

但是实际的气管并不是无限细的，所以我们能够获得的最好情况是 Δ 和 D 的值稍低于 3，它与经验上的明显性容易相容。这包含着在所有分枝点上的同样程度的不完美性——但这个性质是作为带有剩余物的自相似性的次要结论得到的，而并不需要作为一个目标来建立。

维数　分枝合成一个标准集：在拓扑上和分形上的维数为 E。当每个分枝的皮肤是光滑的时，全体皮肤具有维数 Δ。

气胞的内界限

通常，内插更细的支气管要终止于一个界限。这种界限是在第 15 个分岔以后逐渐形成的，而我发现它具有优美的几何标记。

一个基本标记是这样的，当无限自相似分岔要最终充满全部可用的空间，它进行得是很慢的，这样肺的头 15 个分岔阶段仅仅充满了肺腔的一小部分。为了用很少几个阶段就充满余下的空间，此气管必须做得比由自相似外推法得出的要显著地大。的确，Weibel 1963 中第 123 ~ 124 页可理解为一种表征，即在超出第 15 阶段以后，气管的宽度就停止减少（不再定义 Δ）。而气管的长度要比由相似性所要求的长，最终的倍数是 2。因为图 17-4 和图 17-5 显示出自相似分枝进入到最靠近于可用间隙的大约一半道路，倍数等于 2 是可以明显看出的，并也表明设计肺的许多程序由空间性质所施加而不需要另外编入。

更多的血管系统几何学

现在我们转向第 15 章的要点，那里我提出勒贝格-奥斯古德分形怪物是我们躯体的实质。赋予一个分枝区域 $\mathscr{A}$（动脉）的体积大约是区域 $\mathscr{B}$（人体）体积的 3%，但假定可无限地接近于 $\mathscr{B}$ 的每一个点，我认为 $\mathscr{B}$ 的分枝必须比在自相似树中更快地变细。现在我们已经确认在某些情况中可用 Δ 度量变细的比例。我们能问一下对动脉 Δ 是否是确定的。

不仅 Δ 在 8 至 30 个分岔的一个宽子域里是确定的，它已经在心脏和毛细管间被观察到了，而且这个事实被人们知道已将近一个世纪了。的确，Thoma 1901 和 Groat 1948 中总结了他们的实验发现而断言 $\Delta = 2.7$。他们的估计由 Suwa & Takahashi 1971 出色地证实了。

植物树

在把树这个词应用于比喻的对象以后，我们回到植物学家所研究的树。分析将会建议"标准"值是 $D = 3$ 和 $\Delta = 2$。它们几乎是普适的，然而植物形状有着惊人的多样性，特殊的偏离比"标准"

更感兴趣。$\Delta=2$ 的一个结论是看到在肺模型的接近自相似分枝的后面,植物分枝是极端稀疏的;我们不能看透一个肺模型,但我们能看透一棵无叶的树。

关于 D 和 Δ 采用物体和曲面的整欧几里得维数的原因,用汤普生的话说,“树是由简单的物理规则所支配的,而这种规则确定了在体积和面积中的相对变化。”在 Hallè, Oldeman & Tomlinson 1978 中用更为专门的术语写道:“在树里的能量交换问题能够简化,只要把树看作一个系统,其中尽可能大[的面积]用体积极小的物品去填充,而同时又要保证能排出吸收的能量。”因体积和面积在欧几里得意义下是不可通约的,树建筑的几何学问题在本质上是一个分形问题。当 D 和/或 Δ 不再是一个整体时,问题的分形特征就更加明显了。

植物树的 D 和 Δ

值 $D=3$ 读者熟知,最大可能的树叶面积由充满空间的曲面来实现——以灌木作为近似,它们的叶子或尖针非常接近于某个轮廓线内的每个点(除非可能我们忽略了果核)。要允许射进阳光和透风,只要非常小的 $3-D$ 就可以了。

雨伞 然而,各种各样的附加约束迫使树构造可以阻止 $D=3$ 的实现。仅有的标准取代物是一个维数 $D=2$ 的标准面,例如隐藏空心叶子但分枝是交叉的球面“伞”的曲面,这就是为什么在 Horn 1971 中限制自己是标准几何学而又允许 $D=3$ 或者 $D=2$。然而 $D=2$ 不存在明显的优越性:事实上,为了以全球面伞为末端,分枝必须遵循非常特殊的法则。

另一方面,“树建筑”的设计自由度因其为分形而无限地增加。首先,许多大树的重复性的扇形曲面可以由维数 D 在 2 与 3 之间的标度分形来表示,而且能够根据 D 值而加以区分。花叶和菜花也想起 3,但它们提出不同的课题,我们下面就要讨论它们,我们能够想象出维数低于 2 的那种稀疏而向上爬的植物(猜想设计得

很“和谐的”好的树也是 $D<3$ 的分形）。

值 $\Delta=2$　达·芬奇在本章开头所说的话对肺（$\Delta=3$）和动脉（$\Delta=2.7$）是不成立的。但植物解剖学不同于人体解剖学。值 $\Delta=2$是基于把树人为地想象为有固定直径的非分枝的脉管丛，把根与树叶相连通并占有每个分枝横截面的固定部位。齐默尔曼告诉我们，这种想法就被日本工作者称为“气管模型”。

Δ 的度量　经验的证据看来是惊人的缺乏和间接化。Murray 1927，（摘自 Thompson 1917）从经验上发现，（分枝重量）正比于（分枝直径）^{M}，其中 $M\approx2.5$。但是我认为他的 M 比较大。他主张 $M=\Delta$，但是我自己的分析得出 $M=2+\Delta/D$。对于 $D=3$，Leonardo 的 $\Delta=2$ 的值对应于 $M\approx2.66$。当 $M\approx2.5$ 会给出 $\Delta=1.5$。最近，麦克马洪教授友好地通知我有关 3“麦克马洪树”的数据用于 McMahon & Kronauer 1976。并且他们已经作了分析，把 d_1/d 记作 x 和把 d_2/d 记作 y，我们这样来寻找 Δ 值，即使 $X=x^\Delta$ 和 $Y=y^\Delta$ 位于直线 $X+Y=1$ 上。不幸的是，对每个 Δ 的试验结果都极为分散。因此，对 Δ 的估计是十分不可靠的。还有，值 $\Delta=2$ 是没有错误的，而建议稍小于 Δ。目前可靠的结论为，$\Delta=2$ 是合理的初步值。但树建筑是偏于保守的，它下一代的分枝必然严格地变细。

$D=3$ 和 $\Delta=2$ 的推论　第一个推论是，分枝的树叶面积正比于分枝外形的体积和分枝的横截面积。这个论断在经验上是正确的。这是由胡伯尔在 1928 年作出的。

另一个推论是比值（树高）^{3}/（树干直径）^{2} 对每一段都是常数，而且等于比值（分枝排水区域体积的线性尺度）^{3}/（分枝直径）^{2}。我们也可以期望这个比值在各段之间的变化比较小。注意到风作用在光杆树（相应于带树叶的）上的力大致正比于分枝（相应于分枝和树叶）面积和正比于该模型的（高度）^{3}，而树杆的反阻力正比于（直径）^{2}。这就建议这些量的比值是个安全因子。

在具有 $\Delta=2$ 和 $D=2$ 的伞形树中，比值（密度）^{2}/（树干直径）^{2} 是常数。更一般地，比值（高度）^{D}/（树干直径）$^\Delta$ 也是常数。

关于动物后腿骨的插话　高度和直径之间的关系，是具有

$D=3$和 $\Delta=2$ 的植物树的特征，也可用于动物的骨骼，其主要支撑骨的直径是 d。

格林希尔的弹性标度

虽然肺和血管系统的树是从外部供给的，大多数植物由它们自己供给。格林希尔（摘自 Thompson 1961）在这一点上引入了与几何相似性相反的弹性概念。静的弹性相似性的思想是这样的，树的总体高度必须不超过一个同样底部直径的均匀圆柱在它自身重量载荷作用下临界屈曲高度的一个固定百分比。这个要求产生的结果，与 $D=3$ 和 $\Delta=2$ 的分形精确地相同。因此，一个具有填满空间的树叶的“管道模型”树将不会弯曲。

McMahon & Kronauer 1976 中详细说明了格林希尔的思想：他们引入动力弹性相似性，也得到了同样的结果。

$D=\Delta<3$ 的植物

在某些植物中，主杆不但承担重量和输送液汁，而且也用作储备营养。如果是这样，甚至当血管系统服从“管道模型”时，就不需应用值 $\Delta=2$ 了。

图 17-2 是图示的一个例子（在表现出 $D-1$ 和 $\Delta-1$ 的简化平面中），那里的分枝顶端形成一个非标准的“伞”，具有 $D<3$，和 $\Delta=D$。我们看到几何花菜的形状有空集夹杂着……就像植物花菜。这仅仅是一种巧合吗？由几何学预先规定的特征不需要连累遗传学编码。

更多的关于人脑的几何学

当我们在第 12 章讨论人脑的曲面时，没有考虑把不同部分相连在一起的轴突网络。在小脑的情形里，轴突与外部曲面相连，而

我们要研究包住一个白色物质树的灰色物质曲面。我修订了第12章关于这种树的论点，并发现由于在体积面积关系式中的最终修正项改善了对数据的拟合。但要在这里讲清楚就显得太长了。

神经分枝　在哺乳动物小脑里的普尔钦(Purkinje)细胞，实际上是扁平的。而它们的树枝形成一个填满平面的迷宫。从哺乳动物到鸽子、鳄、青蛙和鱼，填满的程度依次减少(Llinas 1969)。如果相应的 D 也减少将是很好的，但神经是分形的概念仍然是一种猜想。

拉尔定律　Rall 1959 中观察到保持量值 d^{Δ} 而 $\Delta=1.5$ 的神经状树在电学上等价于圆柱，因此研究起来特别方便。进一步的细节在 Jacket et al. 1975 中给出。

密苏里河有多宽

现在转到河流，不管它概念的重要性，在第7章里我的“皮亚诺”模型仅是一个一阶近似，特别是它推出河流的宽度为0，虽然实际上它们具有正的宽度。

一个重要的经验问题是，河流的分岔是否全部具有同样的直径指数 Δ。如果 Δ 的确是确定的，下一个问题是 $2-\Delta$ 是等于0还是大于0。据我所知没有直接的试验，但是通过一条河流的流量 Q 在分岔中保持不变，因此能由 d^{Δ} 代表，默多克(见 Leopold 1962)发现 $d \approx Q^{1/2}$，因此 $\Delta=2$。此外，河流的深度正比于 $Q^{0.4}$，而它的速度正比于 $Q^{0.1}$。指数正好加成 $0.5+0.4+0.1=1$。

G. 莱西在30年代观察到 $\Delta=2$ 对于印度的稳定的灌溉渠道(这是一个完全确定的水力学问题)也是成立的。因此我们可以期望用流体力学来阐明默里关于肺功能的论证所起到的作用。

$\Delta=2$ 具有一个有趣的含意：如果把河流作为正确的相对宽度的带状画在地图上，要从河流树的形状来猜测地图的比例尺度是不可能的。(对于河流的弯曲情况也是不可能的，但这是完全不同的事情。)

那些相信达·芬奇知道每一件事情的人会在这一章开头的那一段引证继续读到值 $\Delta=2$："河流（溪）在其流过的每个阶段上的全部分枝，如果它们有相同的速度，则等于主流的整体。" ▬

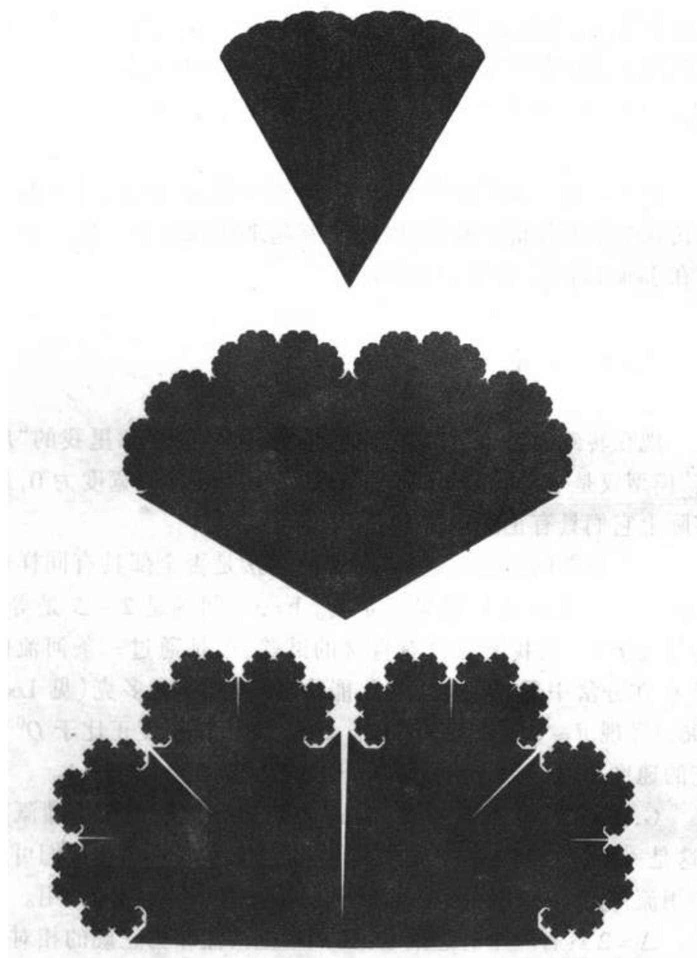


图 17-2 植物花的平面分形模型

从图 16-1 中选一个伞形树（$\theta<\pi$），对它的每个手柄却用一个[以该手柄为一边、手柄两端的角度是 $\theta/2$（根端）和 $\pi-\theta$ 的]等腰三角形替代。因为 θ

是该树避免自重叠的最小值,这变粗的三角形树杆也不重叠而且充满于伞的“内侧”。为使图形更加清晰,已对合在一起的三角形的一边稍作修剪。

注意到当 D 接近于1或2时分枝迅速变细,当空间(图形)的 D 接近于2或3时也一样。能在实际上观察到相应于最厚可能分枝的 D 吗? ▬

图 17-3 至图 17-5 填满平面的递推支气管

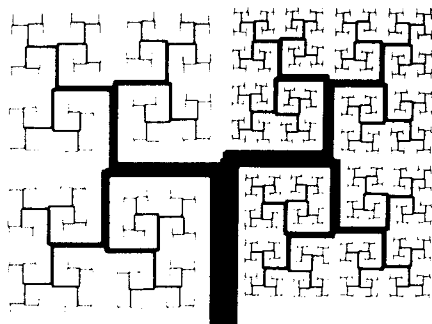


图 17-3

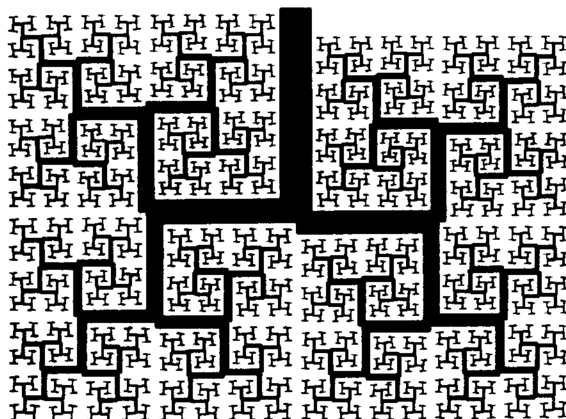


图 17-4

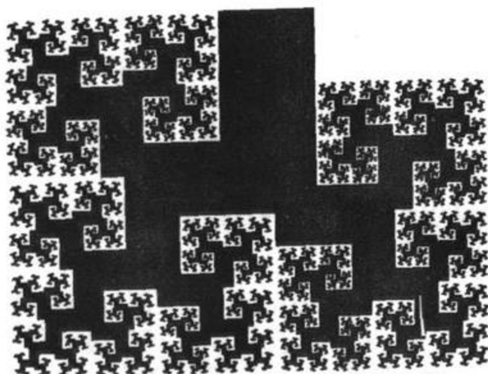


图 17-5

图 17-4 和图 17-5　在科赫递推中,在有限近似下的每一直线段最终中止于很短的一段。在许多应用中,推广这个过程为容许某些段是“不再繁殖的”是很有用的。这样,在后面的阶段里它们仍然保持不相交。

这里,这种推广的方法应用于长大的“树”。我们从带有不会生长的边和会生长的“芽”的树干开始。此芽长出两个“分枝”,而每个分枝又只有两个终端的“芽”是生长的,如此等等,直至无穷。生长是非对称的,以保证树能充满于大致是矩形的平面部分,且没有间隙和重叠。然而,渐近的自接触是不可避免的,而且的确在“树皮”线上的每一点也可作为分枝顶端的极限而得到。

由主杆开始构造的“子树”是相似于整个树的,有两个不同的相似比 r_1 和 r_2。整个树是不自相似的,因为除子树以外还包含有树干。另一方面,渐进的分枝顶端集是自相似的。从图 6-22 和图 6-23 的说明中可知,相似维是 D,它满足方程 $r_1^D + r_2^D = 1$。在图 17-4,顶端几乎是填满平面的,而 $2-D$ 是个小量;在图 17-5,D 比 2 小得多。

顺便指出,直径/长度的比值已经建立,整个空间的图形的余维数 $3-D$ 小于其平面简化图形的余维数 $2-D$。

图 17-3　此合成图形产生于科赫树构造,它的发生器在每个阶段都作改变,使得其宽度和长度的比值减少为 0。对合成图的左边,此比值的减少比右边更快。因此分枝顶端不再是自相似的。然而,其顶端能达到维数 $D=2$。这是像第 15 章中那样达到同样目的的一种新方法。■

第六篇　自映射分形

第 18 章　自反演分形、阿波罗尼网和皂膜

本书的大部分，献给那些在相似性下完全不变的，或者至少是"几乎"自相似的分形，结果读者可以形成这样的印象，把分形的概念与自相似性结合为一体，要强调这不是同一回事，但是分形几何必须从研究直线上的分形对应物开始……称它们为"线性分形"。

第 18 章和第 19 章作为下一步，它们分别描绘出这些分形的性质：即在几何反演下不变的最小集，以及在自乘形式不变的最大有界集的边界。

有两族本质上不同的自相似分形，适当的线性变换保持标度分形不变，但是为了使它们产生我们必需指定一个发生器和各种不同的规则。另一方面，分形由非线性变换所"产生"的事实就足以确定因而产生它的形状。此外，许多非线性分形是有界的，也就是有一个内在的有限外界限 $\Omega < \infty$。那些发现 $\Omega = \infty$ 是讨厌的人，必定是被它的崩溃所迷惑。

第一个自反演分形是由亨利·庞加莱和费克斯·克莱因于 1880 年引进的。不久以后，外尔斯特拉斯发现了连续而不可微的函数，大约在康托点集的同时，而在皮亚诺和科赫曲线及其标度族以前很久。出乎意料的是标度分形作为熟知的反例和数学游戏的素材而找到了永久的藏身地，同时自反演分形成为自守函数理论中的一个特殊课题。这个理论被短暂地忽视了，以后又以抽象的

形式再起。自反演分形曾被遗忘的原因是它们的实际形状一直未被探索过，直至本章展示出一种有效的新结构。

本章的最后一节处理了一个物理学问题，它碰巧醒目于最简单的自反演分形。

生物形态和简单性

就像我们将要看到的，许多非线性分形"看上去像器管"，因此现在的说明与生物学有关。生物形态是非常复杂的，看来这种形态的编码程序必定非常长。当复杂性似乎没有目的地使用时（就像非常简单的生物那样），要留出指定的有用余地而不擦去产生的程序是矛盾的。

然而，问题的复杂性经常在于大量重复它们的结构，我们还记得，第6章末尾说过，不能把科赫看作是无规则的或者是复杂的，因为它的生成法则是有系统的又是简单的。关键是反复应用此法则，不断地循环。第17章里用这种想法来编制肺结构的预编码。

在第18章和第19章，我们要更进一步，发现由非线性法则产生的某些分形，可称之为昆虫或有头足的动物。同时，其余的称为植物。上述的矛盾消失了，留下了一个十分艰巨的实际要完成的任务。

标准的几何反演

在直线以后，欧几里得下一个最简单的形状是圆。而圆不仅在相似变换下保持不变，在反演下也是不变的。许多学者由于他们早年的不幸从未听说过反演，因此重新叙述一下基本情况。给一个原点为 O 半径为 R 的圆 C，关于 C 的反演就是把 P 点变换到 P' 点，使得 P 和 P' 位于从 O 点出发的同一半直线，而其长度 $|OP|$ 和 $|OP'|$ 满足 $|OP|\cdot|OP'|=R^2$。包含 O 点的圆反演为不含 O 点的直线，以及相反（见图 18-1），不含 O 点的圆反演为圆（见图

18-1)。与 C 正交的圆以及过 O 点的直线在 C 的反演下保持不变(图 18-1 的第 4 图)。

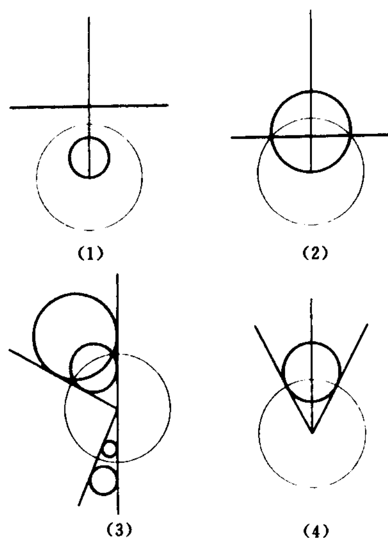


图 18-1

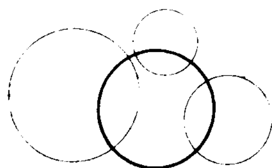


图 18-2

现在把三个圆 C_1、C_2 和 C_3 一起研究。通常,例如当由 C_m 包围的开的有界圆盘是不重叠时,就有在一个与每个 C_m 都正交的圆 Γ(见图 18-2)。当 Γ 存在时,它就是关于 C_m 都自反演的。

上述平淡无奇的结果,几乎把标准几何学关于自反演集合的知识都讲完了。其他的自反演集合是分形,而且大多是精彩的。

发生器,自反演集合 我们照例从发生器开始,现在的情形是

由任意 m 个圆 C_m 组成的。关于这些圆的逐次反演所组成的变换形式，代数学家称之为反演所生成的群：称为 $\mathcal{G}$。"自反演集合"的正式术语是："在群 $\mathcal{G}$ 运算下保持不变的集合。"

种子和家族 取任意一个集合 $\mathcal{S}$（称为种子），并加上由所有 $\mathcal{G}$ 运算对 $\mathcal{S}$ 的变换，此结果（在这里称为 $\mathcal{S}$ 的家族）是自反演的。但它不值得引起注意。例如，如果 $\mathcal{S}$ 是扩展平面 $\mathbb{R}^*$（即平面 $\mathbb{R}$ 加上无穷远点），$\mathcal{S}$ 的家族恒等于 $\mathbb{R}^* = \mathcal{S}$。

混沌反演群 进一步，给出一个基于反演的群 $\mathcal{G}$。可以发生这样的情形，每个区域 $\mathcal{S}$ 的家族覆盖了整个平面。如果是这样，此自反演集合必须是整个平面，基于第 20 章中所泄露出的原因，我建议称此群为混沌的。非混沌的群是由庞加莱建立的，但常称为是克莱因的；庞加莱曾把某些克莱因的其他工作归功于 L. 富克斯，而遭克莱因抗议，庞加莱允诺把他的下一个伟大发现以克莱因命名——并且他是这样做了！

保持非混沌群，我们讨论由庞加莱挑选的三种自反演集，然后讨论历史还不清楚的第 4 个集和我发现是很重要的第 5 个集。

双曲田字或铺覆

少数 M. 埃舍尔的赞美者知道，这个有名的制图员的灵感常常直接来自"不知名的"数学家和物理学家（Coxeter 1979）。在许多实例中，埃舍尔对庞加莱已知的和 Fricke & Klein 1897 中广泛阐述的自反演田字图案增加了装饰。

这些集合，记作 $\mathcal{J}$，是由合并这些圆自身的家族而得到的。

◁假设 $\mathcal{G}$ 是非混沌的，合并的 C_m 家族的补集是圆多边形的集合，称为"开铺覆"。任意开铺覆（或它的闭包）能够由一系列属于 $\mathcal{G}$ 的反演而变换为任何其他的开（或闭）铺覆。换句话说，任意闭铺覆的家族是 $\mathbb{R}^*$。更重要的是，任意开铺覆的家族是 $\mathcal{J}$ 的补集。可以这么说，$\mathcal{J}$ 是这些铺覆的"泥浆线"，$\mathbb{R}^*$ 是自反演的。$\mathcal{J}$ 和 $\mathcal{J}$ 的补集是自反演的和包含一个 $\mathbb{R}^*$ 的"双曲铺覆"或"田字图

案”(词根是拉丁文 *tessera* = 正方形,来源于希腊文 *τεσσαρεσ* = 4,但是铺覆能够具有大于2的任意数个角)。在埃舍尔的图画中,每个铺覆都产生一个奇异图。▶

反演群的极限集

最感兴趣的自反演集是最小的一个。它被称为极限集,用 $\mathcal{L}$ 标记,因为它也是任意初始点在 $\mathcal{G}$ 群作用下的变换所形成的极限点集。它属于任意种子 $\mathcal{S}$ 的家族。为了使技术要点更清楚:也不能由有限次反演得到的正是那些极限点的集合。在直观上,那里正是无限小后裔集中的区域。

$\mathcal{L}$ 可以缩减为一个点或者一个圆,但在一般情形下它是支离破碎的和/或无规则的分形集。

◁在田字图案中,$\mathcal{L}$ 作为“无限小地小铺覆的集合”是很突出的。就田字图案的有限部分而论,它起到了分枝顶端(第16章)关于分枝的作用。但这里的情况比较简单:就像 $\mathcal{L}$,该田字图案 $\mathcal{J}$ 是自反演而没有剩余物。▶

阿波罗尼网和垫片

称一个集是阿波罗尼的,如果它由无限个圆加上它们的极限点所组成的话。在这种情形里,它之作为分形仅因为其支离破碎性。在本课题的早期,就已知道这种情形了(虽然为分散模式)。

我们首先构造一个基本的例子,然后证明它是自反演的。P. 阿波罗尼是大约公元前200年亚历山大学派的希腊数学家和欧几里得亲近的继承人,他发现了一种算术,能画出与3个已知圆相切的5个圆。当给定圆相互相切时,阿波罗尼圆的个数是2。马上就会看到,不失一般性,假定给定的3个圆中有2个圆相互外切且包含在第三个圆的内部,如图18-3所示。这3个圆定义了2个具有0°夹角的圆三角形,而两个阿波罗尼圆是在这些三角形中相内

切的最大圆,如图 18-4。

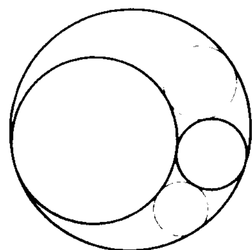


图 18-3

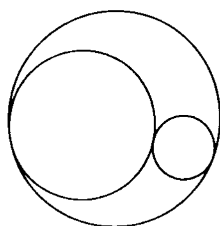


图 18-4

由阿波罗尼结构推出这 5 个圆(其中 3 个是给定的,2 个是阿波罗尼的)一起定义了 6 个圆三角形。重复同样的过程,我们就在每个三角形中画出最大的内切圆。进行无限多的重复,就称为阿波罗尼包。由此产生无限个圆的集加上它的极限点,我们就得到一个集合,我称为阿波罗尼网。网在圆三角形内的部分,如图18-5所表明的,称为阿波罗尼垫片。

如果第一代阿波罗尼圆之一与内部的给定圆中的任一个相交换,则极限集并不改变。◁如果说所作的阿波罗尼圆是用来代替外部的给定圆,那么该构造从给定的相互外切的三个圆开始,而第一阶段的阿波罗尼圆之一是外接于三个给定圆的最小圆。在此非典型阶段之后,构造手续如上,证明我们的图形没有失去普遍性。▶

莱布尼兹包 阿波罗尼包使我想起了一种构造,我称为圆的莱布尼兹包,因为莱布尼兹在给布洛斯的信中写道:"想象一个圆;它内切于内部的其他 3 个相互全等并有最大半径的圆;对这些内部的每一个圆和它们之间的每个间隔都类似地进行上述手续,并想象该手续继续下去直至无限……"

现在开始转向构造阿波罗尼网:两两相切的 3 个圆,加上相应的阿波罗尼圆之一,把得到的这 4 个圆称为 Γ 圆,在图 18-6 中用粗线画出。

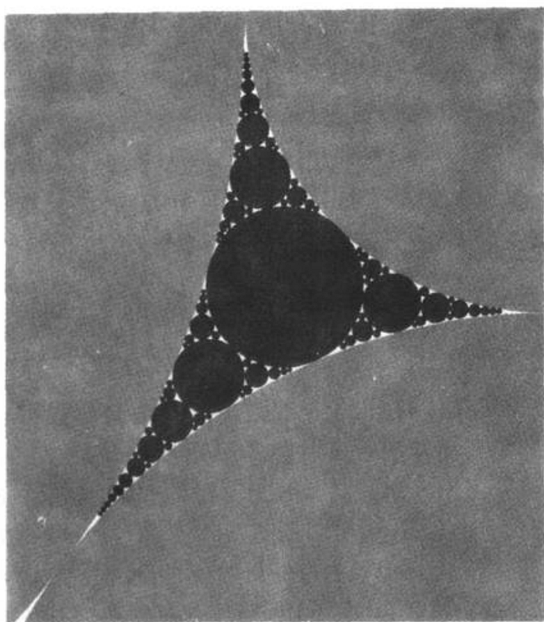


图 18-5　阿波罗尼网是自反演的

把构成的 Γ 圆中每 3 个圆称为三重圆。共有四种组合，每一组都对应于一个与三重圆中每一个都正交的新圆。取这些新圆为发生器，记为 C_1、C_2、C_3 和 C_4（在图 18-7 中以细线画出）。而 Γ 圆与 C_i、C_j、C_k 圆相正交，因此记为 Γ_{ijk}。

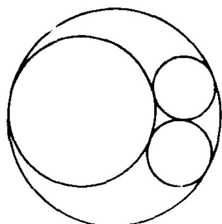


图 18-6

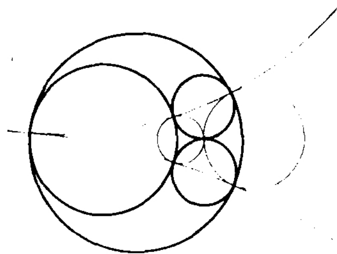


图 18-7

建立了这些冗长的记号以后，可得下面的意外结果：简单的审核表明，对应于 4 个发生圆 C_m 的最小的（闭的）自反演集，是在 4 个 Γ 圆上构造的阿波罗尼网。很奇怪，这种观察在文献中哪儿都不明显，但它肯定广为知晓。

更加仔细的审核表明，网上的每一个圆通过关于 C 圆的唯一的一系列反演变换为 Γ 圆之一。用这种方法，阿波罗尼网上的圆能被分为 4 个家族；它们按 Γ_{ijk}递降，记作 ${}_g\Gamma_{ijk}$。

用单线编织的网

阿波罗尼垫片和图 14-4 的谢尔宾斯基垫片表明了一个重要的性质：谢尔宾斯基垫片的补集是三角形的并集，是一个 σ-三角形，而阿波罗尼网或垫片的补集是圆盘的并集，是一个 σ-圆盘。

但是我们也知道，谢尔宾斯基垫片容许另一种科赫构造，其中它的有限近似是无自接触的奇怪折线（由折线构成），而且直至取极限前没有重点。这就表明，不用提起笔，谢尔宾斯基垫片就能画出来；直线将两次通过某些点，但将永远不会两次通过任何直线区间。

坦率地说，谢尔宾斯基填片能用一个线团把它织出来！对阿波罗尼网，也可同样做到。

非自相似的级联和维数的估算

阿波罗尼包的圆三角形相互间不是自相似的，因此阿波罗尼级联不是自相似的，而阿波罗尼网不是标度集。我们必须对豪斯多夫—柏西柯维奇定义的 D（作为定义测度中的指数）重新分类，这种 D 应用于每个集合，但 D 的推导证明有惊人的困难。迄今（Boyd 1973 a,b）能说最好的结果是：

$$1.300197 < D < 1.314534。$$

但是 Boyd 最近（未发表）的数值实验给出 $D \approx 1.3058$。

不论怎样，因为当 $D_T = 1$ 时 D 是一个分数，阿波罗尼垫片和

网是分形曲线。就这一点说来，D 是支离破碎性的度量。例如，当半径小于 ϵ 的圆盘是截去的，余下的空隙具有周长正比于 ϵ^{1-D} 和表面正比于 ϵ^{2-D}。

在非缨科植物庞加莱链中的 $\mathcal{L}$

就产生圆 C_m 的不太特殊配置的反演会导致不比任何阿波罗尼网简单的自反演分形。马上就要提出我的一种可使用的结构，它在大多数情形下适合于表征 $\mathcal{L}$。这是对前述的庞加莱和克莱因方法的重大改进，因为那种方法很麻烦而且收敛很慢。

但是老方法仍然很重要，我以一个特例来考察它。我们把 C_m 形成的图形称为庞加莱链，也就是循环编号的 M 个圆 C_m 的集合，这样 C_m 与 C_{m-1} 和 C_{m+1}（模为 M）相切，而且和链中的其他圆不相交。这时 $\mathcal{L}$ 是把平面分为内部和外部两部分的曲线。（要佩服 C. 约当，他第一个看出，平面能被一条封闭曲线这样分为两部分，这不是明显的，此闭曲线被称为约当曲线。）

当所有的 C_m 都与同一个圆 Γ 正交，$\mathcal{L}$ 就恒等于 Γ。这种情形（称为缨植物的）在本章内要排除。

庞加莱的 $\mathcal{L}$ 构造 通常的 $\mathcal{L}$ 构造和我的另一种构造都将在下列 $M=4$ 的特殊链的情况中作充分的描述（图 18–8）。

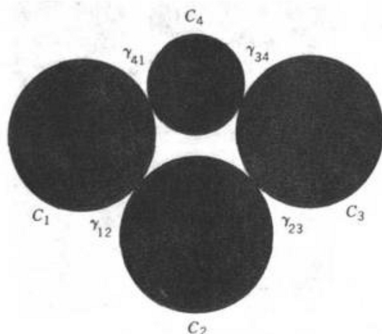


图 18–8

为了得到 $\mathcal{L}$,庞加莱和 Fricke & Klein 1897 中用越来越多数目但越来越小的连接物所组成的链来代替各个构造阶段的原始链。在第一阶段,代替连接物 C_i 的是 C_m(除 C_i 外)对 C_i 的反演,这样就建立了 $M(M-1)=12$ 个小的连接物。它们被表示为添加在原始连接物的(灰色)照相负片上的图 18-9 一列图上。每个阶段都取开始链并在每个原始 C_m 下反演。这里的几个阶段用黑色表示,每个阶段都叠加在前阶段上(用灰色背景上的白色表示)。最

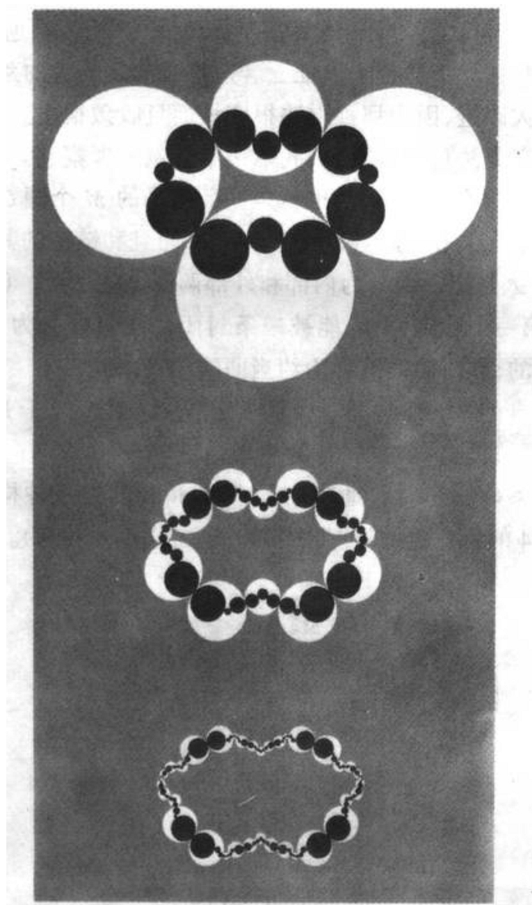


图 18-9

终，此链变细成为它的线，这就是 $\mathcal{L}$。

不幸的是，某些连接物在经过大量阶段以后仍然保持大的尺寸，并且即使是非常高级的近似链给出了 $\mathcal{L}$ 的贫乏概念，这个困难用图例来说明，就是图 18-12 至图 18-14 上的可怕样子。

分形密切性的概念

我关于 $\mathcal{L}$ 的另一种构造法包含了一个新的分形密切性的概念，它是阿波罗尼实例中一个明显方面的延伸。

标准密切性 这个概念与曲率的概念有联系。到一阶近似，在一个规则点 P 附近的标准曲线可用它的切线来近似。到二阶近似，用圆（称为密切圆）来近似，此密切圆具有与其同样的切线和同样的曲率。

为了标志在 P 点与曲线相切的圆，一个方便的参数 u，是从 P 点（沿任意方向）到圆心的距离的倒数，记密切圆的标志为 u_0。如果 $u < u_0$，中心为 P 的一小段曲线完全位于相切圆的一边，而如果 $u > u_0$，则就完全位于另一边。

物理学家称此 u_0 为临界值，而数学家称为切，此 $|u_0|$ 定义为局部"曲率"。

总体分形密切性 对于阿波罗尼网，通过曲率来定义密切性是没有意义的。然而，在该网的每一点，两个包圆是彼此间相切的，它们显然"包围了"它们中 $\mathcal{L}$ 的剩余部分。把这两个都称为密切圆是很使人感兴趣的。

为了把此概念推广到非阿波罗尼集合 $\mathcal{L}$，我们取一个 $\mathcal{L}$ 上具有切线的点，从基于临界性（= 切）上的普通密切性定义开始，而新奇之处在于，当 u 从 $-\infty$ 变到 ∞，单个临界值 u_0 由两个不同的值 u' 和 $u'' > u'$ 来代替，它们的定义如下：对一切 $u < u'$，$\mathcal{L}$ 完全位于我们的圆的一边，而对一切 $u < u''$，$\mathcal{L}$ 又完全位于另一边。而对于 $u' < u < u''$，$\mathcal{L}$ 的各部分却位于圆的两边。以参数 u' 和 u'' 定义的两个圆，都称为分形密切圆。

任意圆都在两个开圆盘(一个包含有圆的中心,而另一个包含有无穷远点)之间。以密切圆为边界且位于 $\mathcal{L}$ 外部的开圆盘就称为密切圆盘。

可能发生这样的情形,一个或两个密切圆盘退化为一个点。

局部和总体的概念 回到标准密切性,我们注意到它是个局部概念,因为它的定义与离 P 点较远处的曲线形状无关。换句话说,此曲线,它的切线以及它的密切圆可以与 P 点以外的任何点相交。与此相反,前述的分形密切性定义是总体性的。但这个区别不是主要的。分形密切性可以从局部重新定义,相应地把"曲率"分为 2 个数。但是,在手头的应用中,总体和局部密切性是一致的。

密切三角形 ◁总体分形密切性在熟知的内容中有个对应物。为了定义我们的老朋友科赫雪花曲线(作为 σ-三角形)的内部,只要位于图 6-1 的各个新阶段上的三角形被拉长许多而不与雪花曲线相交是可行的。▶

密切于 $\mathcal{L}$ 的 σ-圆盘

密切圆盘和 σ-圆盘是我的 $\mathcal{L}$ 新构造法的关键,它没有第 226 页上所列的弊端。该构造在此是第一次阐明(虽然在 1980 年预演过,发表于 1981 年的《数学历书》中)。关键是要取反演,不是对 C_m 本身,而是对某些 Γ_{ijk} 中的圆,它们是与三重圆 C_i、C_j 和 C_k 相正交的。我们再次假定,Γ_{ijk} 并不完全等同于单个的 Γ。

限制为 $M=4$ 假设 $M=4$ 就保证,对于每个三重圆 i,j,k,由 Γ_{ijk} 为边界两个开圆盘中不论哪一个(即 Γ_{ijk} 的内部或者外部)不包含 γ_{mn} 的任何点(见图 18-8)。我将把这个 γ-空盘记为 Δ_{ijk}。

我的 $\mathcal{L}$ 构造基于下列观测:每个 γ-空盘 Δ_{ijk} 密切于 $\mathcal{L}$;所以在圆 C_m 内做它们的反演和重复反演;用 Δ_{ijk} 作为种子建立的家族覆盖住除曲线 $\mathcal{L}$ 以外的整个平面。

图 18-10 应用了已在图 18-9 中用过的同样的庞加莱链,但以

较大的比例画出。正如大多数情形都有的，第一阶段的外形 $\mathcal{L}$ 就相当精确，以后阶段增加的细节非常“高效率”，在几个阶段以后对曲线 $\mathcal{L}$ 就能产生看法，而无需检验在庞加莱方法中出现的误差。

推广

具有 5 个或更多的连接物的链 当在庞加莱链中原始连接物的数目 $M>4$ 时，我的新 $\mathcal{L}$ 构造包含一个附加的步骤：把 Γ 圆分为两部分再开始。有些 Γ 圆是这样的，每一个以 Γ 为界的开圆盘至少包含有一点 γ_{mn}；结果 Δ_{ijk} 是不确定的。这种 Γ 圆就与 $\mathcal{L}$ 相交而不是密切，但是对构造 $\mathcal{L}$ 它们是不需要的。

剩下的圆 Γ_{ijk} 确定密切圆盘 Δ_{ijk}，它分为两类。第一类里 Δ_{ijk} 家族的总和代表 $\mathcal{L}$ 的内部，而第二类中 Δ_{ijk} 家族的总和代表 $\mathcal{L}$ 的外部。

在许多(但不是全部)实例中，当 C_m 不构成庞加莱链时，也有与上面同样的结论。

重叠和/或折散链 当 C_m 和 C_n 有两个交点 γ'_{nm} 和 γ''_{mn} 时，这些点就联合代替 γ；当 C_m 和 C_n 分开时，γ 就由两个互相反演的点所代替。为了识别 Δ_{ijk} 而建立的判据难以表述，但基本的思想不变。

树枝状自反演分形 $\mathcal{L}$ 的特性可以从变弯扭的闭曲线(约当曲线)和阿波罗尼网中得出，产生出类似于第 14 章中确定的那些分形树枝状曲线，但看上去常常具有更多的不规则性，就像彩图-3。

自反演尘埃 也能发生这样的情形，$\mathcal{L}$ 是分形尘埃。

脂状的阿波罗尼模型

本节概述阿波罗尼包和分维在描述一类“液晶”中所起的作用。这样，我们就转向物理学中最活跃的领域之一：临界点理论。

一个例子是温度-压力图形上的点。该图形描述了在一个单独的物理系统中，固体、液体和气体三相共存平衡的物理条件。在临界点的领域里物理系统的分析特征是标度的，因此受幂次规律支配，而由临界指数(第 36 章)支配。而许多指数都是分形维数；这里将要遇到第一个例子。

因为对液晶知道得很少，我们用 Bragg 1934 中的释义来作描述。这些美丽而神秘的物质从活动性看来是液态的，而从光学性态上看是晶体。它们的分子具有相对地复杂的结构，冗长而类似于链的结构。某些液晶相称为是脂状的，它来源于意为肥皂的希腊文 σμηγμα，因为它们组成了像肥皂那样有机系统的模型。脂状液晶由像田野中稻麦那样一排一排排列着的分子所组成，每层的厚度就是分子的长度。所得到的层或片都是十分富有弹性和十分强劲的，而当把它变弯再释放时，又会变得平直。在低温下，它们堆放得很规则，就像一本书的页，并且形成固态晶体。然而，当温度升高后，这些片就很容易相互产生滑动，每一层都构成一个二维液体。

特别有兴趣的是焦锥形结构，一块液晶可分为两组金字塔形，它的一半以它的两个相对的面中一个面为底并且顶点在另一个面上。在每一个金字塔里，液晶折叠成非常尖的锥体。所有的锥体都有同样的峰值和都近似地与平面相垂直。结果，它们的基底就是由圆为边界的圆盘。它们的最小半径 ϵ 是液晶层的厚度。在一个类似正方形底的金字塔的空间区域内，其构成圆锥形底的圆盘分布于金字塔底之上。为了得到平衡分布，我们从在基底放置最大半径的圆盘开始。然后把另一个尽可能大的半径的圆盘放置在其余四片中每片的内部，等等。如果这个过程可无穷尽地进行下去，我们就会获得精确的阿波罗尼包。

这个肥皂模型的物理性质依赖于间隙之和的曲面和周长。其连接物通过一类照相“负片”(肥皂分子不能穿透的垫片)的分形维数 D 而作用，物理学上更详细的内容可见 Bidaux，Boccara，Sarma，Séze，de Gennes & Parodi 1973。

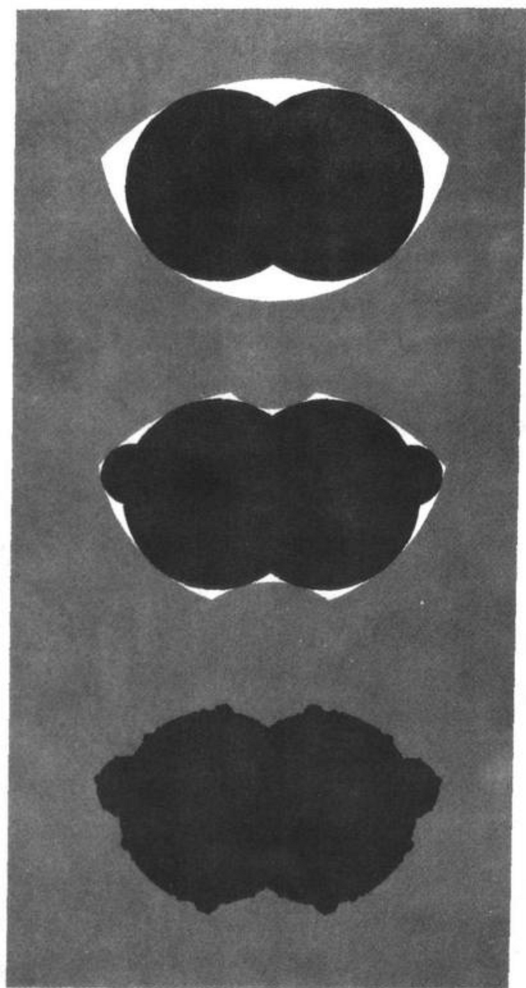


图 18-10　一个自反演分形(Mandelbrot 构造)

图 18-10 的顶图　对 $M=4$ 的庞加莱链，至少有一个 Δ_{ijk} 盘总是无界的，称它为 Δ_{123}，它与 Δ_{341} 相交(这里 Δ_{341} 也是无界的，但在其他情形里它却不是)。由 Δ_{123} 和 Δ_{341} 组成的并集(图中用灰色表示)给出了 $\mathcal{L}$ 外部的第一阶近似。它类似于由正凸六边形得出的近似的科赫曲线 η 的外部(见图 6-2)。

圆盘 Δ_{234} 和 Δ_{412} 相交，它们的并集用黑色表示，它给出了 $\mathcal{L}$ 内部的第一

阶近似。它类似于把形成图6-2中规则星状六边形的两个三角形作为 η 内部的近似。

图18-10的中图 $\mathcal{L}$ 外部的二阶近似可以由增加 Δ_{123} 和 Δ_{341} 它们分别在 C_2 和 C_4 上的反演而得到。其结果在图上用灰色表示,它类似于图6-2上 η 曲线的外部的二阶近似。

相应的 $\mathcal{L}$ 内部的二阶近似可以由增加 Δ_{234} 和 Δ_{412} 它们分别在 C_1 和 C_3 上的反演而得到。其结果在图上用黑色表示,它类似于图6-2上 η 曲线内部的二阶近似。

图18-10的下图 图上用灰色表示的是 $\mathcal{L}$ 的外部,它是 Δ_{123} 和 Δ_{341} 的家族之并集。而用黑色表示的 $\mathcal{L}$ 的内部是 Δ_{234} 和 Δ_{412} 家族之并集,$\mathcal{L}$ 内部的精细结构见图18-14,它应用了不同的庞加莱链,黑色和灰色合在一起的开区域覆盖了除 $\mathcal{L}$ 外的全平面。 ■

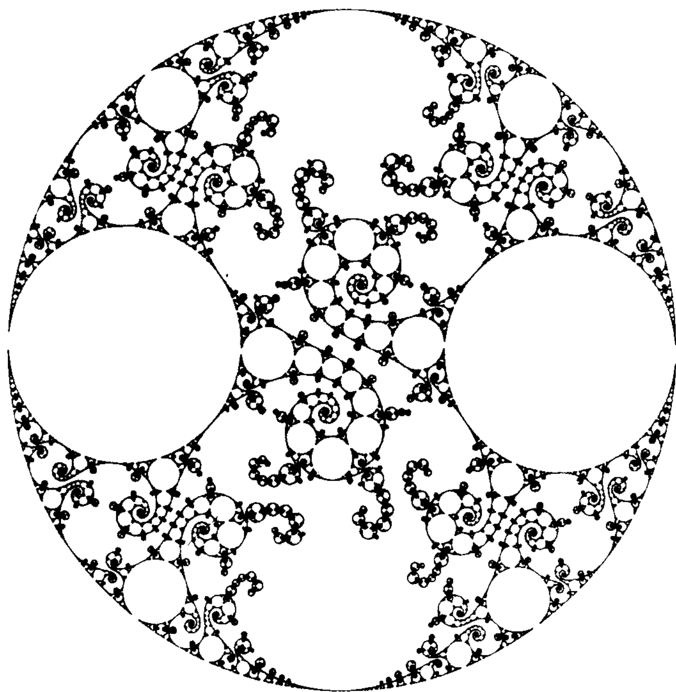


图18-11 自等比形分形,接近于皮亚诺极限

对于数学家说来，对群的主要兴趣基于反演存在着与某种等比形群的关系。一个等比形(也称为麦比乌斯 Möbius，或称为分形线性变换)映射 z 平面为 $z \to (az+b)/(cz+d)$，其中 $ad-bc=1$。最一般的等比形能写成关于一条直线对称的反演(这是退化反演)与一个转动的乘积。这就是当没有转动时等比形的研究可从基于反演的群的研究中学到许多东西的原因。显然，要容许转动，就要引入新的丰富内容。

这是关于等比形群的极限集 $\mathcal{L}$ 的一个例子。这是大卫·芒福德发明的(正在研究由本章提出的新结果所得到的启发)而且友好地同意把它在这里发表。其形状几乎就是充满平面的样子，显示出与图 19-8 上几乎充满平面的形状奇特的类似与差别。

等比形群的极限集是一个分形的事实，已由 T. Akaza, A. F. Beardon, R. Baven, S. J. Patterson 以及 D. Sullivan 等在很宽条件下得到了证明。见 Sullivan 1979。■

图 18-12

图 18-13

图 18-12 至图 18-14　一个著名的合格的自反演分形(曼德布罗特构造)

图 18-12 从 Fricke & Klein 1897 的图 156 复制而来，该书主张(用我的术语)描述自反演分形，其发生器由 5 个圆(其边界是涂黑的中心区)构成。此图被广泛复制。

图 18-13 中黑色形状的轮廓线展示出了分形的真实形状，由我的密切 σ-

圆盘构造所给出,其误差是可怕的。弗雷克(Fricke)知道 $\mathcal{L}$ 组合了许多圆,因此他教导描图员把圆包括在内,但在另一方面,弗雷克不知道他应期望哪一类非常不规则的形状。

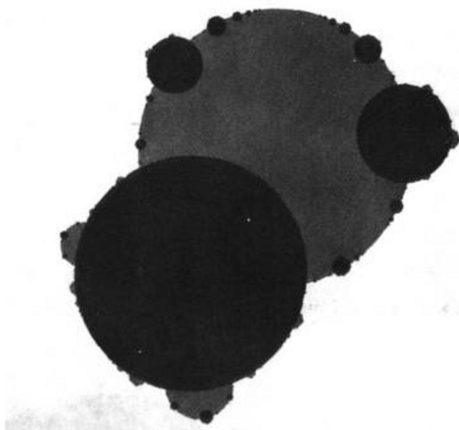


图 18-14

实际的 $\mathcal{L}$ 包含了用我的算法画出的图 18-14 中形状的边界 $\mathcal{L}^*$。此 $\mathcal{L}^*$ 是自反演分形,对应于形成庞加莱链中的 4 个发生圆。用其他的反演对 $\mathcal{L}^*$ 作变换显然被看作属于 $\mathcal{L}$。Mandelbrot 1982 i 对此图作详细说明。 ■

第 19 章　康托尘埃和法图尘埃；自平方龙分形

本章处理两类非常简单的非线性变换(映射)，并研究在这些变换下保持不变的某些分形集，它们被称为发生器。

首先，从实线到折线的变换加深了我们对老相识康托尘埃的理解。这些评述本可夹在第 8 章，但放在这章里更好一些。

特别地，它们有助于了解实的和复的二次变换的作用，其变换形式为 $x \to f^*(x) = x^2 - \mu$，其中 x 和 μ 是实数，或者为 $Z \to f^*(z) = Z^2 - \mu$，其中 $Z = x + iy$ 和 μ 是复数。

初等情形 $\mu = 0$ 在几何上是空的，但对其他的 μ 值则包含有异常丰富的分形性质，其中的许多性质都是 Mandelbrof 1980 n 中第一次揭示的。

所讨论的不变图形最好是作为迭代研究(即重复应用上述的某一种变换)的一种副产品得到。初值记作 x_0 或 z_0，而将经 f^* 变换迭代 k 次后的值记作 x_k 或 z_k。

对迭代的研究大致分为三个阶段。第一阶段是与复数 z 有关的迭代，P.J.L.法图(Pierre Fatou 1878 ~ 1929)和 G.朱丽亚(Gaston Julia, 1893 ~ 1978)占有重要的地位。他们的著作是经典复分析的杰作而为数学家们极大地赞美，但是要来建立它有过多的困难。在这一章，我的工作是一个非常简要的概述，他们的某些基本结论是综合了物理上的分析和仔细作图而直观地得出的。但能显示出无数的新事实。

最终的成果是使得迭代的性质成为分形理论的基础。法图-朱丽亚的发现没有发展成为本理论的根源这一事实提醒人们，即使对经典分析，也需要借直觉来发展并得到计算机的帮助。

中间阶段包括了 P.J. 米尔贝里对 $\mathbb{R}$ 实二次映射的迭代研究

(即 Myrberg 1962),以及 Stein & Ulam 1964 和 Brolin 1965。

最近阶段极大地忽视了过去,而集中到[0,1]上的自映射,就像在 Gurel & Rössler 1979, Heleman 1980, Collet & Eckman 1980, Feigeabanm 1981 和 Hofstader 1981 所考察的。本章的最后一节涉及到由 Grossmann & Thomae 1977 和 Feigenbaum 1978 引入的指数 δ:δ 的存在是从在复平面里迭代的一个更清晰的(分形)性质中得到证明的。

康托尘埃能由一个非线性变换产生

我们从第 8 章知道,三元康托尘埃 $\mathcal{C}$,在形如 3^{-k} 的相似比下是不变的,此自相似性是个重要的性质,但要确定 $\mathcal{C}$ 是不够的。极度相反,$\mathcal{C}$ 作为最大有界集是完全确定的,此集合在下列非线性"倒 V"变换下是不变的。

$$x \to f(x) = \left\{\frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right|\right\} \Big/ r, 而\ r = \frac{1}{3}。$$

更确切地说,我们让 x_0 传遍 x 轴,反复应用实轴上的自映射,最后的值就缩减为点 $x = -\infty$,再加上康托尘埃 $\mathcal{C}$。不动点 $x = 0$ 和 $x = 3/4$ 属于 $\mathcal{C}$。

$\mathcal{C}$ 不变性的证明要点 因为当 $x < 0$ 时 $f(x) = 3x$,所有 $x_0 < 0$ 的点的迭代都直接收敛于 $-\infty$,这就是说不会停止满足 $x_n < 0$,对 $x_0 > 1$ 的点,在迭代一步以后就直接收敛了,因为对所有的 $k \geq 1$ 有 $x_k < 0$;对于在间隙 $1/3 < x_0 < 2/3$ 中的点,有两步预备期,因为 $x_1 > 0$ 而对一切 $k \geq 2$ 有 $x_k < 0$;对于在间隙 $1/9 < x_0 < 2/9$ 或 $7/9 < x_0 < 8/9$ 中的点,存在三步预备期。更加一般地假如有一个区间以 k 步预备期之后趋向 $-\infty$ 的间隙为界,区间的(开的)中间三分之一中的点将在第 $(k+1)$ 步之后直接走向 $-\infty$。然而所有 $\mathcal{C}$ 中的点没有发现趋于 $-\infty$。

外界限的有界性

要把这些结果推广到 $N=2$ 而 r 在 0 与 1/2 之间的广义康托尘埃，只要把所要求的 r 代入 $f(x)=\{1/2-|x-1/2|\}/r$ 就行。要得到任何其他的康托尘埃，$f(x)$ 的图形必须是一条合适的锯齿形曲线。

然而，没有任何类似的方法有助于把康托尘埃外推到整个实数轴。这是一种非常一般性的特殊情形：典型地，一个非线性的 $f(x)$ 在自身内部取到了有限的外界限 Ω。与此相反，正像我们所知道的，所有的线性变换（相似性和仿射性）以 $\Omega=\infty$ 为其特征，而有限的 Ω（如果要求）必须是人为地强加的！

解剖康托尘埃

我们从第 7 章知道，$\mathcal{C}$ 是一个非常"细"的点集，而 $f(x)$ 迭代的行为导致对这些点之间的精细区别有更好的理解。

当第一次认识 $\mathcal{C}$ 时，每个人都一定以为是，相信 $\mathcal{C}$ 缩减到开间隙的端点。但远非这种情形，因为由定义，$\mathcal{C}$ 还包含了间隙端点序列的所有极限点。

这个事实不能认为是直观的。我与许多同事们可能会同意，如果我的老相识 H. 哈恩在概念中已经列出了这些极限点，而它们的存在必须由冷酷的逻辑所强加。然而现在的讨论却得到了直观的证明，即这些极限点有着很强的和分散的个性。

例如，使 $f(x)$ 保持不变的点 $x=3/4$，既不位于任何中间 1/3 区间之内，也不位于它的边界上。形如 $x=(1/4)/3^k$ 的点经迭代，收敛于 3/4。另外，存在有无限多个极限环，而每一个极限环都由有限个点组成。因而 $\mathcal{C}$ 也包含有这种点，它的变换无休止地绕 $\mathcal{C}$ 旋转。

平方发生器

在上节中选用的倒 V 发生函数 $f(x)$ 产生了一个熟悉的结果。

然而，它得到康托尘埃似乎是很巧妙的。现在我们用

$$x \to f(x) = \lambda x(1-x)$$

来代替它，这个映射的许多没有预料的性质首先由 Fatou1906 指出。改变原点和 x 的尺度，并记 $\mu = \lambda^2/4 - \lambda/2$，此函数就可改写为

$$x \to f^*(x) = x^2 - \mu。$$

为了使用方便，有时用 $f(x)$，而有时也用 $f^*(x)$。

把 $f(x)$ 或 $f^*(x)$ 称为平方发生器是十分恰当的。当然，平方是一种代数运算，然而在这里给出了一种几何解释，这样，此保持不变性的集合就能称为自平方的。严格的平方把横坐标为 x 的点替换为横坐标是 x^2 的点。因此，在实线上的自平方点缩减为 $x=\infty$，$x=0$ 和 $x=1$。再加上 $-\mu$，似乎是完全没有影响的，但事实上还是引进了完全没有预料到的性质，我们现在来研究。

法图的实自平方尘埃

由于产生了一个熟悉的成品，即康托尘埃，V 变换已成为很出名的了，然而它是皮埃尔·法图早就阐明但远未广泛知晓的发现。Fatou 1906 假设 λ 是实的且满足 $\lambda > 4$，而他研究了 $\mathbb{R}$ 上在 $f(x)$ 作用下是左不变的最大的有界集，它与康托尘埃密切相关，我称它为实的法图尘埃。已经示于图 19–9，不需要再阐述了。

在复平面上，对上述的 λ 值最大的有界自平方集仍为实的法图尘埃。

平面上的自平方朱丽亚曲线(Mandelbrot 1980 n)

由 $\mu=0$ 就得到最简单的自平方曲线：圆 $|Z|=1$。由变换 $Z \to Z^2$，一条绕圆一周的带子伸长为绕圆二周的带子，而在 $Z=1$ 处的“扣子”保持不动。相应的最大有界自平方区域是圆盘 $|Z| \leq 1$。

然而，引入实数 $\mu \neq 0$(图 19–1 和图 19–2)，然后再引入复数 μ(图 19–6 至图 19–8)，这就像打开了潘朵拉的魔盒(具有各种各样

的可能性)，出现了朱丽亚分形曲线。其所见不亚于所思。

分离器 $\mathscr{S}$ 最大的有界自平方集的拓扑依赖于其中 μ 相对于分枝状曲线 $\mathscr{S}$ 的位置。由我发现的 $\mathscr{S}$ 现在称为分离器，它是图 19–4黑色图形的连通边界：它是"极限双纽线"，即对某些大的 R，由 $|f_n^*(0)|=R$ 定义的(所谓双纽线)代数曲线当 $n\to\infty$ 时的极限。$\mathscr{S}$ 的结构见图 19–5。

原子 $\mathscr{S}$ 的内部的开区域被分割成无限个最大的连通集，现在我建议称为"原子"。两个原子的边界或者没有搭接，或者只有一个公共点，称为"接头"，它属于 $\mathscr{S}$。

拓扑维 当 μ 位于 $\mathscr{S}$ 的外部，则最大有界自平方集是一个(法图)尘埃。当 μ 位于 $\mathscr{S}$ 内部或者一个接头时，这最大有界自平方集是以自平方曲线为边界的一个区域。至少对 $\mathscr{S}$ 上的某些 μ 会产生类树的曲线。

自平方分形 这些尘埃和曲线当 $\mu\neq 0$ 时是分形，传说已由丹尼斯·沙尔万在某些进一步的情形下完全证明了，但是我坚信，一切情况下都将得到证明。

自平方尘埃或曲线的形状将随 μ 连续地变化，因此 D 必定是 μ 的光滑函数。

树枝状 当 λ 位于图 19–5(上)的开空盘之一时，该自平方曲线是一条闭的简单曲线(没有分枝的一个圈)，如图 19–1 和19–2。

当 λ 位于 $|\lambda|=1$ 或 $|\lambda-2|=1$ 的圆上，或者位于周围的开连通区，则自平方曲线是树枝状的网，且带有以分形圈为边界的孔洞，就像在图 19–8 上的龙。

当 λ 位于非常重要的岛分子(马上要证明，它是非汇合于 1 的区域)内时，此自平方曲线或是 σ–圈，或是 σ–龙，如图 19–7(下)。σ 不引入新的圈。

μ-原子和 μ-分子

当参数是 μ 时，进一步分解参数图是比较容易的。一个 μ–

原子可以是心脏形的，此时它就是"种子"，无限个卵形原子直接地或者通过中间原子粘在它上面，相互粘住的原子加上它们的接头，就形成一个分子。种子的尖点永远不会是一个接头。

每个原子都与它的"周期"，即一个整数 w 相联系。当 μ 位于周期 w 的一个原子内部时，迭代 $f_n^*(Z)$ 收敛于 ∞ 或包含 w 个点的一个稳定极限环。在一个周期为 w 的原子的内部，有 $|f_n^*(Z_\mu)|<1$，其中 Z_μ 是对应于 μ 的极限环上任意一点。在原子的边界上有 $|f_w^*(Z_\mu)|=1$，以 $f_w^*(Z_\mu)=1$ 表征一个尖点或一个"根"。每个原子都包含一称为"核"的点，它满足 $f_w^*(Z_\mu)=0$ 或 $f_w^*(0)=0$。

实轴上的核是由米尔贝里引入的(见 Myrberg 1962)，而在 Metropolis, Stein & Stein 1973 又有发现，相应的映射通常称为"超稳定的"(Collet & Eckman 1980)。

作为 μ 的代数方程，$f_w^*(0)=0$ 具有 2^{w-1}阶。因此那里至多可有 2^{w-1}个周期为 w 的原子。但是除了 $w=1$ 以外，都要少一些。对于 $w=2$，$f_2^*(0)=0$ 有两个根，但其中之一已经是一个周期 1 的"老"原子的核。更一般地，$f_m^*(0)=0$ 的所有根也是 $f_{km}^*(0)=0$ 的根，其中 k 是大于 1 的整数。其次，考察在一个 w 周期原子边界上的每一个有理的边界点，它定义为满足 $f_w^*(Z_\mu)=\exp(2\pi i m/n)$，其中 m/n 是小于 1 的、不可通约的有理数，有一个"传感器接头"正好与周期 nw 的原子相连接。结果，一个新原子粘在存在的传感器接头上，但是并非全部新原子都由此用完，而剩下的一些别无选择地播种出新的分子。因此分子的数目是无穷的。

当 μ 在一个分子内连续变化时，每一个向外穿越的接头导致分岔：w 被 n 相乘。例如：实数值 μ 的不断增长就会导致米尔贝里的周期倍化。Mandelbrot 1980 n 研究了倒分岔，而称它为汇聚，它必须在分子的种子周期处终止。大陆分子是汇聚到 $C=1$ 的区域，而每个岛屿分子是汇聚到 $C>1$ 的区域。龙或子龙的形状由 $f_w^{*\prime}(Z_\mu)$ 和 w/C 的值所规定。

分离器是分形曲线;费根鲍姆的 δ 作为一个推论

我猜测◁通过"重正化"论证▶从其分子的种子处越移越远的原子,越来越接近于在形状上是同样的。

推论,每个分子的边界是局部自相似的,因为在小尺度上它不是光滑的,所以这是分形曲线。

此局部自相似性由格罗斯曼和托梅、费根鲍姆拓宽了涉及米尔贝里分岔的一个事实,越来越小的芽在实轴 λ 或 μ 上的截距的宽度,收敛于在几何上递减的序列,其比为 $\delta = 4.66920\cdots$(Collet & Eckman 1980)。在其原始形式里,δ 的存在似乎是专门的分析结果,而现在已经证明,它是普遍的分形标度性质的一种形式。

每次分岔进入 $m>2$ 就引入一个另外的基比。 ■

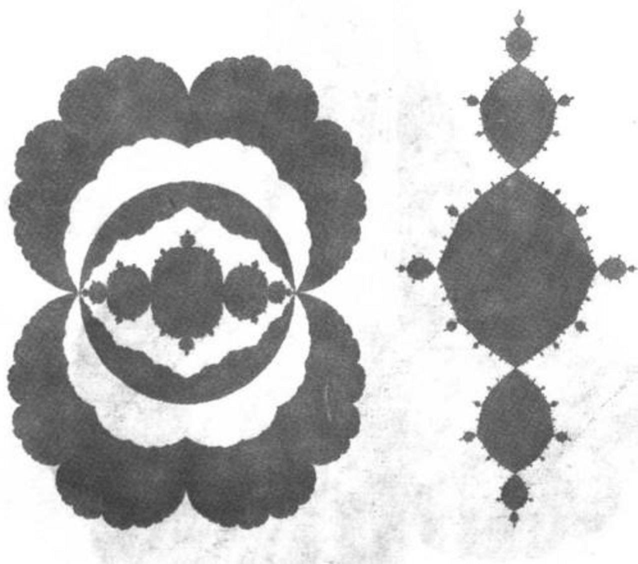


图 19-1 实 λ 的自平方分形曲线

图 19-1 至图 19-9 是第一次在这里发表,除了其中的几个是从 Mandelbrot

1980 n 中复制的。

图 19-1 左表示对 $\lambda=1,1.5,2.0,2.5$ 和 3.0 的最大有界自平方区域。其中心的黑色图形架在[0,1]线段上。

$\lambda=1$: 海扇壳

$\lambda=3$: 圣·马可龙曲线。这是数学家们对威尼斯的教堂轮廓以及它在被水淹没的广场上的映象的荒谬推测。我就称它为圣·马可龙曲线。

图 19-1 右对应于 $\lambda=3.3260680$。这是对应于 $w=2$ 的核入(如第 184 页所定义)。相应的自平方图样已经转为 90°,以便适应其版面位置。

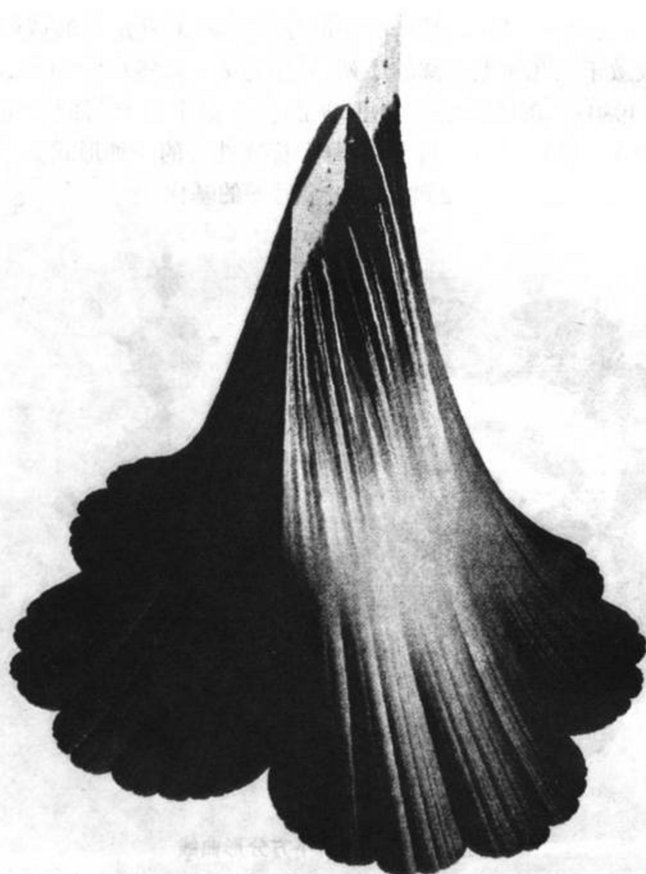


图 19-2 实 λ 自平方分形曲线的合成

这个装饰用的“雕塑品”通过一个过程造在计算机的内存里，这个过程就是切削掉在一个初始立方体里所有由 $Z \to \lambda Z(1-Z)$ 的迭代收敛到无穷远的点。参数 λ 是在 1 至 4 范围内的实数。λ 轴是竖直的，沿着雕塑品的边，而 x 和 y 构成复数 $Z = x + iy$。

每一个水平截面都是参数为 μ 的最大有界自平方图样。

对于特殊值 $\lambda = 2$，该截面的边界是个圆圈：装饰品的“带子”。

对一切其他的 λ 值，其自平方图样的边界都是分形曲线，包括在图 19–1 中所展示的。那里可以看到惊人的“褶皱”，其位置随 λ 连续地变化：在带子以下它们被往里压，而在带子之上则往外挤。

特别有趣的是固定装饰品的墙上的那些斑点，此雕塑品不能把装饰品的复杂顶端做得那样恰到好处。(A)对于每个 λ 值，装饰品包含了作为“骨架”的一个分形树；它是由 x–区间[0,1]的迭代前(映)象形成的。对于一切小的，以及某些小于 3 的高 λ 值，树的分枝完全“被肉所覆盖”。然而，对其他的高 λ 值，都不存在肉。沿 $x = 1/2$ 或 $y = 0$ 的分枝这里明显可见，但作图过程会不可避免地错过其余的。(B)在装饰品的后面墙上的某些水平条纹整个地被细小的“小山”或“起皱”所覆盖，仅能看到几个最大的。这些条纹和小山与和实轴相交的“岛分子”(图 19–3 至图 19–5)有关。观察(A)和(B)的结果，推广了米尔贝里–费根鲍姆的理论。

图 19–3 至图 19–5　$Z \to \lambda Z(1-Z)$ 和 $Z \to Z^2 - \mu$ 的分离器

图 19–4 μ–映射　在闭的黑色区域(边界是分形曲线)的 μ 是这样的，在 $Z \to Z^2 - \mu$ 下，$Z_0 = 0$ 的迭代不收敛于 ∞。大的尖点是 $\mu = -1/4$，而最右边的点是 $\mu = 2$。

图 19–5(上) λ–映射　闭的黑色区域加上空盘，其中的 λ 满足 $Re\,\lambda > 1$，以及在 $Z \to \lambda Z(1-Z)$ 下，$Z_0 = 1/2$ 的迭代不收敛于 ∞。整个 λ 图关于直线 $Re\,\lambda = 1$ 对称。

圆盘 $|\lambda - 2| \leq 1$ 和除去 $\lambda = 0$ 的圆盘 $|\lambda| \leq 1$　在这些区域中的 λ 值是这样的，$Z_0 = \dfrac{1}{2}$ 的迭代收敛于一有界的极限点。

图 19–3

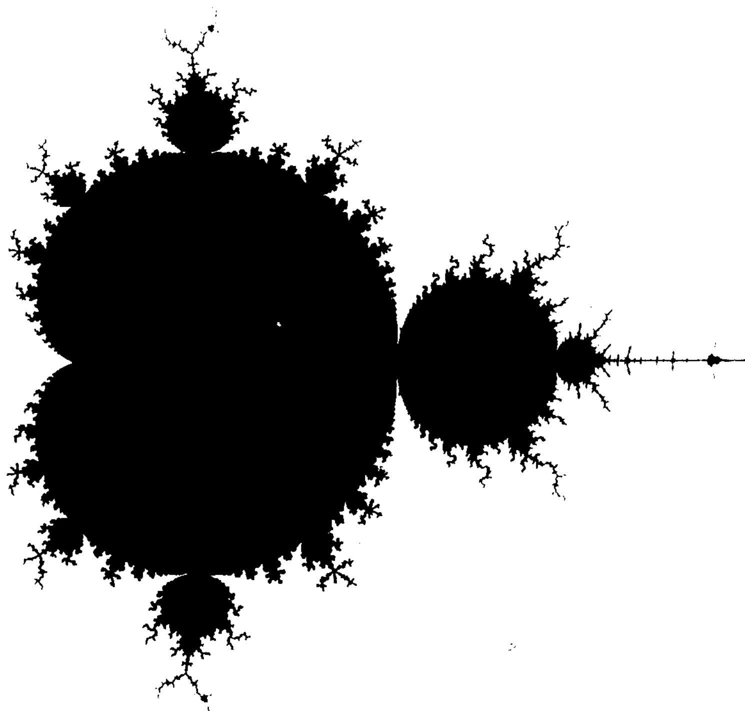


图 19–4

日冕和芽　空盘外的 λ–图形成“日冕”。它分裂出“芽”，而芽的“根”是“传感器接头”，后者是由形为 $\lambda=\exp(2\pi i\ m/n$ 或 $\lambda=2-\exp(2\pi i\ m/n)$ (m/n 是小于 1 的不可通约的有理数)的点所定义的。

图 19–3　这是 λ–图关于 $\lambda=1$ 的逆的一部分。在 λ–图上考察其根为 $\lambda=\exp(2\pi i/n)$ 的芽，我们获得了印刷品，即位于图上的“相应点”。现在的图给出了证明。其他可见的图由不同的反演所证实。

岛分子　图的周围的许多斑点是真正的“岛分子”，这是在 Mandelbrot 1980 n 中首次提出的。他们的形状除了非线性变换外就像总的 μ 映射。

分离器，脊骨和树　在 λ–图或 μ–图中，充满黑色的区域的边界是一条连通的曲线，这由我所发现并称为分离器 $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}$ 内的集分解成开的原子(见正文)。当原子的周期为 W 时，让我们把其中 $f_W^*(Z_\mu)$ 是实数的曲线定义为它的脊骨。

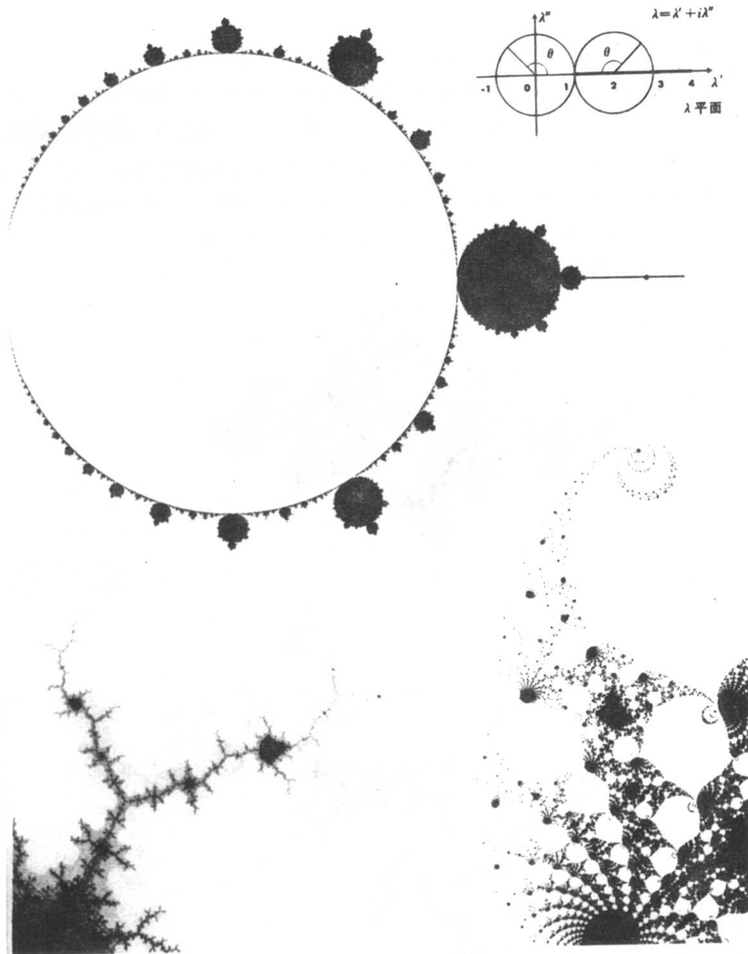


图 19–5

位于实轴上的脊骨，在自映射理论里通常就是[0,1]，而它们的闭包已知为[-2,4]。

我还发现，更为一般地，其他原子的脊骨的闭包分解成树的集合，每棵树都长在一个传感器接头上，在此树的不同点处，其树枝状的阶数表是由对分枝末梢的1，加上通向树根的分枝阶数。此外，当树是长在岛原子上时，还必须加上从$|\lambda-2|\leqslant 1$或$|\lambda|\leqslant 1$通到该原子的分岔阶数。

图19-5(左下) 这是接近于$\lambda=2-\exp(-2\pi i/3)$的$\lambda$的细图。在$\mathcal{S}$内的集是由$|f_n(1/2)|<R$所形成区域的极限，它的边界是称为双纽线的代数曲线。有几个此种区域被显示为重叠的。对于大的n，这些区域似乎是不连通的，λ-图同样如此，但事实上它们在计算用网格之外是连接的。

图19-5(右下) 这是接近于$\lambda=2-\exp(-2\pi i/100)$的$\lambda$的细图，这个成百折叠分枝的树与图19-8的$Z$图共享着令人注目的特征。■

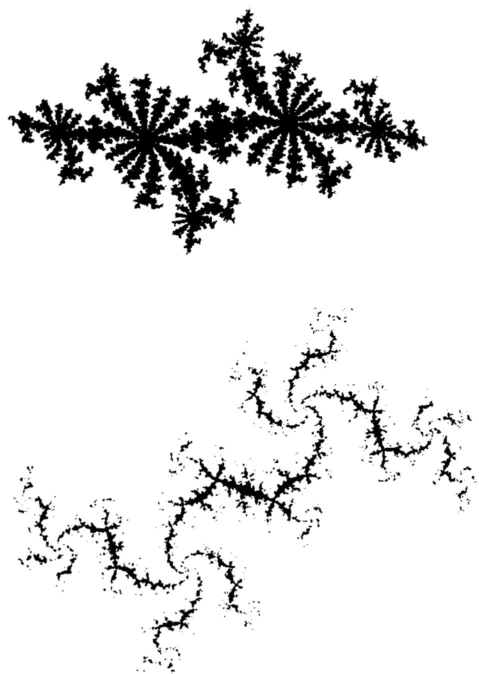


图19-6

图 19-6 至图 19-8　自平方龙；迫近“皮诺”极限

每一条自平方曲线以其独特的形式特别引人。而对我最有吸引的是“龙”，它们示于图 19-6 至图 19-8 和彩图-3。

似龙的脱壳　现在看到的由自平方过程构成的龙，是多么有感染力啊！大量的“脱壳”，从龙腹和龙背的无数折叠处分离出龙的腹部和背部的皮肤。然后把每个皮肤伸长为它长度的 2 倍，当然，始终保持为无限！下一步围绕着背部和腹部将每个皮肤折叠，最后，把所有的折叠重新精致地联结在它们的新位置上。

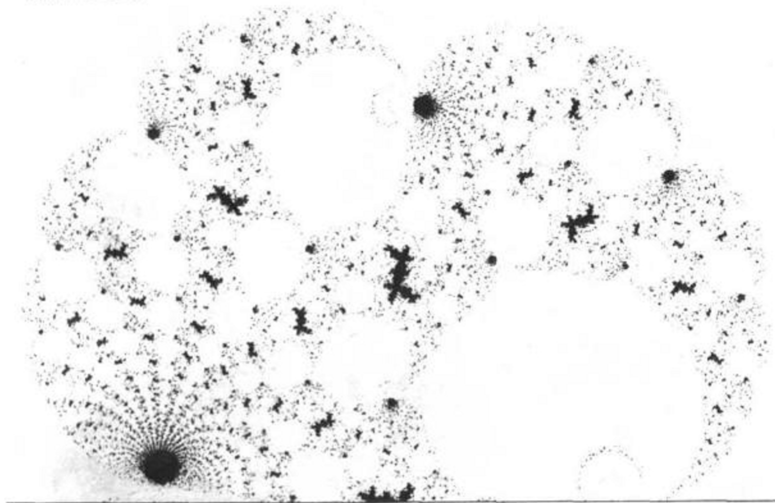


图 19-7

分形纹章图样学　不要把这种自平方龙与图 7-8 的说明中 Harter & Heightway 的自相似龙相混淆。读者会发现，详述它们的类似性和许多相异之处是很有趣的。

逐次分岔　当 λ 位于图 19-5 的芽里，相应于对小的 n 和 m 有 $\theta/2\pi=m/n$，就得到最好的自平方龙。给定分岔的阶数 n，围绕每个关节点的龙头或龙尾（不管如何称呼这些区域）是 n。阶为 m'/n' 的第二分岔把此种区域分割为 n' 个“香肠形的联接”，并且越往小就越细。

具有好身段的龙，既不肥胖也不很瘦，当 λ 位于远离根部的芽内时就可得到。而当 λ 位于接近于 2 个相应于 4 至 10 阶分岔的子芽之一内时，就得到美丽的双龙：一个子芽生成左螺旋状的龙，另一个生成右螺旋状的龙。

图 19-6(下) “饥饿的龙” 具有无限多次分岔的龙失去了所有的肉而塌成一条树枝状曲线的骨架。不趋于∞的集之拓扑维数，对法图尘埃是 0，对饥饿龙是 1，而对其他龙是 2。

图 19-7 σ-龙 这个图形是连通的，它的 λ 值于图 19-5(右下)的大“近海岛屿”上。

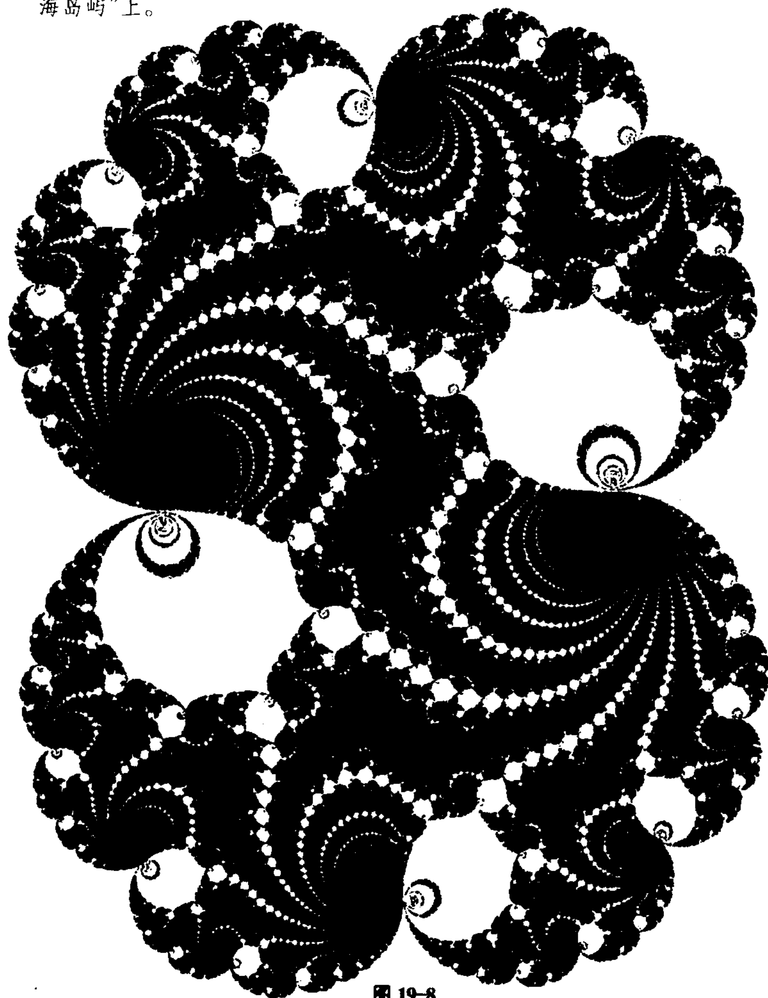


图 19-8

图 19-8 奇性极限 λ=1，皮亚诺龙 设 λ 位于 $\theta = 2\pi/n$ 的接头的近海岛

屿上。当 $n\to\infty$ 时 $\theta\to 0$,因此 $\lambda\to 1$ 相应的龙必然地趋于图 19-2 上以折皱为基础的海扇图样。但是 $n=\infty$ 与 n 大而有限,在定性上不相同。

当 $n\to\infty$,龙臂的数目增加,皮肤变皱,而皮肤的维数增加。实际上从整体企图趋于"寄居蟹-龙",它填满 $\lambda=1$ 的海扇壳直至边缘,即维数 $D=2$。这是一条皮亚诺曲线吗?是的,但是我们从第 7 章知道,皮亚诺曲线并不是曲线:当它达到 $D=2$ 时,我们的龙曲线作为曲线已经消失,而成为一个平面区域。 ▬

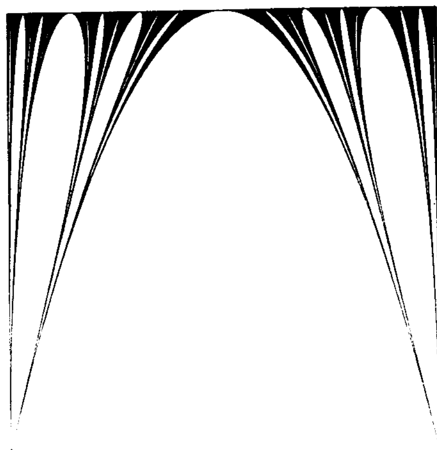


图 19-9 [0,1]上的实自平方法图尘埃

Fatou 1906 是一部古典文学性的杰作:巴黎科学院出版的《计算报告摘要》。在许多情形里,作者已经想过每一件事只揭示小部分,而把显而易见的藏起来。

在其他不可思议的叙述中,经过长时间自我钻研后最了解的是,Fatou 1906 指出了下列事实。当 λ 是实的,而且 $\lambda>4$ 或 $\lambda<-2$ 时,在变换 $x\to f(x)=\lambda(x)(1-x)$下保持不变的最大有界集,是包含在[0,1]内的尘埃。本图所示的是 $\lambda>4$ 时这种尘埃的形状。沿着竖直坐标,$-4/\lambda$ 从 -1 变为 0。这黑色的区域标志着 1 至 5 阶孔洞的端点。中间孔洞的端点 x_1 和 x_2 是方程 $\lambda x(1-x)=1$ 的解;它们画出抛物线。第 2 阶孔洞的端点在点 $x_{1,1}$,$x_{1,2}$,$x_{2,1}$和 $x_{2,2}$,满足 $\lambda x_{m,n}(1-x_{m,n})=x_m$,等等。

康托类尘埃与所有函数中的一个最基本元素之间的重要关系值得非专家们了解。 ▬

第20章　分形吸引子和分形的("混沌的")演化

本章企图使读者了解一种与分形独立地发展起来,但又与分形相互渗透的理论。其最普通的名称是"奇怪吸引子和混沌(或随机)演化理论"。但是,我希望在本章的标题中给它一个新的名称。

它与分形的密切关系足以证明在本书中要提到这个理论,而且我认识到有必要把整个一章贡献给它,实际的原因是无须作什么专门的解释,因为只要对第18章和第19章结果加以重新解释,就可提出几个重要的论题。

其次,大自然中分形几何的几个特征当与分形吸引子理论相对照时就可得到澄清。的确,我的工作主要地涉及在实际空间中人们至少通过显微镜能够见到的图样,而吸引子理论最终涉及到的是位于一个见不到的、抽象的表示空间中的点随时间的演化。

这种差别在湍流领域中特别明显:湍流间歇性是我较早引用分形技术形式研究(开始于1964)的第一个主要问题。(完全独立地)奇怪吸引子理论确确实实是在茹勒和塔肯斯(Ruelle & Takens1971)的湍流研究中涉及的。至今,这两种研究还未碰到一起,但它们很快就会相遇的。

对科学的社会学感兴趣,是因为事实上尽管我对数学上的怪物与实际的物理形状之间联系的情况的研究遇到了阻碍,但具有奇特形状的抽象吸引子却平静地被接受了。

要提及分形吸引子的第三个原因,是由于其相应的演化看上去是"混沌的"或"随机的"的事实,就像在第21章和第22章将看的,许多科学家提出随机性在科学中应用的问题,现在通过分形吸引子将证实有这种希望。

最后,早在以前的各章里(或者找一、二个以前的版本)就同意

我论点的人，即那些接受自然界的许多方面只能借助于以前称为病态的某些集合来描述的论点的人，可能不耐烦从“如何”改为“为什么”。注释的理由已在几种情形里阐明了。要把前面几章里的几何框架加以美化，使得它们更加直接迷人是不困难的。然而我要求读者能获得爱好分形的习惯。这对大多数成长中的科学家来说开始可能是艰苦的。此外，由我看来，通过美化所作的伪解释是永不令人信服的，就像在第 42 章所阐述的，因此，靠解释是下策，除非这种令人信服的事是可行的，就像第 11 章那样。当分形吸引子成为那些肉眼能看得见的自然形状的分形几何学的基础时，我认为许多进一步的阐述将会出现。

因为有吸引子的变换是非线性的，可见分形很可能不是自相似的。这很好，在用直线的分形对应物来处理由非线性方程支配的现象中存在一种佯谬，能极好地说明一个自然现象的标度分形将是非线性分形的局部近似。

吸引子的概念

这一章的中心议题是围绕一个长期忽略的 H. 庞加莱的考察，非线性动力系统的“轨道”可被“吸引”到奇怪集合，我认为它等同于非线性分形。

首先考察最简单的吸引子：一个点放在漏斗里的一个小球运动的“轨道”，开始时作摆动，它依赖于初位置和初速度，但最终收敛到漏斗的尖端；如果小球比漏斗的小孔要大，则它就静止于尖端，此尖端就是小球的稳定平衡点，或是稳定的不动点。用美妙的另一种描述术语（我们必须十分小心，不要用以人为中心的术语来解释）漏斗的尖端被称为吸引点。

一个物理系统还可以有一个稳定的吸引圆或椭圆。我们相信（而且热烈地盼望，虽然没有一个人将会长命到关心此问题）太阳系是稳定的，这就意味着如果地球轨道受到摄动，最终仍会被“吸引回”它现在的轨道。

更加一般地，动力系统通常定义如下：它在时间 t 的状态是在直线上、在平面上或在更高维的欧几里得“相空间”$\mathbb{R}^E$中的一个点$\sigma(t)$，而它在时间 t 和 $t+\Delta t$ 之间的演变由不显含 t 的规则所确定，相空间中的每个点都可取为在 $t=0$ 时的初始状态 $\sigma(0)$，并从此点引出由 $\sigma(t)$时一切 $t>0$ 定义的一条轨道。

这些系统之间的主要差别要涉及到对大的 t，$\sigma(t)$的几何分布。称一个动力系统有一吸引子，如果该系统在相空间 $\mathbb{R}^E$存在一个适当的子集$\mathscr{A}$，使得对于几乎一切出发的点 $\sigma(0)$，当 t 足够大，$\sigma(t)$接近于 $\mathscr{A}$ 中某点的话。

排斥子的概念

另一方面，小球能够在铅笔尖点的不稳定平衡位置上保持均衡。当初始位置接近此平衡位置时，在小球收敛于别的稳定平衡位置之前，似乎被推开。

全体不稳定平衡状态的集合，加上他们的极限点，就称为**排斥子**。

在许多情形里，排斥子和吸引子通过翻转方程而交换角色。当作用力是万有引力时，只要逆转重力的方向，例如，考察一张很大的在两个方向有凹凸的水平薄纸，当把小球放在薄纸的上方而重力向下时，设 A 为吸引凹陷处，而 R 是排斥凸起处，而当把小球重新放置在薄纸的下方而重力朝上，则 A 和 R 交换角色。这种交换在本章中起了中心的作用。

分形吸引子，“混沌”

许多力学教科书涉及到动力系统，那里的吸引子是一些点，圆或是其他欧几里得形状，但是这些是少见的例外，而大多数动力系统是无比的复杂，它们的吸引子或排斥子趋于分形。下面几节所描述的例子里，时间是离散的，且 $\Delta t=1$。

一个是尘埃的吸引子，费根鲍姆的 α　最简单的例子是通过取平方而得到的(第 19 章)。作为前奏，考察另一个典型的康托尘埃 $\mathcal{C}$，$N=2$，而 $r<1/2$ 并在$[-r/(1-r), r/(1-r)]$内取值。这个 $\mathcal{C}$ 是由形为 $\pm r \pm r^2 \pm \cdots \pm r^n$ 的点集所定义的 $\mathcal{C}_n$ 的极限。当 $n \to n+1$ 时，$\mathcal{C}_n$ 中每个点都分岔为 2，而 $\mathcal{C}$ 是无限分岔的结果。

按 P. 格拉斯贝革的解释(预印本)，对实 λ，$\lambda \to \lambda x(1-x)$的吸引子 $\mathcal{A}_\lambda$ 与 $\mathcal{C}_n$ 相类似，但有 2 个不同的相似比，其中之一是费根鲍姆的$\frac{1}{\alpha} \approx 0.3395\cdots$(Feiganbaum 1981)。在无限分岔以后，该吸引子是一个分形尘埃 $\mathcal{A}$，具有 $D \approx 0.538$。

“混沌”　在有限时间里，$\mathcal{A}$ 中没有一个点被访问过二次，许多作者把分形吸引子上的演化视为“混沌”。

◁自仿射树　把(x, λ)平面的 $\mathcal{A}_\lambda$ 并列，就得到一棵树。因为 $\delta \approx 4.6692 \neq \alpha$，此树是渐近地带有残余物的自仿射。▶

注释　此理论在理想上应该着重于本质上感兴趣和实际的(但简单的)动力系统，它的吸引子完全是已知的分形，奇怪吸引子的文献——虽然极端重要——离此理想甚远：它的分形通常没被完全了解，只有少量真正引人注目，而大多数无助于很好促进问题的解决。

这使得我要设计“动力学系统”，它相当于寻找新问题获得古老而愉快的解答。也就是说，要设计的问题的解答是熟悉的分形，有点意外的是这些系统都很有趣。

自反演吸引子

第 18 章描述了庞加莱链的集 $\mathcal{L}$，它既是最小自递集又是极限集。重述上面的特性：任意给定一个出发点 P_0，对 $\mathcal{L}$ 中的每一个点，通过 P_0 的反演序列变换可任意精度地接近它。现在假定这个反演序列由一种与 P 点现在和过去位置都无关的分离过程所挑选，在较宽的条件下，P 点的最后序列总能期望，而且实际上显

示出被 $\mathscr{L}$ 所吸引。用这种方法，基于反演，与群有关的大量的文献是借助于动力系统来阐述的。

“时间”反序

我把对有趣味的分形吸引子系统的进一步探索移向一批已知系统的藏宝处，它们具有几何上的标准吸引子以及感兴趣的排斥子，为了使这两种点集的作用逆转从而使得时间逆行，只要动力系统有可逆的功能(轨道永不相连或相交)这是可能的。这样 $\sigma(t)$ 的知识就决定了对 $t'<t$ 的全部 $\sigma(t')$。然而，我想要的反序时间的专门系统是不同的。它们的轨迹像河流：其路径由下坡的方向唯一确定，而在上坡方向，每逢分叉都包含一次特殊的决定。

例如，我们来试试逆转 V-变换 $f(x)$，它在第 19 章中给出康托尘埃，对 $x>1.5$ 定义两个不同的逆函数，而且可以同意把所有 $x>1.5$ 变换到 $x=1/2$。类似地，$x\to\lambda x(1-x)$ 有两种可能的逆变换，在这两种情况，一种有意义的反演要在两个函数之间选择，在其他例子里，可能性的数目甚至更大，我们再次要求它们由一种分离过程挑选。这些思想提出了广义动力系统，将在下一节中介绍和描述。

可分解的动力系统(Mandelbrot 1980 n)

我们要求状态 $\sigma(t)$ 中的一个坐标，称它为确定指标，记作 $\sigma^{\downarrow}(t)$，它与其他 $E-1$ 个坐标[记作 $\sigma^*(t)$]的状态无关地演变，同时从 $\sigma^*(t)$ 变换到 $\sigma^*(t+1)$ 是由 $\sigma^*(t)$ 和 $\sigma^{\downarrow}(t)$ 共同确定的。在我研究得最多的例子中，变换 $\sigma^*(t)\to\sigma^*(t+1)$ 是选用 G 种不同可能性的有限集合 $\mathscr{G}_g$，它可以按照某整值函数 $g(t)=\gamma[\sigma^{\downarrow}(t)]$ 的值选出。这样，我研究了有限指标集与 σ^*-空间的动力学。

事实上，在促使这种推广性的例子中，序列 $g(t)$ 或者是随机

的，或者是顺其自然的。在下章以前本书还没有处理随机性，但是我怀疑这将是一个严重的困难，更为严重的事实是，动力系统正是有完全确定行为的模型，因此严禁容纳随机性。然而，我们可以只引入它的效应而实际上并不要求它，把 $g(t)$ 取作一个充分地混合的各态历经过程的值。例如，取一个无理数 β，使 $g(t)$ 是 $\sigma^{\downarrow}(t) = \beta^{t}\sigma^{\downarrow}(0)$ 的整数部分。必要的叙述原则上很容易，但很繁复，这里就不写了。

“奇怪”吸引子的作用

“奇怪”吸引子的研究推动了下列两部分的论证：(A)承认标准吸引子的动力系统不能解释湍流，也许用拓扑上的“奇怪”吸引子能够做到(这就想起了第 11 章里的独立论证，当微分方程没有标准奇性时，就应该试一下是否有分形奇性)；(B)极其简单系统(例如 $Z \to \lambda Z(1-Z)$，λ 和 Z 是[0,1]中的实数)的吸引子是奇怪的，而且在许多方面反映了更为复杂和更加真实的系统的特征。因此，不容怀疑，拓扑上的奇怪吸引子是个通例。

术语“分形”与“奇怪”的比较

每个已知的“奇怪”吸引子都是分形　对许多“奇怪”吸引子已经计算出 D，所有情形里都有 $D > D_T$ 因为这些吸引子是分形集，对许多奇怪吸引子的分形来说，D 并不是不规则性的测度，而只是光滑曲线或曲面互相堆聚的方式——破碎性的差异(第 13 章)。

一个称为螺线圈的著名吸引子是由斯梅尔分两次引进的。原始的定义是纯拓扑的，保留 D 为不定，但在修正后有了度量(Smale 1977，第 57 页)。为此修正，Mandelbrot 1978 b 中计算了 D，那是为了把 D 加入到奇怪吸引子的研究中。对于萨尔兹曼-洛伦兹吸引子，其 $\upsilon = 40$，$\sigma = 16$，而 $b = 4$，其值 $D = 2.06$。这是由 M.G.维拉德和 Y.辛赖各自独立算得的(私人交谈)，这个 D 大于 2，但又超过

不多，意味着这个吸引子的确不是标准的曲面，但离其也不很远。Mori & Fajisahe1980 证实了我对斯梅尔吸引子计算的 D 和对萨尔兹曼-洛伦兹吸引子计算的 D。对于埃侬映射($a = 1.4$，和 $b = 0.3$)他们求得 $D = 1.26$，许多其他具有同样作用的文章正在陆续发表之中。

其逆　会不会"所有分形吸引子都是奇怪的"只在语义学上有意义。越来越多的作者同意我的观点：在大多数意义下，当一个吸引子是分形时，它是奇怪的。如果把"奇怪的"看成是"畸形"、"病态"的和曾一度用于个别的分形的其他的修饰词的同义词，这是很正常的看法。

但是"奇怪的"有时也有专门的意义。◁这是多么不相容，即萨尔兹曼-洛伦兹吸引子不是"奇怪的"，而是"奇怪—奇怪的"▶由此看出，一个吸引子的"奇怪性"包含了非标准的拓扑性质，与同意作为"普遍的"非标准分形性质。一条没有双重点的闭曲线在此意义下不是"奇怪的"，然而它被弄皱后可以是奇怪的；因此，我考察的许多分形吸引子不是奇怪的。

用这种"奇怪的"的定义，前节的论证就不再吸引人了。但是，如果把奇怪性从拓扑概念修改成分形概念，则将再次引入注目。因此我想，把"奇怪"定义为"分形"的人应该会获胜。因为的确正在取得胜利，当我证实了分形并没有比海岸线或山脉更奇怪后，很少有理由要保留一个没有推动力的术语。无论如何，我不能隐瞒个人对术语"奇怪的"厌恶。▬

图 20-1 和图 20-2　吸引到分形

这两个图样表明了两个可分解动力系统的依次位置的长轨道。图 20-2 上的法老的护胸甲是自逆的(第 18 章)，它基于 4 次反演，选择得保证极限集 $\mathcal{L}$ 是由圆组成的。图 20-1 上的圣·马可龙是自平方的(第 19 章)，它基于 $x \to 3x(1-x)$ 的 2 次反演。

确定性指标分别在 4 或 2 种可能性之间选择，用伪随机算法重复计算 64,000 次，算得的头几个位置图上没有画出。

填充尖点和自相交邻近的区域是非常慢的。▬

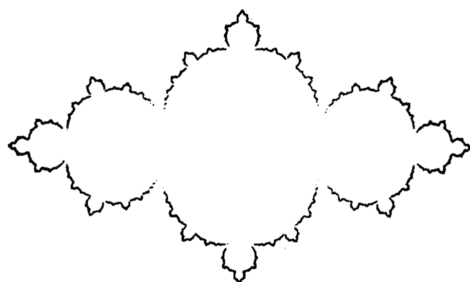


图 20-1

图 20-2

第七篇　随机性

第 21 章　机遇，作为建模的一种工具

虽然基本的分形论题仅仅包含确定性的结构，但是这些论题的完整意义和与实际的关系在我们处理随机分形之前是不明显的，相反，分形的研究，至少对于作者来说似乎可增加人们对随机性的了解。

插入机遇的主要原因是它对每一个科学家都是熟悉的，但是仍然应该在本章作些评注，并对一般性质的通常不太熟悉的评论加以说明。下一章将开辟新的前景，以表明机遇对于专门的分形研究也是需要的。

用 $\langle X\rangle$ 标记期望；概率的缩写是 *Pr*

似乎每个学科都用不同的标记来表示随机变量 X 的期望，本书采用物理学家的记号 $\langle X\rangle$，因为它具有包括变量本可携带括号的优点。

给定一个函数 $B(t)$，以及 $\Delta B(t)=B(t+\Delta t)-B(t)$，称 $\langle \Delta B(t)\rangle$ 是 σ-平均，并称 $\langle[\Delta B(t)-\langle\Delta B(t)\rangle]\rangle$ 是 σ-方差。

随机模型的标准法则

让我们回到"英国海岸线有多长?"的老问题。尽管它使我们想起了实际的地图。科赫曲线有个主要缺点,它与我们在本书研究的所有其他现象的早期模型中遇到的缺点几乎没有什么两样!它的每个局部是相互等同的。而自相似比 r 必定是如 b^{-k}尺度的部分(其中 b 是整数),即 1/3,$(1/3)^2$,等等。

我们可以借助于更为复杂的确定性算法来改进这个模型。然而这种方法不仅冗长,而且注定要失败,因为每一条海岸线的形成都是经历了几个世纪来的多种影响,它们并没有记录下来,而且不能更详细地再重新构造出来。想要达到完整的描述是无希望的,甚至不应该去做它。

在物理学中,例如布朗运动理论,解脱这种困难的关键是应用了统计学。在地貌学里,统计学几乎是难以避开的。的确,当力学规律直接影响到分子运动时,它们通过许多尚未探索的中间物影响地貌的形成。因此,许多地貌学家(比物理学家还要多)被迫放弃对实际的精确描述而用上了统计学。在我们将要探索的其他领域里,局部相互作用最新知识介于物理学和地貌学之间。

寻找正确的机遇不规则性总和

机遇能够引起,譬如在海岸线中所遇到的很强的不规则性吗?这不仅是可能的,而且在许多情形里它超过所希望的目标。换句话说,机遇的功能被极大地低估了。物理学家的随机性概念建立在许多理论之上,其中机遇只在微观层次上是重要的,而在宏观层次上又是无关紧要的。与此完全相反,在与我们有关的标度随机分形的情形中,机遇的重要性在包括宏观层次在内的一切层次上都保持不变。

机遇的实际应用

统计学的不可预测性与确定性之间的关系，引起了一些引人注意的问题，但本书很少涉及。它使得“在随机”的表述回到了中世纪时的直观含义，在当时，英文是从法文借用来的。词语“*un cheval á randon*”(法文)被认为和数学公理或马的心理学无关，只表示马夫不能预言的马的不规则运动。

因此，当机遇引起各类准形而上学似的不安时，本书决定很少涉及是否是用爱因斯坦的话“上帝掷骰子”。概率理论只是一种数学工具，有助于绘出未知的和不可控制的蓝图。十分幸运，这个工具对于复杂问题特别有用和方便。

从递归性到随机性

此外，概率理论能顺利地引入到在本书中占重要地位的递归方法中。换句话说，本书的下半部与上半部没有不连续处。我们将继续把注意集中到下列情形，即数学定义和图形算法两方面都能用具有内循环的“处理程序”的形式写出，而且每循环运行一次，又有新的细节增加到前面得到的结果里。

我们所熟悉的，产生三元科赫曲线的循环就归结为这样的处理器程序。但另外一些非随机分形还包含有另外的一个“控制程序”。现在我们要强调的，它的作用是有趣的并更进一步向着增加普遍性的方向发展。在第一步，从图 6-8 的说明中可以看出，某些科赫发生器能够用于直线(*S*)和跳动(*F*)的不同型式，因此需要一个控制器，在每个循环之前告诉处理机是用 *S* 还是 *F*。一般说来，不同的控制序列会产生不同的分形。因此，对于每个选定的 *M* 和相应的 *D*，由于每个控制序列的作用，图 6-8 的分形循环实际上不是一条曲线，而是无限(不可数)的曲线族。这控制器可以是从磁带上读一个序列，也可以是解释形如“交替 *S* 和 *F*”的简要说明，或

“当 π 的第 k 位小数是偶数(或奇数),让第 k 阶段用 S(或 F)”。

随机性/伪随机性

许多随机分形包含有精确的相同的模式:一个解释控制器跟随着一个处理器。这个事实常常是不明显的(有时做的事情很难看出),但是在那些明显地由递推定义的合适的情形里,这是十分清晰的。

最简单的控制器就是所谓的“投掷硬币序列”,然而我从未用过它。在今天计算机的环境里,控制器就是一个“随机数发生器”。它的输入,称为源,是一个整数,它有预先规定的 M 个二进制数(M 由设备决定,当输入的数字少于 M 个时,在前面用 0 填补)。控制器的输出是 0 和 1 的序列。在模拟的伯努利游戏里,每一个数字都代表掷硬币的一个结果,而掷 1000 次硬币的游戏实际上就是 1000 个个别的伪随机数字形成的序列。

现设想有一本 2^{1000} 页的原书,把每掷 1000 次硬币的可能结果记录在单独的一页上。因此任何一个掷 1000 次硬币的游戏都可从该书中选出一页来确定。这个机遇参数就是书的页数,即源。

更加一般化,控制器的输出常分割为 A 块,A 是整数,然后在前面增加一个小数点,每一块就构成一个分数 U,并称此分数为“从 0 到 1 之间均匀分布的随机变量”。

实际的随机集发生器的输出并不是单个函数或形式,而是一本真实的有 2^A 页的“富丽堂皇的财产目录”,每一页都提供了一个单独的形式。另外,页数就是源。

植物学的类似当然推出源是相同的和不同种类的全体。我们容许对于“有缺陷的源”生长出非常不典型的植物,但是我们期望其中绝大多数的植物在细节上是不同的,但本质上是相同的。

随机数发生器是任何模拟的关键部位。向上去是多种操作(在每一种情形里都包含了数论和概率论之间的同样关系)。而且与程序的目标是无关的。它们是确定性变换的样版,这种变换用

概率论的描述来模拟随机性。向下去是许多台阶，它根据模拟的对象而改变。

从这种实际的环境到十分完善的递推概率的运动是很自然的。主要改变是具有有限位数的分数由实数来代替。其源成为神秘的"基本事件"，数学的概率专家们用字母 ω 来标记。◁为了把 ω"解释"成实控制变量的无限序列，Paley & Wiener 1934 提出了逆康托对角化。▶

机遇对实际描述的空祈祷

前节提出机遇理论在实际上并不困难，很遗憾，它实际上也不容易。就是说，要获得一个海岸线的模型，它没有科赫曲线的不足，但又要保持原有的优点。这就要对曲线不同的段作变形并且修改它们的尺寸，一切都是随机的，然后再按随机次序把它们串在一起。

对机遇的这种祈求在开始研究时是能够容许的，在较早的几章里是放任自由的。这并不犯错误，除非读者把它隐藏或者作者不承认。在某些情形里它能够完成，但在另一些情形里，仅仅求助于机遇只是一种空姿态。的确，要描述一般的可接受的随机曲线法则是很难的，因为几个几何集嵌入一个空间。仅仅随机地改变海岸线各部分的形状、尺寸和次序会趋于留下一些不适合在一起的片段。

无约束和自约束机遇

由此我们立即面临一种具有巨大实际影响的非正式的区别。有时跟随着一个处理机的控制器可以通过它们的循环而不需要检查较早循环的效果，因为它不怕结果不匹配，我们就称这种植物包含了机遇的无约束形式。否则，构造的后来阶段要受到前面阶段输出的约束，而且(或者)机遇由空间几何学强烈地自约束着。

举一个反例，一个点阵上的 $2n$ 边形（它们可以自相交的）就引起一个较容易的组合学问题。而且能够产生一个无约束机遇的多边形。但是海岸线必须是不自相交的，而计算海岸线的对边形的近似的数目是一个很强的自约束机遇问题，继续避免了最好的结果。

因为包含有自约束机遇的问题是很困难的，本书除第 36 章以外都不讨论它。

双曲随机变量

非均匀的随机变量 X 只是单调的非减函数 $x = F^{-1}(u)$。它的反函数 $U = F(x)$ 称为概率 $Pr(X < x)$（$F(x)$ 或 $F^{-1}(u)$ 的不连续性需要谨慎描述）。

表达式 $Nr(U > u) \propto u^{-D}$ 已在第 6，13 章和第 14 章中扮演了主角，它在概率论的对应表达式 $Pr(U > u) \propto u^{-D}$ 称为双曲分布，它将在本书的其余章节扮演重要角色。$Pr(U > 0) = \infty$ 的性质是很怪的，但不要引起惊慌。其实它正是我们所期望和能够处理的，就像第 13 章中的 $Nr(U > 0) = \infty$ 一样，要谨慎地处理它，但专门的术语可以并将会避开。

随机集的典型值 D 和 D_T

对于随机集的维数概念要求很细致。我们前述的那本“辉煌的财产目录”把一群随机集收集在一起，它的每一页是一个集合，因此就像以前各章那样，具有与其相联系的值 D 和 D_T。这些值在样本之间变化，但在所有我们遇到的情况下，它们的分布都是简单的。

存在一批超常的样本（“有缺陷的源”），其 D 可取所有各类值，但这批样本的概率全部消失。所有其他的样本都用某个普通的 D 来表达，称为“殆必值”。

我相信对于 D_T 也是同样的，希望数学家们能注意研究它。

殆必值在每一种方法中都是群体的“典型”。例如，D 的期望值与殆必值是恒等的。

另一方面，我们应该避开“平均集”维数的想法。例如，假定读者有一幅对称随机行走的智力图象，我们试图来定义平均行走。如果这是一个过程，它的位置是在群体里所有行走的平均，则此平均不是行走而是就坐：它永不离其初始位置，因此 $D=0$。◁在第25章同时几乎对于每一种行走都推出 $D=2$。▶只有用平均 D 表达的集作为平均集，才在处理维数时是“稳妥的”。这个定义所以稳妥，因为它是周而复始的。

能适用于非随机分形的任何方法都可用来计算 D。但要记住第13章的警告：当分形集的一部分包含在一个球心在集上、半径为 R 的小球内时，趋向具有一种测度（质量），满足 $M(R)\propto R^Q$，则指数 Q 不需是维数。

第 22 章　条件定常性和宇宙学原理

前一章再一次用通常的理由表明,对于有用的随机性,不区分标准的和分形的模型。在标准的叙述里,随机化带来了显著的改进。然而,非随机模型对于许多目的仍然是容许的。现在要表明,在分形的叙述里,对于一个实际可接受的模型,随机性是必要的。

平移不变性,对称性

这个论题包含了对称性的古老哲学概念。这里不要理解为对一条线的"两面"对称,而是结合希腊文 συμμετρια 的原始意义,理解为产生于各个组成部分对整体的等同性(Weyl 1952),以及物理学家近来的用法,把对称性称为不变性的同义词。

非随机分形的必然失败,是由于它们不是十分对称的。它的失败首先在于,在不同科学的词汇里把一个非随机分形看成是平移不变的或定常的是不可思议的,而且不符合宇宙学原理。

其次,一个非随机分形不能是均匀标度,在此意义下,它只允许相似比为形如 r^k 的离散标度。

星系集团的问题如此重要,以致现在的讨论将要以它为中心,让本书这章的第二部分献给天文学。

宇宙论原理

假设时间和我们在地球上的位置既非特殊也非中心,即自然界的定律必须是到处相同和总是相同的,这样的公设称为宇宙论原理。

由爱因斯坦和 E.A. 米尔恩(North 1965, 第 157 页)形成的这个论断,Bondi 1952 有详细的讨论。

强宇宙学原理

宇宙学原理的一个牵强的应用，是要求物质的分布精确地服从同样的规律，而不管用怎么样的参考系(原点和轴)。换句话说，分布必须是平移不变的。

当选择一个术语来表示这个推论时，必须十分谨慎，因为它不是讨论理论($\lambda o\gamma o\sigma$)，而是讨论描述($\gamma\rho\alpha\varphi\eta$)，以及因为我们一会儿将要提出一系列减弱的形式，所以最好称它为强宇宙学原理。

这个基本思想已经写进了库萨的尼古拉(1401～1464)的"有学识的无知"的教义之中："我无处不在，我的思想是中心"；"世界处处有中心，因此也就处处有中心和处处无周围"。

宇宙学原理

然而，物质的分布不是严格地均匀的。

该原理最明显的减弱，就是在前一章所描述的标准结构里引进机遇。这样产生的断言，被概率专家称为统计定常性。但是，为了一致起见，我们将称它为统计均匀的宇宙学原理，物质的分布服从同样的统计规律，而不管参考系如何。

一个困惑

上述原理对银河系集团的应用提出了艰难的困难，第 9 章的傅尼埃宇宙当然是极其不均匀的，但是我们可以期望把它随机化，使之满足统计均匀的宇宙学原理。然而，为了保持模型的本质，随机化必须保持这样的性质，即在半径为 R 的球里的近似密度 $\mu(R)R^{-3}$ 当 R 趋于无穷时要趋于 0，遗憾的是，后者的性质与统计的均匀宇宙学原理是不相容的。

有吸引力的是只对数值给以比一般原理更少的重量，并作出

结论是谱系集团必须终止于一个有限的上限，结果所有的脉动是局部范围的，物质的总密度最终不等于0。

为了实现这种想法，可以给出一个例子，取无限多的傅尼埃宇宙然后以统计均匀的形式把它们散布在周围。R.M.Soneira 提出一个不同想法在 Peebles 1980 作了讨论。

有条件的定常性

然而，我相信统计均匀的宇宙学原理超出了合理和所希望的范围，应该用一个较弱的形式来代替，称为有条件的，它与所有的观察者无关，而仅与物质的有关。天文学家应该发现这种弱形式是可接受的，而且在很久以前可能已经研究过，当时只有极小的实质性的兴趣，的确有条件的形式暗示没有任何有关全局密度的假定，而且允许有 $M(R) \propto R^{D-3}$。

不太武断地重新说明一下我的观点，要使强的宇宙学原理与下列概念相一致是很困难的，或者是不可能的：实际的星系离均匀分布相差甚远。一方面，假如在宇宙中物质的全局密度 δ 为0，则强宇宙学原理必定是错误的。另一方面，假如 δ 是小而正的，则强宇宙学原理是渐近地成立的，但是对于我们感兴趣的尺寸而言它却是无用的。假如再获得保证的话，则可以基本上保存它，但当存在导致混淆的可能时还是避开为好。最后，我们安排一个陈述来代替，它对所有的尺寸都是有意义的，而且不论对 $\delta = 0$ 或 $\delta > 0$，都是独立的，上面的近似相当于把强宇宙学原理再分为两部分。

条件宇宙学原理

条件分布 当参考系满足其原点是物质点本身的条件时，质量的概率分布就称为条件的。

原始的宇宙学假设 质量的条件分布对于所有的条件参考系都是同样的。特别是，在一个半径为 R 的小球内包含质量 $M(R)$

是与参考系无关的随机变量。

条件宇宙学原理的陈述,不管对 $\delta>0$ 或 $\delta=0$ 都是精确地相同的字句。这在美学上是令人高兴的,而且具有满足当代物理学精神的哲学上的优点,由于把强宇宙学原理再分为两部分,我们就能够强调每件事均可观察的提法。

正的总物质密度的辅助假设

辅助宇宙学假设 量

$$\lim_{R\to\infty} M(R)R^{-3} \text{和} \lim_{R\to\infty}\langle M(R)\rangle R^{-3}$$

同时都存在,几乎是必然相等的,而且是正的和有限的。

标准情形,$\delta>0$

物质分布的统计规律可用不同的方法来表达,可以用相对于任意参考系的绝对概率分布,另外,也可用相对于中心在物质点上的参考系的条件概率分布。在上述的辅助假设得到证实的情形里,由通常的贝叶斯法则从绝对分布推出条件概率分布。而绝对概率分布由条件概率推出,只要在相对于原始为均匀分布的整个空间取平均。

◁原始的均匀分布在整个空间的积分,导致无限的质量。非条件分布,当且仅当整体密度为正时,可重正化到总和为1,参见 Mandelbrot 1967 b。▶

非标准情形,$\delta=0$

假定相反,辅助假设是无效的,更精确地说,$\lim_{R\to\infty} M(R)R^{-3}$为零。假如这样的话,绝对概率分布仅仅说明,随机选取的有限半径 R 的球几乎必然是空的,因此从围绕着随机选取的一个点去窥测,

几乎保证什么也看不到。然而，人们只对真实宇宙情况下的质量概率分布有兴趣，而已经知道，在人们的周围质量不为零，发生了一个事件之后，所出现的绝对概率是令人感兴趣的。

从非条件分布自动地忽视这些情况的每一事实可推出，无论何时 $\delta=0$ 是极其不合适的，它不仅与带有满足 $D<3$ 的任何分形的质量相容，而且告知除了 $\delta=0$ 绝对没有任何东西。

与此相反，条件概率分布能在有不同分维的分形之间，在有无标度的分形之间，以及在各种假定之间加以区别。

非标准的“可忽略事件”

非标准情形 $\delta=0$ 对于物理学家，具有一个可能被忽视了的几乎确实的事件，以及一个零概率事件。后者不仅不能不加以注意，而且要分解为较小的子事件。

这种对立显然与人们的习以为常是相反的。在一次公正的掷硬币的递增序列里，开头的平均数可以不收敛于 1/2，但是不收敛的情况是零概率，因此缺乏兴趣。当一个统计力学的结论(例如熵的增加原理)几乎保证成立时，相反的讨论就是零概率，因此是可以忽略的。显然，在前述两句中因此产生了我在宇宙学提出的明显相反的情形。

回避层次

对称性的第二种形式与标度性有关。当一个非随机分形各部分的约化比都等于 r 时，可容许的标度比具有 r^k 的形式。当各部分的约化比是 $r_1, r_2, \cdots$ 时，其容许的总体比例的限制少一些，但仍然不能自由地选取。

换句话说，非随机分形包括了一种强的分层结构，或者像我所喜欢说的，是强层状的。某些层次模型对物理学家看来是好的，因为它们十分便于计算机上处理。然而这种特性在哲学上是乏味

的，而且在星系的情况又不存在集团形实体的直接证据。在著名的 de Vancouleurs 1970 中，听到了这个名称的原由。因为“沙利耶的工作推广到密度脉动的准连续性模型，可以代替原先过于简化的离散分层模型”。这个要求不能由非随机分形来实现，但正如我将要表明的那样，随机分形能够实现。

非层次化的条件，宇宙学的分形世界

就像前面所指出的，天文学家们不喜欢先验地提出有条件的想法，虽然这种想法是普通的，当具有了值得注意的结论后才被承认。我建议要证明这的确是一种真正的推广，而不仅是一种带有目的性的形式上的精练。第 32 章至第 35 章描述了具有下列性质的明显结构：

* 它们导致零的整体密度。
* 它们满足条件统计宇宙学原理。
* 它们不满足任何其他形式的宇宙学原理。
* 它们是关于每个 r 标度的。
* 它们不是设计成有层次的，而是用一个维数 <2 的推论来导出的一种表观的分层结构。
* 最后，它们与定量数据相吻合。

除最后一个外所有这些性质都满足我的每一个模型。至于在定量上的吻合，从第 32 章至第 35 章又得到了改进。因此，为了达到日趋完美的适合于数据的最佳分析，自然地通过增加复杂性来选择我的模型就足够了。

预告

在欢呼了完全由随机分形所打开的辉煌景色之后，还不能匆忙冲向期待的那些模型。因为它们显示出数学的复杂性，最好把它们推迟一下。第 23 章至第 30 章致力于比较熟悉的概率论基础。 ■

第八篇　有层次的随机分形

第 23 章　随机凝乳:接触群集和分形逾渗

本篇这几章将表明,有各种方法(简单得几乎有点可笑)可得到有效的随机分形。第 23 章是随机化凝固,这种方法常用于粗略描绘噪声的康托模型(第 8 章),星系的空间康托尘埃模型(第 9 章),湍流间歇性模型(第 10 章),等等。第 24 章想主要地介绍我的弯折曲线,即科赫曲线的一种新随机化形式。第 25 章涉及布朗运动。而第 26 章定义了另外的"随机中点位移"分形。

本篇标题中的术语"有层次的"一词,表示在所有研究的情形里我们处理的是由各层(等于拉丁文中的 *strata*)叠加构造的分形,而每层都包含有更精细的结构。在许多情形里,层是分级的。不用说明,以前各章的处理都是与有层次的分形不相容的。但是,以后各章建立了不需要一定是分层次的随机分形。

本章讨论的分形包含了一个网格或点阵,它由区间、方块或立方体构成。而每个又划分为 b^E 个子区间、子方块或子立方体:b 是点阵的基。

随机化的线性尘埃

直线上最简单的随机尘埃,它可以改进第 8 章中误差的康托模型,开始作为最简单的康托凝结:基为 b 的区间点阵和整数 $N <$

b。但是，这不是一个特殊的发生器，而是给出所有的可能的康托发生器的一个表。也就是，所有不同的 N 列是满的，和 $(b-N)$ 个空盒子，每个时刻，我们随机地（以等概率）选取其中的一个发生器。

凝乳的任意点 P 定义为，嵌入长度为 $R_k=b^{-k}$ 的"前凝乳"区间序列。如果总的初始质量为 1，每个前凝乳包含有相同的质量 R_k^D，在以 P 为中心，长为 $2R_k$ 的区间中的质量等于 R_k^D 乘以位于 1 和 2 之间且与 k 无关的随机变量。

考虑到 D 以序列 $\log(b-1)/\log b, \log(b-2)/\log b, \cdots$ 为界，这种限制常常是不方便的。更重要的是，上述的凝固定义难以在计算机上执行和作解析处理。因此，凝固的主要功效在于它的简单性。在下一节给出的另一个定义应是较好的。为了与本节的定义相区别，称其为约束的凝固（Mandelbrot 1974 f 称它为微正则的）。

凝固的随机线性尘埃

凝固的一个较好的定义（它是在 Mandelbrot 1974 f 中给出的，在那里称为正则的）是由二进制随机选择的序列（其中每个都仅仅受硬币试验的支配）。通过投掷一个硬币，一个级联的第一阶段就决定了每个 b 子区间的以后命运。当硬币落地正面朝上（一个概率 $p<1$ 的事件），则子区间就"活下来"作为前凝乳的一部分；否则就死掉。在每一步之后，在任意长度的两个死的子区间之间留下的孤立点被除去。它们仅是一点儿小麻烦，但是它们的平面或空间对应物（孤立的线，等等）将引入在集合内的虚假连通性。这活下来的子区间的期望数是 $\langle N\rangle=pb=p/r$。然后，又在一个子区间内继续这个过程（与其他子区间相独立地进行）。

诞生过程体系 称子区间为"孩子"，而总级联为一个"家族"，则表明了孩子数的分布是由已知的诞生和死亡过程所控制的（Harris 1963）。

基本结果是对 $\langle N\rangle$ 存在一个临界值：这个事实是由 Irénée

Bienaymé 在 1845 年发现的(见 Heyele & Seneta 1977),因此值得称之为比昂纳曼效应。

值$\langle N\rangle=1$是 m 代以后出现的子孙数 $N(m)$ 的临界值,它在第 m 代以后则受到下列另一种规则控制:当$\langle N\rangle\leqslant 1$时,几乎必然是家谱最后将终止,在目前的分析中意味着此级联产生了一个空集;与此相反,当$\langle N\rangle>1$时,每个凝乳的家谱都有扩展到无限后代的非零概率,在这种情形里,随机凝固就产生直线上的随机尘埃。

相似性维数的意义　比率 $\log N(m)/\log(1/r)$ 在此是随机的,相似性维数要求新的思想。几乎确定的关系式

$$\lim_{m\to\infty}\log N(m)/\log(1/r^m)=\log\langle N\rangle/\log(1/r)$$

提出了一个广义相似维。

$$D^*=\log\langle N\rangle/\log(1/r)=E-\log p/\log r。$$

用此 D^*,存在非空极限集的条件$\langle N\rangle>1$就取明显的形式:$D^*>0$。当 $D^*>0$ 时就有 $D=D^*$,当$\langle N\rangle\leqslant 1$时,形式地应用这个公式将得到 $D\leqslant 0$。但事实上,空集总具有维数 $D=0$。

递减 D 的嵌入凝乳

我们来构造一系列递减维数 D 的随机凝乳,每一个都嵌入其前面的凝乳。

最初一步不依赖于 D:它对每个任意阶的旋涡附上一个在 0 到 1 之间的随机数 U。我们知道(第 21 章),把所有这些数放到一起就等价于一个单独的数,即机遇分布的测度。第二步,选择 D,而最后写成的公式要用它产生概率阈值 p。最后,凝固包含下列的"分形舍取的过程",即每逢 $U>p$,旋涡沿它所有的子旋涡像乳清一样"死掉";当 $U\leqslant p$ 时,旋涡活下来而再次凝固。

这种方法使它可能具有所有以凝乳、乳清和作为连续变化维数的函数的一切其他集合的特征。它足以使得所有的随机数 U 固定下来,这时 p 从 1 减少到 0,而 D 从 3 减少到 0。

给定凝乳 Q_1 和 Q_2,它们对应于概率 p_1 和 $p_2(<p_1)$,且维数

为 D_1 和 $D_2(<D_1)$，则从 Q_1 到 $Q_2(<Q_1)$的变换就可称为相对概率 p_2/p_1 和相对维数 D_2-D_1 的"相对分形取舍"。为了直接进行相对舍取，寻找属于 Q_1 的边为 $1/b$ 的旋涡。让他们以新的概率 p_2/p_1 继续活着，然后对边为 $1/b^2$ 的活着的旋涡同样进行，等等。如果由逐次舍取得到序列 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_g$，把相对概率相乘而把相对维数相加，……直至他们的和小于 0，而 Q 成为空集。

星系的霍伊尔凝固

约束凝固有个空间对应物，它能用来补充星系分布的霍伊尔模型。见图 23-1 和图 23-2。

含有凝固的诺维可夫-斯图尔特湍流耗散

在非常早期的湍流间歇性模型里，也会无意地出现空间随机凝固。Novikov-Stewart 1964 假定，耗散的空间分布由一种级联所产生：每一步都取前一步的前凝乳，并进一步把它凝固成 N 个更小的片（比率为 r），见图 23-3 至图 23-6。

这是一个非常粗糙的模型，甚至比 Berger & Mandelbrot 1963 对某些过量噪声给出的模型（见第 8 章和第 31 章）更粗糙。它没有引起适当的注意，也没有继续和发展。但直接藐视它是不恰当的。我的研究揭示出，许多精练而复杂的模型的特征已经在凝固中出现。

干酪 用术语凝乳和用术语乳清作补充而组合起的形象，不应看作是文字上的意义，但是实际的干酪的形式可以由生物化学不稳定性产生。用同样的方法，诺维可夫-斯图尔特凝固推测是由水动力学的不稳定产生的。然而，我没有数据来说明是否任何食用干酪也是一个分形干酪。

随机凝乳是“在其中”的形状的结论

在 $D<3$ 的空间内的标准形状(点,线和面)已知其体积为0,对于随机凝乳,这也同样为真。

前凝乳的面积也表现得非常简单。当 $D>2$ 时它趋于无限,当 $D<2$ 时它趋于0。当 $D=2$ 时,凝固使得它本质上保持常数。

类似地,当 $m\to\infty$ 时,前凝乳边缘的累积长度,当 $D>1$ 时趋于无限;而当 $D<1$ 时趋于0。

这些体积和面积的性质,证实了分维满足 $2<D<3$ 的凝乳位于普通曲面和体积之间。

◁证明　当凝固被约束时最简单。第 m 阶前凝乳的体积是 $L^3r^{3m}N^m=L^3(r^{3-D})^m$,它以内尺度 $\eta=r^m$ 趋于0。在 $D<2$ 时,其面积根据上界而固定。第 m 阶前凝乳的面积至多等于有贡献的旋涡面积之和,因为后者之和也包括了子旋涡的边界,它们由于是毗邻凝乳共有而相互中和了。每个第 m 阶旋涡的面积是 $6L^2r^{2m}$,而总面积至多是 $6L^2r^{2m}N^m=6L^2(r^{2-D})^m$。当 $D<2$ 时,其上界随 $m\to\infty$ 而趋于0。这就证明了我们的结论;在 $D>2$ 的情况中,就得到下界,只要注意到,在第 m 阶前凝乳里所包含的各 m 阶旋涡之并的曲面至少包含一个边为 r^m 而面积为 r^{2m} 的正方形,它是包含在所谓第$(m-1)$阶前凝乳中,不可能消去,因此其总面积至少是 $L^2r^{2m}N^{m-1}=(L^2/N)(r^{2-D})^m$,它随 m 一起趋于 ∞;最后,当 $D=2$ 时,两个界限都是正而有限的。▶

分形截面的 D: 余维数加法法则

下面的内容在前面几章中提到过,现在预备在一种特殊情形里对它作明显而完整的处理。

作为基础,回想起欧几里得平面几何的一个标准性质,如果一个形状的维数 D 满足 $D\geq 1$,它与一直线的截面,假如非空,则“典

型"地是维数 $D-1$。例如正方形($D=2$)的一个非空线性截面是维数为 $1=D-1$ 的区间。而一条直线的线性截面是维数为 $0=1-1$的一个点,除非两条直线重合。

更一般地,涉及到相交后维数性质的标准几何法则,可总结如下:假如余维数 $C=E-D$ 之和小于 E,则此和就是典型相交的余维数;否则,该相交典型地是空集(鼓励读者对空间各种平面和直线的图形作校核)。

很幸运,该法则推广到了分形维数。要感谢它,许多有关分形的论证较我们所担心的远为简单。然而,必需记住大量例外的情形。特别是,我们在第 14 章看到,当一个非随机分形 $\mathcal{F}$ 被特殊位置的线或面所切,其截面的维数不能总由 $\mathcal{F}$ 的维数推出。但对于随机分形,在这点上是较为简单的。

随机凝乳截面 D

为了以分形凝乳的情形来证明此基本法则,考察轨迹(正方形或区间),它是凝固级联的旋涡或子旋涡留在边为 L 的原始旋涡的面或边缘上的痕迹。每个级联阶段用一些片(其数目由诞生和死亡过程确定)来代换一片前凝乳。把沿原始旋涡的边缘排成直线的第 m 代子孙的数目记作 $N_1(m)$。经典的结果(本章较早时已经用过)证明了 $N_1(m)$由下列的两者之一所支配:当$\langle N_1\rangle=Nr^2\leq 1$,即 $D\leq 2$ 时,几乎必然是其家族最终将灭绝,即边缘将成为空集,因此是零维;而当$\langle N_1\rangle>1$,即 $D>2$ 时,则相反,每一条家族线都具有推广到无穷多代的非零概率。而由于下列近乎肯定的关系式,相似性维数是 $D-2$,

$$\lim_{m\to\infty}\log N_1(m)/\log(1/r^m)=\log\langle N_1\rangle/\log(1/r)=D-2。$$

二维旋涡轨迹遵从同样的结论,只要用随机的 N_2(它满足$\langle N_2\rangle=Nr$)代替 N_1。当$\langle N_2\rangle\leq 1$ 即 $D\leq 1$ 时,每个旋涡面最终成为空集。当$\langle N_2\rangle>1$ 即 $D>1$ 时,由于下列近乎必然的关系式,相似维是 $D-1$,

$$\lim_{m \to \infty} \log N_2(m)/\log(1/r^m) = \log\langle N_2\rangle/\log(1/r) = D - 1。$$

约束凝固产生相同的结论。

为了进一步证实分维在相交下的行为如同欧几里得维数一样，由几个各自维数为 D_m 的凝乳的分形相交，取相同的网格，则满足 $E - D = \sum(E - D_m)$。

凝乳的拓扑：群集

虽然这种否认是令人厌倦的，基本不等式，即对于星系有 $D < 2$(第 9 章)和对于湍流有 $D > 2$(第 10 章)，不是拓扑的而是分形的。

在非随机凝固里，对于 $E \geqslant 2$(第 13 章和第 14 章)，设计者也控制着拓扑。连通的平面凝乳包含有谢尔宾斯基地毯($D > D_T = 1$)，而连通的空间凝乳包含了海绵($D > D_T = 1$)和泡沫($D > D_T = 2$)。其他的凝乳是 σ-群集或尘埃。因此，当 $E = 3$ 和 $D > 2$ 是湍流研究中感兴趣的情形，一个非标准的级联能产生 $D_T = 0$(尘埃)或 $D_T = 1$(曲线或 σ-曲线)或 $D_T = 2$(曲面或 σ-曲面)。当 $E = 3$ 和 $D < 2$，这是天文学感兴趣的情形，D_T 能是 0 或 1。

与此相反，一个随机凝固级联相当于统计上的混合发生器，它几乎必然地强加某个确定的拓扑(第 21 章末)。由于它非常粗糙，凝固是如此简单，这对于考察在这些叙述上的预言是很重要的。现在的知识是把已证明的事实与旁证的推论结合在一起。

临界维数 凝固的 D_T 当 D 通过某个临界阈值时不连续地变化，记为 $D_{1\,crit}, D_{2\,crit}, \cdots, D_{(E-1)crit}$。换句话说，分割成不同 D_T 值的许多段的混合凝乳是几乎见不到的。

最重要的阈值是 $D_{1\,crit}$。它同时是使凝乳几乎必然成为尘埃的那些 D 的上界，又是对下列 D 的下界，即使得凝乳几乎必然分离为无限个不连续的片(每片都是连通的)的 D。因在第 13 章所解释的原因，这些片称为接触群集。

另一个阈值 $D_{1\,crit}$，把凝乳是 σ-曲面之处的 D 与凝乳是 σ-曲

线的 D 分开，等等。假如而且当乳清的拓扑变得有兴趣时，则也可导致新的阈值。

群集维数 当 $D > D_{crit}$ 时，接触群集有一分形维数 $D_c < D$。当 D 从 E 减小到 D_{crit} 时，D_c 从 E 减小到 $D_{cmin} > 1$，然后突然降到零。

大小数的分布 在第 13 章的公式中以 Pr 代替 Nr，就得到 $Pr(\Lambda > \lambda)$，$Pr(A > a)$，等等。

D_{crit} 和 $D_{2\ crit}$ 的范围 显然，$D_{crit} \geq 1$ 和 $D_{2\ crit} \geq 2$。下节会证明 D_{crit} 的上界小于 E，这就表明上述的含义具有实际意义。

另外，不管 b，而紧缩下确界，立即会看到对于 $D_T = 0$ 的一个充分条件是 $D < \frac{1}{2}(E+1)$。因此 $D_{crit} > 1/2(E+1) > 1$。而 D_T 是 0 或 1 的充分条件是 $D < \frac{1}{2}E + 1$。因此，$D_{2\ crit} > 1/2E + 1 > 2$。

对于 $E = 3$，我们得到 $D < 1/2(E+1) = 2$，这对于傅尼埃–霍伊尔值 $D = 1$ 和对于经验的星系值 $D \approx 1.23$ 都是满足的（还带有余地）。因此，不论哪个 D 的随机凝乳都是尘埃，这正是我们所要的。

当 $E = 3$ 时，由条件 $D < \frac{1}{2}E + 1$ 得到 $D < 2.5$。此阈值也正巧就是湍流间歇性载体的估计维数。过去对由粗略平均得到的充分条件的经验表明，它们难得是最佳的。这样，应该有，湍流的凝固模型载体比纸还要薄。

下界的推导 它们的基础依赖于第 13 章所强调的事实，即凝乳接触群集产生在大量相邻单元集总在一起的地方。因此考察凝乳与一个平面之交，此平面垂直于一个具有坐标形式如 $\alpha b^{-\beta}$（其中 α 和 β 是整数）的轴。我们知道，假如 $D > 1$，此交具有非空的正概率。然而，集总就要求来自边长为 $b^{-\beta}$ 的二边的各部分贡献之间有交叠。假如非空，这些贡献就是统计上独立的，因此其交叠形式上具有维数 $D^* = E - 1 - 2(E - D) = 2D - E - 1$。

当 $D^* < 0$，即当 $D < \frac{1}{2}(E+1)$ 时，贡献没有交叠，因此该凝乳

不可能包含一条通过我们平面的连续曲线，而 $D_T < 1$。

当 $D^* < 1$，即当 $D < \frac{1}{2}(E+1)$ 时，此交叠(假如存在)不能包含一条曲线。因此该凝乳不能包含通过我们平面的一连续曲面，而 $D_T < 2$。

当 $D^* < F$ 而 $F > 1$，即当 $D < \frac{1}{2}(E+1+F)$ 时，同样的论证排除维数为 $D_T = F$ 的超曲面。

承认这些结果，上面不等式的证明的剩余部分就是直截了当的了：当凝乳包含一条曲线(或一曲面)时，在此曲线(或曲面)上的任意一点 P 都包含于边为 $b^{-\beta}$ 形的小单元体内，此曲线(或曲面)相交于某点(某条曲线)。这就确定，当 $D < \frac{1}{2}(E+1)$ $\left(\text{或 } D < \frac{1}{2}E+1\right)$ 时，几乎保证没有这种点(或曲线)存在。

逾渗的分形群集

拓扑的讨论最好用逾渗的词汇进行下去。按照第 13 章的定义，画在正方形或立方体上的图样称为逾渗，假如它包含一条连接正方形或立方体相对边的连续曲线。逾渗通常用在第 13 章和第 14 章中讨论的伯努利观点处理，但是用随机分形的观点会出现同样的问题。这里我们就以随机凝乳来处理。

基本事实是，当一个图样是 σ-群集时，当且仅当它的接触群集之一逾渗时它才逾渗。当接触群集是分形而且它们的长度服从无标度的双曲分布时，逾渗的概率与正方形的边无关，而且不退化为 0 或 1。在伯努利逾渗里，上述句子中的“当”字在很狭的条件 $p = p_{crit}$ 下满足。在通过分形凝乳的逾渗里，此条件放宽到 $D > D_{crit}$，这是一个值得注意的差别。然而，了解伯努利逾渗有助于我们了解凝乳的逾渗，而反之亦真。

D_{crit} 的一个上界　让我来证明，假如 $b \geq 3$，D_{crit} 就满足 $b^{D}_{crit} >$

原书缺页

图 23-1 和图 23-2　霍伊尔模型(维数 $D=1$)的建造过程,应用网格随机凝固

在霍伊尔模型里(第 9 章),密度非常低的气体云状物不断地崩塌形成了星系群集,然后是星系,等等。然而,霍伊尔的叙述是极大地简化了的,而实际的几何建造过程需要专门的假设。这两张图显示了最简单的建造过程的平面投影。

图 23-2　初始器是边为 1 的立方块,把它划分为边长为 5^{-1} 的 $5^3=125$ 个子立方块,如此等等逐次划分,第 k 级是边为 5^{-k} 的 125^k 个子子立方块。在第 k 个级联阶段,包含在一个第$(k-1)$级子立方块内的物质崩塌为一组,5 个第 k 级的子立方块,称为 k–前凝乳。

霍伊尔凝固总是把维数缩减,从 $D=3$ 降到 $D=1$。

此图用叠加显示了头三个阶段,应用从灰色逐渐加深阴影线来表示逐渐增加的气体密度。与 Hoyle 1975 第 286 页相比,此图似乎粗糙,但这是按比例详细地画出的,因为关系到维数的问题要求精确。

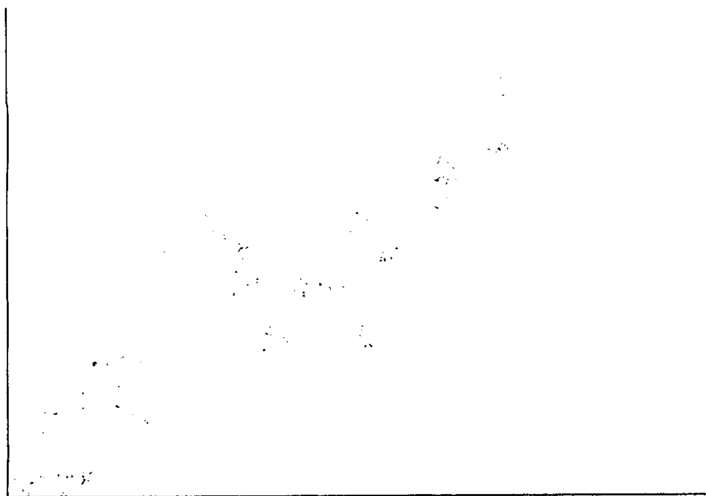


图 23-1

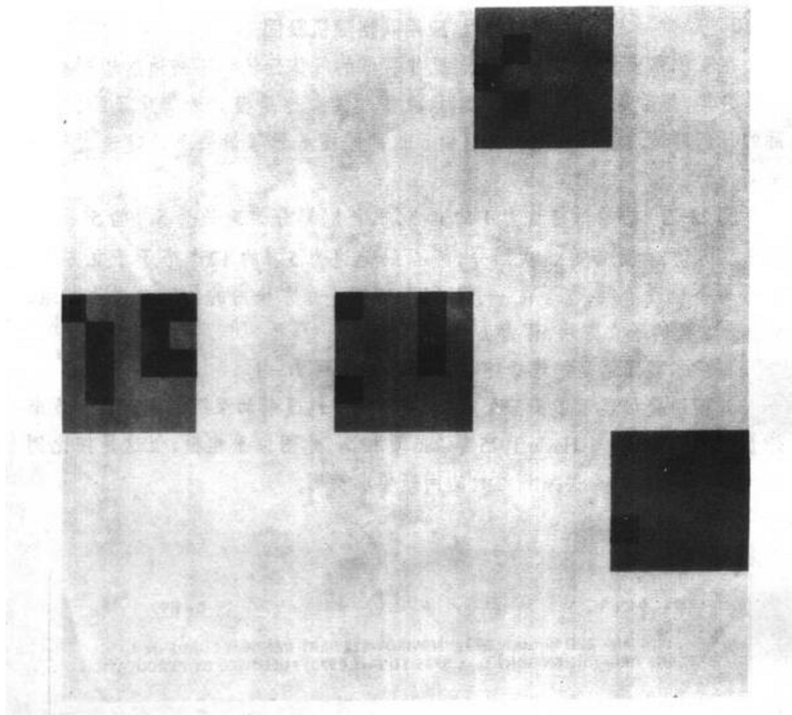


图 23-2

因为我们表现的是凝乳的平面投影，两个有贡献的立方块可能投影在同一正方形上，这是不稀奇的，然而，在取极限下，两点的投影几乎永不相重合。此尘埃如此地稀疏，当留在空间时本质上是透明的。

图 23-1 这是单独表示的凝固的第 4 个阶段(具有不同的源)。很少留有基础点格的痕迹，这是很幸运的，因为自然界不存在这种点格的痕迹(第 27 章)。旋涡的顶端(它被纸张的边缘切掉了)在该时刻是空集。

◁**腔隙的控制** 腔隙的概念(在第 34 章介绍)直接应用到线上的随机凝固和霍伊尔凝固。假如霍伊尔的 $N=5$ 由傅尼埃的"实"值 $N=10^{22}$ 所代替(图9-1)，随机凝乳的腔隙的确变得非常小。▶ ▬

图 23-3 至图 23-6　伴有逾渗的平面网格(维数 $D=1.5936$ 到 $D=1.9973$)的诺维可夫-斯图尔特随机凝乳

诺维可夫-斯图尔特级联提供了如何将流体中的湍流耗散凝固于一个相当小的体积中的一个有用的一般想法。从概念上看,这非常类似于前面两张图所说明的霍伊尔级联。然而,分维 D 是非常不同的。对于星系,$D\approx1$;当在湍流中,$D>2$ 和 $D\approx2.5$ 到 2.6 是个很好的推测。为了一般地了解凝固的过程,现在的四张图表示了几个不同的维数值,都取 $r=1/5$,而 N 分别取

$$N=5\times24,\ N=5\times22,\ N=5\times19,\ N=16 \text{ 和 } N=5\times13,$$

因为维数取值为

$$D=1+\log 24/\log 5=2.9973,\ D=2.9426,\ D=2.8505,$$
$$D=2.7227 \text{ 和 } D=2.5936。$$

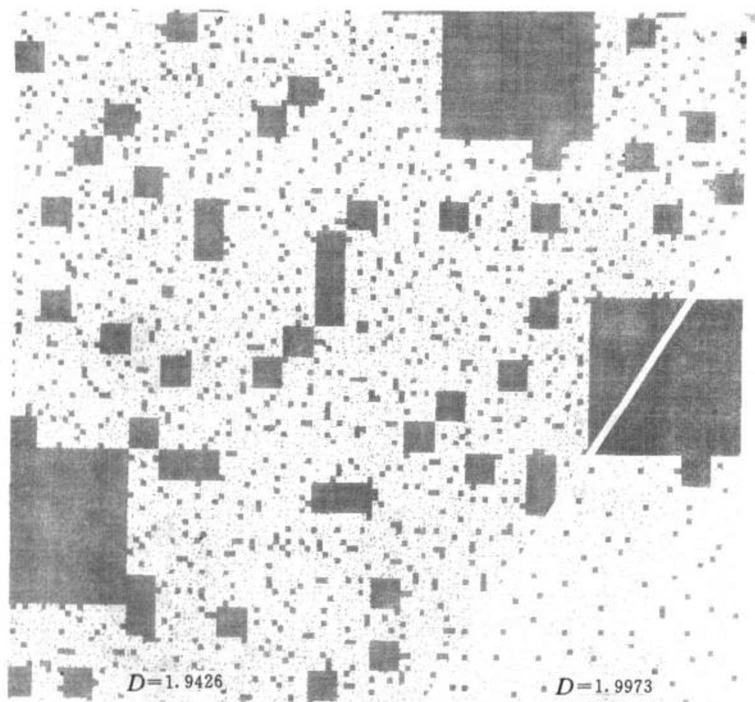


图 23-3

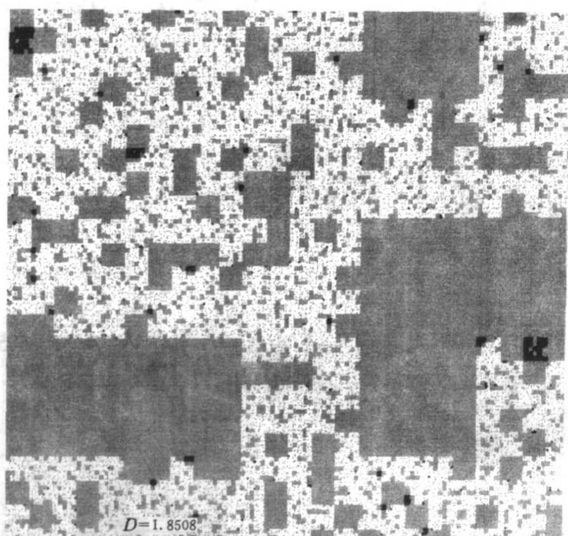


图 23-4

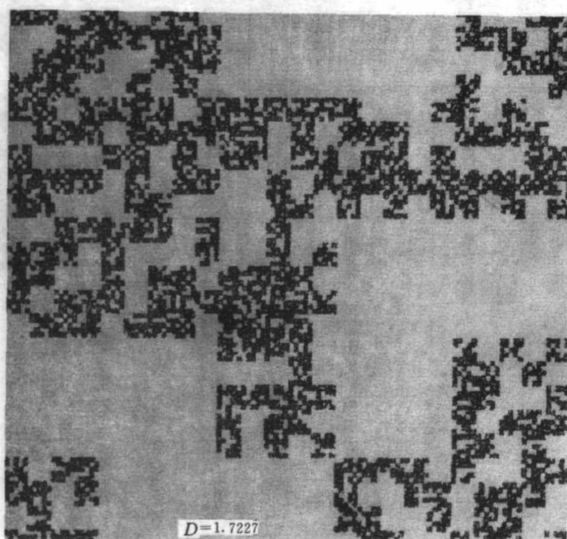


图 23-5

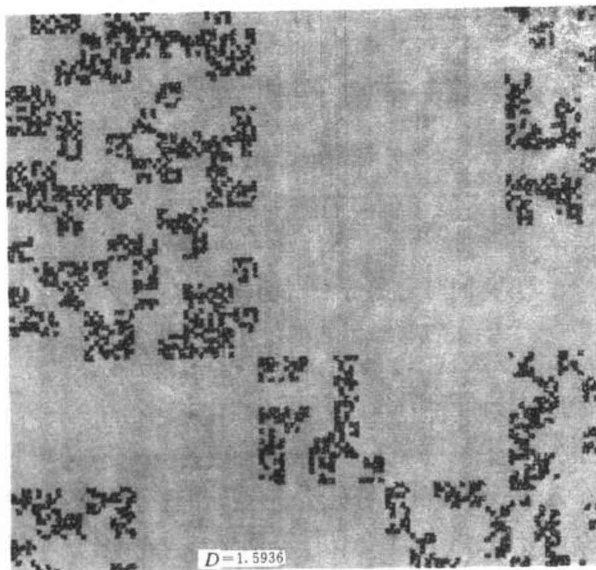


图 23-6

以灰色表示乳清,而以黑色或白色表示凝乳,白色部分是逾渗的接触群集,即与图示的上、下边相接的连通部分。黑色部分组合了所有其他接触群集。

因为湍流满足 $D>2$,这些凝乳本质上是不透明的,而且(与霍伊尔凝乳相反)这些图表明它们的平面横截面,其维数是

$D=1.9973$, $D=1.9426$, $D=1.8505$, $D=1.7227$ 和 $D=1.5936$。

在图 23-3 的右下角,显示 $D\approx1.9973$,是没有兴趣情形的细节,而其余的图显示 $D\approx1.9426$。

生成的程序和种子全部是同样的,可跟踪前进至灰色消失。由随机堆积每个旋涡的 25 个子旋涡开始,对逐级整数值 $5^D=N$,堆积的头$(25-N)$个子旋涡是“灰色消褪”。

对于两个较小的整数,不存在逾渗。对 $N=19$,存在少量黑色而大多是白色。对 $N=18$,少量的种子已经逾渗,但是在此图里的阶段数对确切计算 D_{crit}是太小了。 ■

第 24 章　随机链和弯折

前一章证明了能够将凝固随机化而不影响基本的以 b 为基的空间网格。在随机凝固里，在阶段 k，出现点阵单元里的"材料"永远保持在其内，同时它的分布成为越来越不均匀。这种过程很简单，因为每个单元的发展与其他单元里发生什么无关。然而，所形成的分形的拓扑必定允许由机遇和空间性质来确定。

本章将要证明凝固怎样被约束而使形成的分形有专门的连通性。例如，当为了模拟一条海岸线或一条河流时，就需要"自回避"曲线。在完全不同的聚合物科学领域里出现了一个不同的例子：一个无限长的浮动的分子在良性溶剂中到处漫游，但显然要防止多次占有空间的同一位置。

在保证凝固产生的集合是连通的和自回避的递推方法中，初始器延续成为一个平面区域，譬如说是个正方形；而发生器延续成为包含在初始器内的一些较小区域的集合。在第 23 章里，对这些较小区域唯一的要求是，除公共顶点或公共边是容许的之外，它们必须不重叠。与此相反，在本章，公共顶点或公共边的存在是强加的。

首先考察的是公共顶点，它包含"随机链"，这就产生某些科赫或皮亚诺曲线的直接推广。

公共边会产生更多的有吸引力和令人感兴趣的分形族，它们在 Mandelbrot 1978r, 1979c 中介绍，其中有些是自回避和无分支的"简单曲线"，而另一些是打结的或树状的，而且该过程可延拓到曲面。我建议，今后称这些新形状为弯折。

喜欢弯折甚于随机链的主要原因是，减少多样性似乎反映了空间的一种基本性质。

直线弯折是线性聚合物和河道的粗糙模型，打结弯折是海岸

线的模型,而树状弯折是河流树的模型。

随机链和链曲线

图 6-2 的白色区域可看作是由顶点相连的三角形链构成的。下一个构造阶段把每个三角形由完全包含在其内的一个子串所代替,因此得到把单点相连的更小的三角形所构成的链,这些嵌入链的序列收敛于科赫曲线(这种过程,在第 18 章中称为庞加莱链)。

许多其他的科赫曲线都可以用这种方法来构造。例如图 14-4 所示的谢尔宾斯基垫片,其链是除去中心三角形孔洞后得到的。

这种构造方法是容易随机化的。例如一个三角形可以由两个 $r=1/\sqrt{3}$ 的三角形所替换,如图 6-2 所示,也可以由三个 $r=1/3$ 的三角形所替换。

最简单的弯折(Mandelbrot 1978 r)

最简单的弯折曲线是一条随机曲线,在 Mandelbrot 1978 r, Mandelbrot 1979 c 中绘制出的,在 Peyrière 1978,1979,1981 作了进一步的研究。这是一条河道的模型,这条河道模仿了地质学或地理学中的著名图形,它证明了一条河流的逐次构造阶段向溪流推进,以越来越高的精度定义了它的航道。

在第 k 个推进阶段之前,河流在一条"预弯折"溪(它由边为 2^{-k} 的规则三角形点阵单元构成)里流动。当然没有一个点阵单元会多于一次被流经,而溪中的每一个连接必须通过一条公共边与两个近邻相连,而第三条边是"封锁的"。

第 k 个推进阶段以更精细的结构,即引用一个边为 2^{-k-1} 的内插点阵替换该预弯折,显然,$(k+1)$ 阶预弯折必定合并了在两个 k 阶相邻连接的每个公共边的一半。而且其反演也成立,即:未封锁的公共边的一半的位置,毫无含混地确定了 $(k+1)$ 阶预弯折。

对称的随机弯折　随机地选定半边锁住，另外的有等概率性。在一个 k 阶连接内部的 $k+1$ 阶连接数目，有 1/4 概率的是 1，而概率为 3/4 的是 3。平均数是 2.5。

溪在每个阶段都变狭窄了，它渐渐地收敛于一条分形曲线。自然，我猜测其极限的维数是 $D=\log 2.5/\log 2=1.3219$，其证明（很精巧细微）见 Peyrière 1978。

不对称的随机弯折　把一条边分为两半之后，设子溪穿过“左半”的概率 $p\neq 1/2$。我们能对观察者往下游看，还是观察者站在子分割的三角形中心来定义此概念。在第一种情形里，$D=\log[3-p^2-(1-p^2)]/\log 2$，其范围从 1 至 $\log 2.5/\log 2$。而在第二种情形，$D=\log[3-2p(1-p)]/\log 2$，其范围从 $\log 2.5/\log 2$ 至 $\log 3/\log 2$。总之，在 1 和 $\log 3/\log 2$ 之间的所有 D 值，都可达到。

交错的点阵和弯折

交错的弯折回线可通过使用不同的内插点阵而得到。很容易推广，即一旦知道 $k+1$ 阶预弯折穿过 k 阶单元之间的边的区间，就足以确定 $k+1$ 阶弯折。一个例子是矩形点阵（其长短边之比为$\sqrt{b}$形式），把一些单元插进 b 个横放的单元中。

但这不同于三角形点阵的情形，它的单元插进 $b^2\geqslant 9$ 个三角形；也不同于正方形点阵的情形，它的单元插进 $b^2\geqslant 4$ 个四方形。在这两种情形里，预弯折的插入要求附加步骤。

当在三角形的情形 $b=3$，或者在正方形的情形 $b=2$，非常自然的附加一步就足够了。实际考察从正方形中心辐射出 4 条“射线”把它一分为四，或者 6 条射线把一个三角形划分为 9 个。一旦有一条射线被封锁了，则子溪就成为完全确定的了。在我的弯折定义里，射线是以等概率随机地封锁的。对于三角形划分为 9，其 $D\approx 1.3347$，而对正方形被划分为 4，其 $D\approx 1.2886$。回想到最简单的弯折产生 $D\approx 1.3219$，就看到弯折的 D 是接近于普适的：在 4/3 邻近。

当一个三角形被划分成 b^2 部分，而 $b>3$，或者一个正方形被划分为 b^2 部分，而 $b>2$ 时，就需要规定子溪进一步的精度。而结构就成为越来越任意的。依下节讨论的精神，弯折构造的价值就丧失了。

链和弯折曲线对照

让我们停下来回忆。在不论是由蔡查罗的链方法或者是由原始的科赫方法所得到的分形曲线时，由于截断该过程而得出的误差沿曲线非常不均匀，在有限个构造阶段之后以无限精度得到某些点，这一事实是占上风的。例如，它有助于研究处处无切线的最简单的科赫曲线。但当曲线是一条均匀宽度的带的极限时，曲线概念的本质意义就更为清晰。我的弯折曲线满足了这种迫切需要。

另一个对照因素涉及每种方法要求其“设计者”所作出的任意选择数。对非随机的或随机的分形，科赫方法都是非常有效的(特别是，由一条简单曲线而获得任意所希望的 D 值)。但是就设计者来说，它包含了大量的有关动机的特殊选择，尤其基 b 是非本质的。

科学长期遭受欧几里得几何无力模拟大自然非光滑模式之苦，我们有理由为分形把我们从这种无可置疑的不适当性中解放出来而高兴。但在理论的现阶段，我们必需清醒并少作些随意决定。

根据这个道理，弯折结构由于平面的几何学而受到非常多的约束(意味着这比链模型少些多变性)，这其实是长处。

维数 $D\approx4/3$

特别，必需记住弯折的维数 $D\approx4/3$。此值也在第 25 章(图 24-3)和第 36 章中出现，这一事实不能视为巧合，而最终会导向关于平面几何结构的基本洞悉。

有分支的弯折曲线

让我回到河道的结构。一条溪的三角形间隔被1或3个子三角形构成的几条子溪所替代后，想象留下的3或1个子三角形排入新的子溪。它们的排放模式是完全确定的。在子河流穿过三角形之间分界线的那些点，由与主河流相同的系统所选定。其最后的结构收敛于一棵随机充满于一个三角形的树，如下图(图24-1)所示。

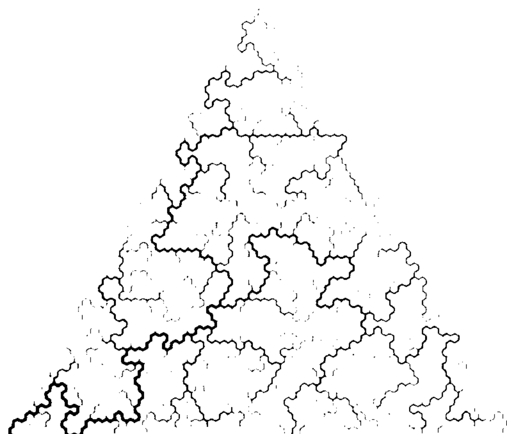


图 24-1

两种闪电情形研究

有趣和可能有意义的是，一个像我的线性弯折曲线那样粗糙的模型应该足够用来说明(虽然只是很粗糙的)河流的观察维数。

而且，它也可给出高度稀释的线性聚合物的通常模型的维数和点阵上的自回避随机行走(SARW)(第36章)的维数。就平面几何学引起的约束而言，为什么驾驭弯折曲线比SARW要容易得多?

这原因显然归于弯折是由内插法构造的。

弯折曲面

它们由一个立方块划分为 b^3 个子立方块来定义，为唯一地确定一种恒量而且越来越薄的盖被，我使用了合适的“封锁”过程。很遗憾，算法太长，在这里就不给出了。■

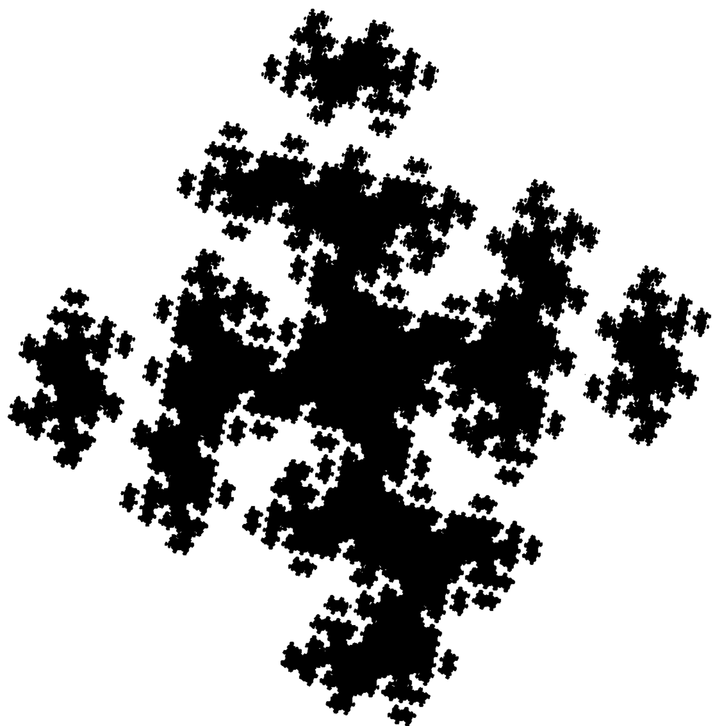


图 24-2 随机科赫海岸线（维数 $D=1.6131$）

在许多情况中，具有规定 D 和无自接触的科赫曲线，能用完全相同的网格和起始器由几种不同的方法得到。此外，假设至少有两个不同的发生器能适合完全相同的轮廓线，然后容易来随机化此结构，只要在上述发生器之

间凭机遇选取。例如,我们可以在下列两个发生器之间交替选取,其结果也示于图 24-3。

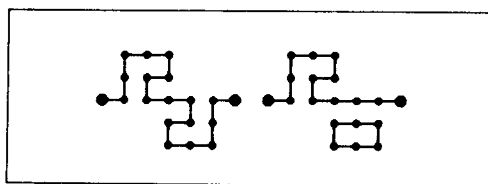


图 24-3

用这种方式构造的随机科赫岛的总体形状,完全依赖于初始的形状。特别是所有初始对称性自始至终四处可见。因此,再加上第 24 章所描述的其他原因,科赫曲线各部分的随机混合是一种限定范围方法。■

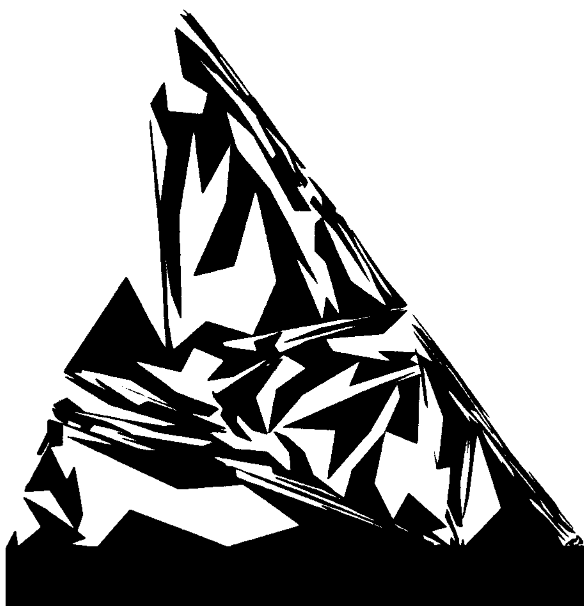


图 24-4　随机皮亚诺曲线(维数 $D=2$)

下面的发生器(图 24-5)作用在初始器[0,1]上,它给出了摆动一个三角

形的路线，此发生器的位置依赖于在奇怪曲线区间的奇偶性。在奇数区间，这上面的(直线)发生器放在右边；在偶数区间，它的反位形式(图 7-17)放在左边。此处所用的随机化方法由随机选择的这些焦点组成。在本例中，分布关于中点对称，每个子三角形后来再分为 4 个(与其邻边无关)，直至无穷。

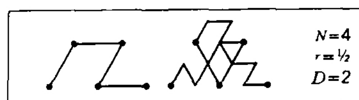


图 24-5

构造较容易跟随的奇怪折线，每个有贡献的区间用两个替换，增加的端点就是该区间隐蔽部分的中点。

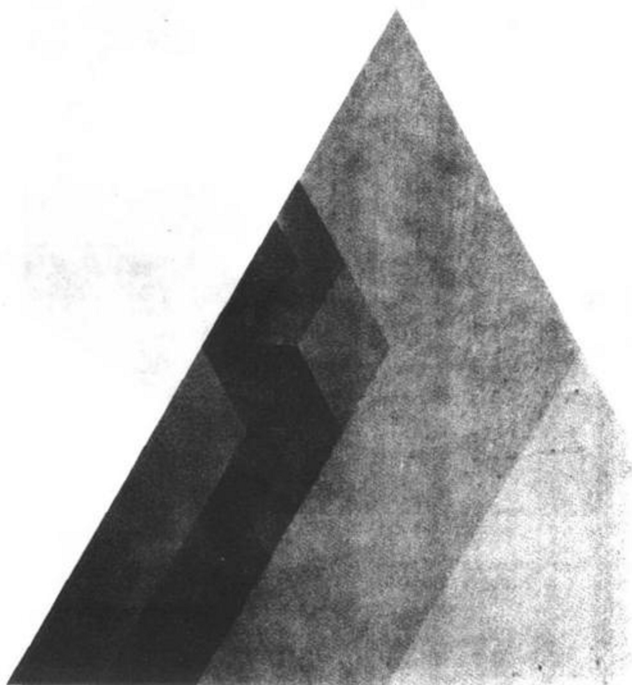


图 24-6　三角形和弯折曲线

本图表明最简单的弯折结构是由几个图形叠加而成的，每种灰色阴影都看作是那些较暗色的连续。此图例以浅灰色的三角形开始，以黑色的曲线终止。第6至10阶段的比例要比第0至5阶段的大，这些步骤已在正文中描述过了。■

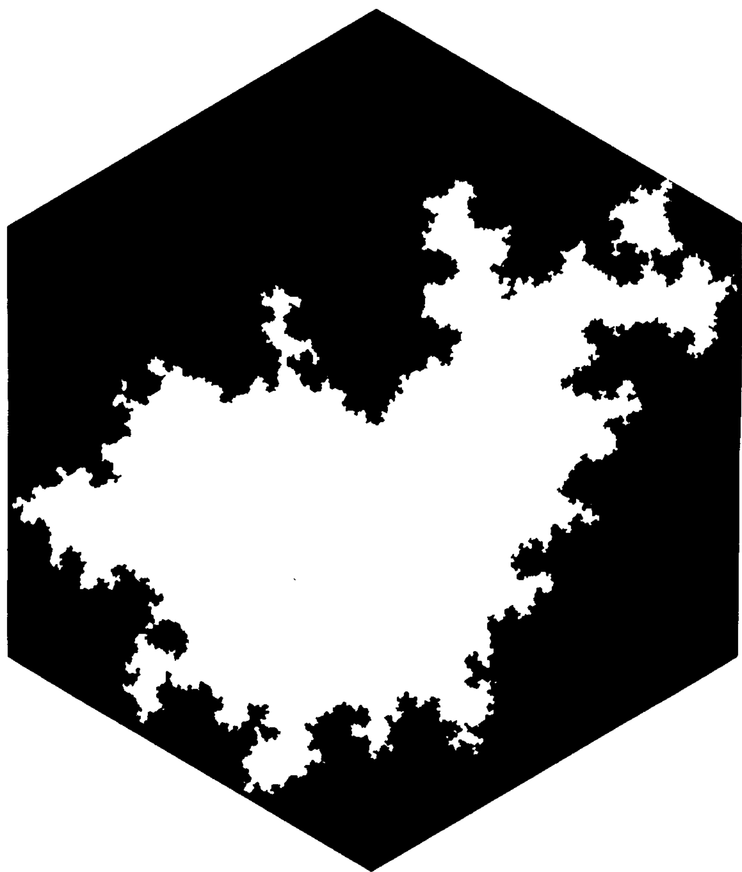


图 24-7　六角形弯折海岸线

本图把6条弯折串在一起成为一个自回避的圈，其维数非常接近于 $D=4/3$。此值在其他自回避性的例子中多次出现过，例如在图25-3的布朗骨架的边界，它与六角弯折的相似性特别值得注意。■

第 25 章　布朗运动和布朗分形

本章被安排在这里是折衷的产物，本来显然应该放到更后面，但是它的部分内容对于下一章是必不可少的。

布朗运动的作用

正如在第二章所看到的，J. 佩琳具有把物理学家的布朗运动与连续而不可微的曲线相比较的光辉思想。他激励了年轻的 N. 维纳定义和研究了一种数学执行过程（约在 1920 年），常称为维纳过程。后来知道，同样的过程 Bachelier 1900（第 37 章和第 39 章）曾详细研究过（虽然不很严格）。

很奇怪，在别处给了它卓越的重要性，布朗运动本身在本书没有找到新的应用。有时，它帮助草草拟定问题，但即使在这种情形，下阶段研究必需用一个不同的过程代替。然而，在许多情形里我们能够惊人地做到修改布朗运动，而保证这种修改保持标度不变。

由此种与其他的原因，若对此原型的具体性质没有彻底了解，就不会懂得其他的随机分形。但是，致力于该论题的大量文章却只是稍提一下或者忽略了本章所处理的问题。假如读者阅读时遇到困难，就应像通常一样，跳到下一节或下一章。

布朗分形：函数和轨迹

很不幸，术语布朗运动是很模糊的。首先，我要指 $B(t)$ 的图形是 t 的函数。当 $B(t)$ 是平面上一点的纵坐标时，图形是一条平面曲线，如图 25-1。当 $B(t)$ 是 E-空间中一点时，图形就是(1 +

E)-空间中的一条曲线(时间坐标加上 B 的 E 个坐标)。然而,在许多情形里,人们仅对 E-空间中的曲线感兴趣,它是运动留下的轨迹。当轨迹在均匀间隔的时刻弯曲时,函数和轨迹可互相推演。然而,在连续的布朗运动中,这两种形式是不等价的,用同一术语来描述它们容易混淆。

当有模糊可能时,我就用布朗函数或布朗轨迹,对科赫曲线也存在同样的含糊,但是现在因为有术语"运动",就更为明显。

此外,第 28 章至第 30 章中布朗运动的变量是多维的。例如,在第 28 章地球地形的模型之一就假设高度是经度和纬度的布朗函数。因此,常常要求对术语作详细说明。当必要时,就说布朗线—线,或者线—空间,或空间—线,或者线—E 空间等等函数或轨迹。

布朗"场"　"随机场"并不是一个随机化(代数的)场,而是"多变量随机函数"的一种时髦的同义词(例如 Adler 1981)。这个术语是不确切的,必须在它站稳脚跟之前就干掉。它似乎是来自俄文的不完善翻译,◁如自模拟(我及时制止了它的传播)是自相似从俄文字不完善地翻译过来的。

作为随机皮亚诺曲线($N=2$)构造的平面布朗轨迹

布朗轨迹对皮亚诺曲线投下了新曙光,使它变成一个随机变量。这种构造既不等同于像我登记过的一群偶然见到的学者,也不等同于像我浏览某种学科时涉及的偶然一堆书籍。无论如何,数学家们要避开这种方法,因为它的基本成分(一种受二元时间网格控制的逐次增加精细层次的系统)与构造的结局无内在联系。因此,数学家们把这种方法称作人为的,但正是这种原因,它对于本书却是非常合适的。

这种过程由任何一条 $N=2$ 和 $r=1/\sqrt{2}$的皮亚诺曲线开始,其技巧是逐步释放各类约束。

其中间分形,即"皮亚诺—布朗杂化"值得在更加合适的场合下来研究其本身的正确性。

横截的中点位移 在图 7-6 至图 7-15,第 $k+1$ 阶段是变换第 k 次奇怪折线,用 $|\Delta M|=\sqrt{2}^{-k-1}$ 把每一边的中点,按照一定的法则(即 k 的奇偶性)横截地移动到左边或右边。

现在设一条皮亚诺曲线,在一个时间间隔 $\Delta t=t^{-k}$ 上的位移,以及在两个半区间 $\Delta_1 t$ 和 $\Delta_2 t$ 上的位移,分别记作 $\Delta P, \Delta_1 P$ 和 $\Delta_2 P$,根据毕达哥拉斯恒等式,有

$$|\Delta P|^2=|\Delta_1 P|^2+|\Delta_2 P|^2。$$

各向同性的位移方向 背离任何皮亚诺曲线的法则的第一步,是把位移方向随机化。一种方法是以相等的概率向左或向右,这就导致"随机的来回弹跳曲线"。另一种不同的构造方式是把一个点(以均匀密度)随机地投掷于刻有度数的圆周上,然后读出该点角度。这种方法确定的位移是各向同性的。

不论哪种随机化的形式都保持毕达哥拉斯恒等式成立:各向同性运动在一个二元区间的二元子区间上的增量是几何正交的。

随机位移长度 背离非随机法则的第二步是允许把位移长度随机化:从现在起,2^{-k-1}将不再是非随机量 $|\Delta M|$ 的平方,而是随机量 $|\Delta M|$ 的均方,合成位移 ΔP^* 满足

$$\langle|\Delta_1 P^*|^2\rangle=\langle|\Delta_2 P^*|^2\rangle=\frac{1}{4}\langle|\Delta P^*|^2\rangle+\langle|\Delta M|^2\rangle,$$

$$\langle|\Delta_1 P^*|^2+|\Delta_2 P^*|^2\rangle=\frac{1}{2}\langle|\Delta P^*|^2\rangle+2^{-k}。$$

随机起始器 下一步是把起始器本身取作随机的,其均方长度为 1,它必然遵从 $\langle|\Delta P^*|^2\rangle=2^{-k-1}$,因此就有平均毕达哥拉斯恒等式

$$\langle|\Delta_1 P^*|^2+|\Delta_2 P^*|^2-|\Delta P^*|^2\rangle=0。$$

换句话说,几何上的正交边被概率专家称之为统计上的正交边或无关联的边所代替。

独立增量 使得中点位移,在各阶段的内部和相互之间都是统计上独立的。

高斯增量 当使得中点的位移服从高斯分布时,随机化的皮

亚诺曲线就成为布朗轨迹 $B(t)$。Δ在平面情形,变量的平方模是指数分布的。因此一个直接构造挑选出在[0,1]上均匀的 U,而获得 $|\Delta M| = [-2\log_e U]^{1/2}$。▶

推广到空间　最后结构当 $E>2$ 时仍然有意义。

维数 $D=2$　平均毕达哥拉斯恒等式是相似维的广义定义。它对于布朗轨迹是合适的,因为豪斯多夫–伯西柯维齐维数也是2。当中点位移不是高斯分布时,它是否适合还要研究。

布朗分形网(点阵)

多重点　即使在上节所描述的第一步以后停止随机化,它也要导致完全破坏那些精巧的远近范围内的次序(它们使得皮亚诺曲线避免了自相交)。在少许几步之后,随机化的奇怪曲线自相交,那么极限轨迹几乎必然要不断地自相交。

布朗间隙　大家知道,对所有 t 从 $-\infty$ 到 ∞ 外推得的布朗轨迹稠密地覆盖了平面。稍后将重新导出这个性质。然而,在单位时间间隔内画出的轨迹有它自己最独特的几何学——我想不起在哪里见过这种描述。

在表现上,作为当 $t\in[0,1]$ 时重复地覆盖住的那些点的补偿,$B(t)$ 保留了其他未覆盖的点。这些未覆盖的点形成一个开集,它分裂为一个包含有无限个点的外部集和一个不相连接的无限个**布朗间隙**。外部集和每个间隙都以分形曲线(轨迹的子集)为边界。因此,布朗轨迹是一个分形网的实例,如图 25–2 和 25–3 所示。

◁在第 14 章所描述的维数为 D 的网,具有面积 U 超过 u 的间隙数目是 $Nr(U>u)\propto u^{-D/E}$。在 $D=E=2$ 的随机范围内,其形式推广是 $P(u) = Pr(U>u)\propto u^{-1}$。然而,这是不对的,因为 $\int_0 \sum P(U>u)\mathrm{d}u$ 必须收敛。因此我推测,$Pr(U>u)\propto u^{-1}L(u)$,其中 $L(u)$ 是个慢变量函数,它减少得足够快以使上面的积分收

敛。因为非常数 $L(u)$是必要的，对自相似分支网不能达到维数 $D=2$，就像在第15章所表明的，对自相似简单曲线，不能达到 $D=2$。▶

布朗网的面积为0 不管它的维数值，$D=2$，布朗网具有零面积。对于皮亚诺-布朗杂化同样是真。

无界轨迹在平面上是稠密的 这个性质基于在下节建立的与零集有关的事实。即无界的轨迹常常进入任意规定的平面区域 $\mathcal{D}$(例如圆盘)内无限地“循环”，使得 $\mathcal{D}$ 随意地小而中心可在任意点 P，无界轨迹就无限地、常常是任意地接近平面上的每一点。

但是，就像我们将要看到的，当考察零集时，单条轨迹到达指定点的概率精确地是0，因此指定的点殆必没有无界轨迹到达。

一条无界轨迹在区域 $\mathcal{D}$ 内的部分可以想象得近似为不可数的无限个适当投掷于 $\mathcal{D}$ 上的独立的有界网。这就使人想起了相互独立地随机投掷于[0,1]上的不可数无限个点。众所周知，这样得到的点集是处处稠密的，但是它的长度为0。

半径上质量的依赖性

大多数布朗运动形状的特征以$\sqrt{t}$标度。例如，在时间 t 里覆盖的距离(如当乌鸦飞行时测得的距离)是$\sqrt{t}$的随机倍数。还有，在环绕 $B(0)=0$ 半径 R 的一个圆周内所花费的总时间是 R^2 的随机倍数。

把正比于“质量”的时间加到布朗轨迹不同的部分上，我们就发现，在平面和空间的情形里($E\geqslant 2$)，在半径为 R 的圆内的总质量是 $M(R)\propto R^2$。

形式上，此关系式与第6章考察的科赫曲线和第8章考察的康托尘埃的情况正好相同。更不必说，和在均匀密度的区间、圆盘或圆球的经典情形相同。

布朗轨迹是“无褶皱的”，具有定常增量

作为可描述为一种意外收获的结果，随机化皮亚诺曲线获得的比预期的还要多。就像先前所阐明的，观察非随机的科赫和皮亚诺曲线，在形如 N^{-k} 的各个瞬间，它展示出永久性的“褶皱”。例如，我们把雪花边界的三分之一折为四段，在1与2段之间的角度就与2和3段之间的角度不相同，因此左边的一半不会被错误地认为是中间的一半。

但是布朗轨迹是“无褶皱的”。给定一个相应于时间间隔 t 的时间，我们不能说出这间隔沿时间轴的位置。概率专家称布朗轨迹具有“定常的增量”。

这个性质值得重视，因为：(a) 这是本章后面将要描述的另一个无网格定义的基石；(b) 在类似的简单分形曲线或分形曲面的随机形式中，没有相对应的性质。

布朗轨迹是自相似的

无褶皱性的一个推论，是统计自相似性的强形式。设 $B(0)=0$，并挑选两个正数 h 和 h'，在概率论中称为弱收敛理论的一章表明，函数 $h^{-1/2}B(ht)$ 和 $h^{1-\frac{1}{2}}B(h't)$ 统计上是恒等的。还有，设 $T<\infty$ 和 $h<1$，并令 t 从0变化到 T，则得到 $h^{-1/2}B(ht)$ 是 $B(t)$ 一部分的一种重新标度化的形式。统计上等同于整体的这一部分正是自相似的形式。

把自相似性应用到随机集上不如在第5章中引入这个概念那么迫切，因为部分不再是精确地相似于整体。只要部分和由相似性约化的整体具有相同的分布就足够了。

考虑到科赫曲线需要形如 $r=b^{-k}$ 的相似比（其中 b 是底）是正的整数，但是布朗轨迹都可以接受任意的 r。这个性质是有价值的。

布朗零集是自相似的

对研究布朗函数有特别重要性的是恒数集或称为等同集，即它的坐标函数 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是常数。例如，由 $X(t)=0$ 的那些时刻 t 所定义的零集。

等同集是自相似的，而且极为空荡，这个明显的事实可由其分维为 $D=1/2$ 得到证实，它们是在第 32 章研究的莱维尘埃的特别情形。

布朗零集的间隙分布 一个布朗零集的间隙长度满足 $Pr(U>u)=u^{-D}$ 及 $D=1/2$。这是与我们知道适用于康托间隙的关系式 $Nr(U>u)=u^{-D}$ 相对应的。然而，用 Pr 代替了 Nr，但阶梯却由于随机化而消失了。

布朗函数是自仿射的

与此相反，$X(t)$，$Y(t)$ 以及向量函数 $B(t)$ 的图形都不是自相似的，而只是自仿射的。这就是说，从 $t=0$ 到 $t=4$ 的曲线可以由 $M=4$ 部分铺成，只要空间坐标以比例 $r=1/2$ 连续缩减，而它的时间坐标就以不同的比例 $r^2=1/M$ 缩减。因此，不论 $X(t)$，$Y(t)$ 还是 $B(t)$ 的图形，都不能定义相似性维数。

此外，仿射空间是这样的，沿着 t 和 X 或 Y 的距离不能相互比较，因此不能定义圆盘。由此，公式 $M(R)\propto R^D$ 没有能对布朗函数定义 D 的对应的关系式。

另一方面，豪斯多夫-伯西柯维奇定义可以推广到它们。这种例子与第 5 章和第 6 章中的结论相一致，即豪斯多夫-伯西柯维奇维数是抓住分维(最难掌握的!)直观要领的最一般的方法。$X(t)$ 的 D 值是 3/2，而对 $B(t)$ 是 2。

◁ 粗略的证明 在时间间隔 Δt 里，$\max X(t)-\min X(t)$ 具有 $\sqrt{\Delta t}$ 的阶。用边为 Δt 的正方形来覆盖 $X(t)$ 的部分图形要求

$1/\sqrt{\Delta t}$阶的正方形。因此,覆盖从 $t=1$ 到 $t=4$ 的图形就要求 $(\Delta t)^{-3/2}$阶的正方形。此数是$(\Delta t)^{-D}$(第 5 章),由此启发得出 $D=3/2$。▶

截面的分维

布朗线—线函数的零集是布朗函数 $X(t)$的一个水平截面。再次应用第 23 章提出的法则,所期望的零集的维数是 $3/2-1=1/2$。这正是我们所知道的情况。这个法则的其他应用也具有异常的启发价值,就像我们现在所要表明的。然而,这个法则也遇到例外,特别是对于非各向同性的分形。例如,布朗线—线函数与竖直线的相截就简单地是一个点。

类似地,一条布朗线—面轨迹的线性截面应该具有维数 $2-1=1$,而情况的确如此。

更为一般地说,标准法则是这样的:除去特殊的形状,在相交时余维数 $E-D$ 相加,因此,k 条布朗轨迹的相交集的余维数是 $k\cdot 0=0$。特别地,一条布朗轨迹的自相交是期望也是确实形成一个维数为 2 的集。(然而,正像布朗轨迹本身一样,轨迹的多重性没有充满平面。)

余维数相加的法则能用来表明(作为较早的论点),布朗运动几乎一定不再回到它的出发点 $B(0)=0$,但是几近必然回到(无限地接近于)0 点的邻域。为了增加这些叙述的一般性,以及使他们能够再次在第 27 章内不加改变地使用,我们将把布朗零集写作 H。

使 $B(t)$回到 0 的时刻是使 $X(t)=0$ 和 $Y(t)=0$ 同时成立的时刻。因此,它们属于独立集 $X(t)$和 $Y(t)$的零集之交。所交的余维数是 $1-2H$,和 $H=1/2$。因此,其维数是 $D=0$。所以,这就足以提示出(但完整的证明要复杂得多!)$B(t)$几近必然不再回到 $B(0)=0$。

另一方面,考察当 $B(t)$回到边为 2ε、中心为 0 的水平正方形

时的瞬时集。这近似于下列集的交，即 t 是包含在 $X(t)$ 的零集中的一点上与 $Y(t)$ 的零集中一点的距离在 $\varepsilon^{1/H}$ 之内的交集内。对于每个这样的集，在时间间隔 $[0,t]$ 中的质量 $\propto \varepsilon^{1/H}t^{1-H}$，而包含时间 t 的间隔的概率是正比于 $\varepsilon^{1/H}t^{-H}$，因为，t 包含在这些集之交内的概率是正比于 $\varepsilon^{2/H}t^{-2H}$ 的。因为 $H=1/2$，就有 $\int_0^\infty t^{-2H}\mathrm{d}t=\infty$；因此，由波莱尔和康特尼的定理推出结论：即回到包含 0 的正方形的数目几近必然是无限。由此，在有界布朗网内的间隙慢慢地、似乎有些勉强地被充满了。

下行的点阵随机行走

我们也能通过在点阵上的随机行走而产生布朗运动。在这里，我们只提及这种方法，关于各种各样的复杂性要推迟到后面第 26 章讨论。

在 $\mathbb{R}^2$ 中一个点 $P(t)=\{X(t),Y(t)\}$ 执行点阵的随机行走，只要在由间隔 Δt 所隔开的逐次时刻，以固定长度 $|\Delta P|$ 为步长，随机地选择方向(限于点阵上)运动。

当点阵由平面上的点组成，且坐标是整数时，每走一步，量 $(X+Y)/\sqrt{2}$ 和 $(X-Y)/\sqrt{2}$ 就改变 ± 1。每次就称为执行了一次在直线上的随机行走。图 25-1 表明了一个例子。大致比例是，当 Δt 是小量而 $\Delta P=\sqrt{\Delta t}$ 时，设行走与布朗运动是不能区别的。

$B(t)$ 的无网格点直接定义

前面对布朗运动的定义是由时间网格或者时间和空间的点阵开始的，但这些“支架”在最后的结果中却没有。因此，有可能没有它们也可表征最后的结果。

在 Bachelier 1900，把直接特征假设为，在相等时间增量 Δt 的任意次数上，位移向量 $\Delta B(t)$ 是独立的，各向同性的以及随机的，

它具有高斯概率分布。由此，

$$\Delta B(t)=0 \text{ 和} \langle[\Delta B(t)]^2\rangle=|\Delta t|。$$

因此 ΔB 的均方根是$\sqrt{|\Delta t|}$。这种定义与坐标系无关，但是$\Delta B(t)$在任意轴上的投影是高斯标量随机变量，它具有零平均，而方差为$\frac{1}{2}|\Delta t|$。

由数学家支持的定义能走得更远，而且不需要将时间划分为等步的。它要求在任意两个时间 t 和$t_0>t$ 之间的运动各向同性，它要求未来的运动与过去的位置无关。最后，它要求从 $B(t)$到$B(t_0)$的向量除以$\sqrt{|t_0-t|}$，对所有的 t 和 t_0 具有约化的高斯概率密度。

对 $D=1$ 的偏航和穿越

一个胶体粒子在均匀流动的河流中的运动，或者一个电子在导电的铜线中运动，都能表示为 $B(t)+\delta t$。其函数的轨迹当 $t\leqslant 1/\delta^2$ 时与 $B(t)$或当 $t\geqslant 1/\delta^2$ 时与 δt 的轨迹没有区别。这样，轨迹的维数当 $t_c\propto 1/\delta^2$ 和 $r_c\propto 1/\delta$ 时从 $D=2$ 穿越到 $D=1$。◁ 在临界现象的专门术语里，δ 是从临界点起的距离，而对 t_c 和 r_c 的公式中的指数是临界指数。▶

另一种随机皮亚诺曲线

◁ 通过中点位移，皮亚诺曲线随机化从特殊情形中受益。由 $N>2$ 的皮亚诺曲线出发的类似结构将更为复杂。还有，如果中点位移服从均方根等于$\frac{1}{2}|\Delta B|$的高斯分布[它意味着 r_1 和 r_2 是高斯量而且独立于更熟悉的关系式$({r_1}^2+{r_2}^2-1)=0$]，就可以获得与非随机标度更密切的对应关系。导出的过程是非常有趣的，但它不是布朗运动，它不是无褶皱的。▶

量子力学中质点路径的维数

这个讨论可以通过对量子力学的表示提出一个新的分形妙计而告结束。Feynman & Hibbs 1965 指出，量子力学质点的典型路径是连续而不可微的，许多作者观察到在布朗运动和量子力学运动之间的相似性（例如参见 Nelson 1966 和其中的参考文献）。受到这些著作及我的早期版本的鼓舞，Abbot & Wise 1980 指出，在量子力学里观察到的质点路径是一条具有 $D=2$ 的分形曲线。这种类似性至少在教学法上是有意义的。

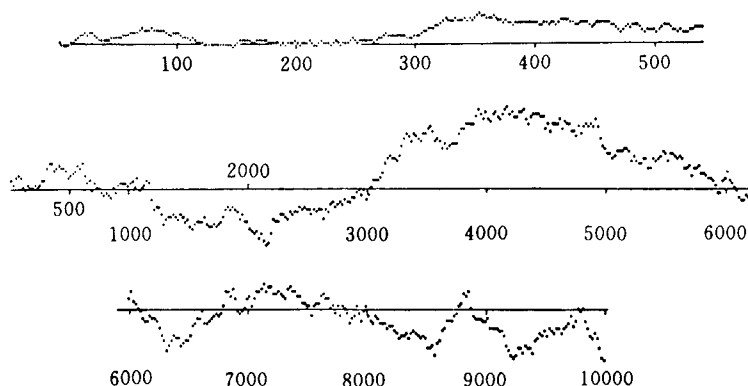


图 25-1 一个随机行走的样本，近似于布朗线—线函数（维数 $D=3/2$）以及它的零集（维数 $D=1/2$）

所有机遇游戏中玩得最长的运行（而且最少苛求！）开始于 1700 年左右。当时，伯努利家族统治了概率论。当一个永不磨损的硬币正面向上时，亨利赢得了一便士；而当正面向下时，汤姆赢了。（他们有时被称为是彼得和保罗，但我从来记不住哪一个打赌的是正面。）

不久以前，威廉·费勒考察了这种游戏，他报告了亨利累计的胜利记录，如图 25-1（上），这取自 Feller 1950（引自威廉·费勒著，《概率论引论及其应用》第一卷，1950）。

图 25-1（中）和 25-1（下）表示了在一个更长的游戏中亨利累计的胜利，

使用了在 200 次投掷区间内的数据。

当以越来越精细的图形来报道越来越长的数据集时，我们就渐渐地得到了一个布朗线—线函数值样本。

费勒在一次讲演中曾说到这些图形是“非典型的”，而是从其他看起来杂乱无章到无法相信的图形中挑选出来的。尽管如此，对这些图形的无止境的考察，对于推敲出编入本书的两条定理起了决定性的作用。

总体图形 Mandelbrot 1963 e 观察到总体图形的样子使人回忆起是一座山脉的轮廓线或地球地形的垂直截面。通过几次推广这个观察，就导出了第 28 章里所描述的逐次的模型。

图形的零集 图形的零集是这种时刻的集合，即当亨利和汤姆的财富回到我们开始报告他们所拥有的时刻。根据构造方法，在零之间的时间间隔是相互独立的。然而，显然零的位置决不是独立的，它们是非常明确地群聚的。例如，当像第一条曲线那样详尽考察第二条曲线时，几乎每一个零点都由整个一群集聚的点所代替。当处理数学上的布朗运动时，就能把这些群集再区分为更细的层次，直至无穷。

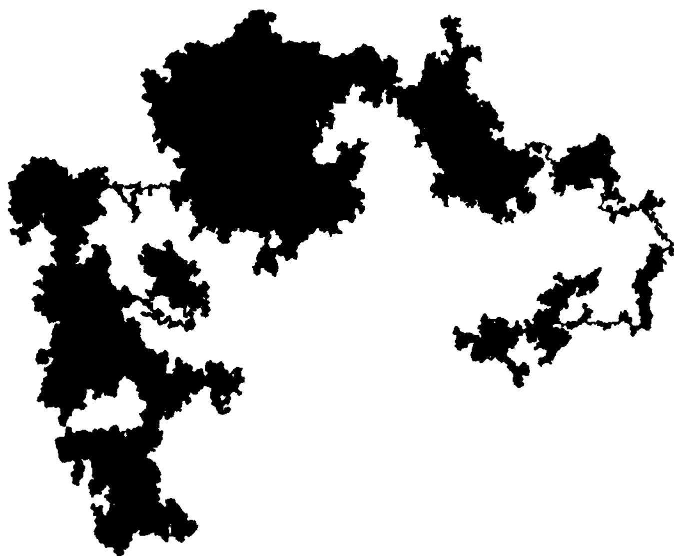


图 25-2

当要求帮助建立电话误差的分布模型时，我幸运地想起了费勒的图形，虽然这种误差是突然地群聚的（这是提出实际问题的要害）。我提出误差之间的间隔可以是互相独立的、详尽的经验性研究的确证实了这个猜测，而且导致了在第8章和第31章讨论的模型。

◁ 布朗零集是由最简单的莱维尘埃，即维数 $D=1/2$ 的随机康托尘埃所组成。对0和1之间的任何 D，也可以同样通过其他随机函数的零值而得到。通过这种模型，有可能确定电话线路的分维。实际的 D 依赖于基本物理过程的精确表征。 ▬

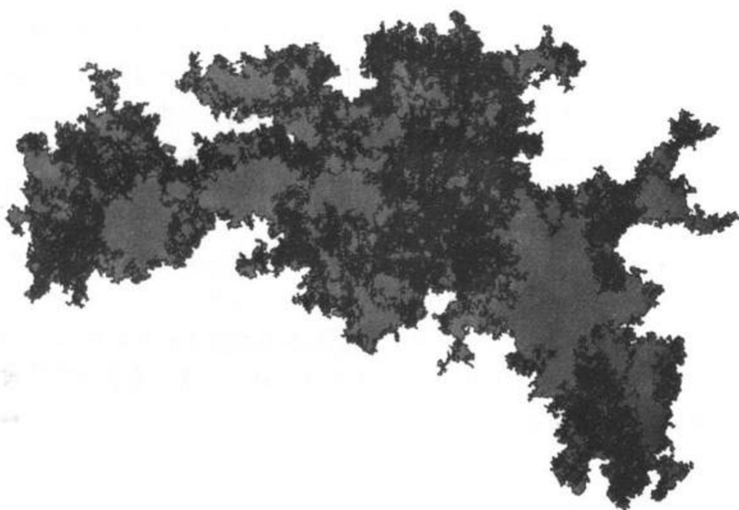


图 25-3

图 25-2 和图 25-3　布朗皮/岛屿；自回避布朗运动

布朗圈　我用此术语来标记一条轨迹，这是为在有限时间 Δt 内又回到出发点的布朗运动所覆盖的。这是具有零长度起始器的随机皮亚诺曲线。

图 25-3 布朗皮　一条（几乎完全确定）有界的布朗圈把平面分为两部分：一个是外部，从很远的点不与圈相交就能到达；另一个便是内部，我建议称它为布朗皮或布朗岛屿。

图 25-2　此图表示非循环布朗轨迹线的皮。

注解　我没有对布朗皮作任何调查研究，但我认为非常值得注意。此图

样显示出包含有200,000个布朗步骤,每一步都在$(1200)^2$的屏幕上画出。

对应于不同的Δt值构造出的布朗皮,除了大小以外,在统计上是相同的。而且有各种理由(缺少实际的证明)相信,皮边界的精细部分是渐近地自相似的。边界不能给予严格的标度,因为一个圈不能再分为含有同样结构的几股,但小的子段成为越来越接近于标度。

自回避布朗运动 根据第36章详述的原因,当考察自回避随机行走时,我建议对布朗皮的边界采用术语自回避布朗运动。

自回避布朗运动的维数 从已经阐明的某些已知关系式(在第36章中指出),推出自回避随机行走的维数为4/3。我猜测,对于自回避的布朗运动也是同样的。

对这猜测的经验上的试验,提供了一种极好的机会,也可对第12章中长度—面积关系式作试验。此图由越来越密集的正方形点阵所覆盖,我们计算与[(*a*)皮,代表*G*面积,(*b*)它的边界,代表*G*长度]相交的边为*G*的正方形的数目。用双对数坐标作出*G*长度关于*G*面积的图形,会发现它显然是直线,其斜率与$D/2=(4/3)/2=2/3$无法区别。图25-3和24-7两条曲线之间的相似性,以及它们的维数有强调的价值。

注 在图25-3,$B(t)$没有访问过的最大开区域用灰色表示,它们也能看成以分形为界的孔洞。因此,圈就是第14章意义下的网。

◁ 问题提出来了,从树状次序的观点看,圈是垫片还是地毯呢,我猜测是后者。这意味着布朗网格满足怀伯恩Whyburn性质。这个猜测已被Kakutani & Tongling所证实(未公开发表)。▶ ■

第 26 章　随机中点位移曲线

本章从逻辑线索上要开始回到第 25 章的中部，即由随机化皮亚诺曲线产生布朗运动那一节之后。

回想起布朗函数 $B(t)$的第 k 阶奇怪折线在形如 $h2^{-k}$的连续时刻之间是直线。而第 $k+1$ 阶奇怪折线是由随机移动第 k 阶奇怪折线边的中点而得到的。同样的话可应用到 $B(t)$之坐标过程 $X(t)$和 $Y(t)$的奇怪折线 $X_k(t)$和 $Y_k(t)$。

中点位移方法对 $D=2$ 是完全成功的，我简直可以不等待就运用原始的雪花曲线和 $N=2$ 的其他科赫曲线，然后把它用于构造曲面，这就是我们现在要做的事。

相同的一般方法已被大量作者（用计算机拍照和作图）所采用，他们企图复制和改进在 1977 年版《分形》一书中的图，并且另外寻找一种更直接和少花费的方法。这些作者没有认识到，随机中点位移方法产生的结果在实质上与他们寻找的目标不相同，它有简单性的优点，但也有许多不适当的性质。

带有时间网格的空间无约束随机科赫曲线

回想以长为 $1/\sqrt{3}$的两段直线作发生器，我们能够构造基 $N=2$ 的科赫雪花曲线。在这种情况下以及更加一般地，一旦由长为 $2^{-1/D}$的两段直线作成发生器，在 $D<2$ 下，其构造就简明地把第 k 阶奇怪折线边的中点移动到左边或是右边。其位移总是与边相垂直，而其长度的平方为

$$2^{-2(k+1)/D}-2^{-2(k/D+1)}。$$

此结构的随机化像在布朗运动里皮亚诺曲线变换那样进行。位移的方向作成随机和各向同性，它与以前的一切无关。位移长度的

分布是高斯分布，而上面的公式使之应用于均方位移，没有作任何防止自相交的事，因此极限分形曲线充满了自相交，记它为 $B_H^*(t)$。使用了记号 $H=1/D$，这马上就要被证实。

由此，在时间间隔 2^{-k} 上的位移 ΔB_H^* 与两个内插位移 $\Delta_1 B_H^*$ 和 $\Delta_2 B_H^*$ 之间的关系，现在取形式

$$\langle |\Delta_1 B_H^*|^D + |\Delta_2 B_H^*|^D - |\Delta B_H^*|^D \rangle = 0,$$

其中 $D<2$ 是任意指定的。

一个推论，当时间间隔 $[t', t'']$ 是二进制的，即假如 $t'=h2^{-k}$ 和 $t''=(h+1)2^{-k}$，我们有

$$\langle |\Delta B_H^*|^2 \rangle = \Delta t^{2/D} = |\Delta t|^{2H}。$$

选择 H 作为参数，因为它是均方根位移的指数。

还可证明，假如 $B_H^*(0)=0$，函数 $B_H^*(t)$ 在统计上关于形如 2^{-k} 的约化比是自相似的。这就是所希望的对 $D=2$ 已知情形的推广。

非定常增量

然而，我们一定不要过分高兴。除了在 $D=2$ 的皮亚诺–布朗情形它简化到 $B(t)$ 以外，$B_H^*(t)$ 在统计上关于非 2^{-k} 形式的约化比不是自相似的。

一个更为严重的问题是，虽然区间 $[t', t'']$ 有同样的长度 $\Delta t = 2^{-k}$，但为非二进制。（例如，假如这是从 $t'=(h-0.5)2^{-k}$ 到 $t''=(h+0.5)2^{-k}$ 的间隔）。在如此的间隔范围内，增量 ΔB_H^* 有不同的和较小的与 k 有关的方差。此方差的下限是 $2^{1-2H}\Delta t^{2H}$。另外，假如已知 Δt 而不知 t，相应的 ΔB_H^* 的分布就不是高斯函数，而是不同高斯函数的随机混合。

结果。作为近似奇怪折线二进制图特征的褶皱永远保持。由于 D 刚刚小于 2，因此 H 刚刚大于 1/2，褶皱很轻微。然而，当 H 接近于 1（第 28 章表明，地球地形的模型包括 $H \approx 0.8 \sim 0.9$），褶皱

十分重要而可以看作样本函数。避免它们的唯一方法是放弃递推的中点位移格式,就像下节和第27章要做的。

随机放置的层

◁要追踪中点位移曲线和曲面的非定常性的原因,研究曲线$B_H^*(t)$的坐标曲线函数。每个阶段都贡献一个折线函数$\Delta kX(t) = X_k(t) - X_{k-1}(t)$,其零集(a)是周期,其周期为$2^{-k}$,和(b)包含$\Delta_{k-1}X(t)$的零集。由此,每次贡献都能说成与所有下列的情形同步。

◁零集是周期的和同步的("分层的")这一事实,防止了增量的定常性。相反,可以从这些特性遭破坏来寻找定常性。

◁构造折线函数$\Delta B_k^{\downarrow}(t)$的一种方法如下:以每单位时间等于$2^k$点的平均数来选择时间间隔$t_n^{(k)}$的泊松序列。然后,令$\Delta B_k^{\downarrow}(t_n^{(k)})$是独立的和恒等分布的随机值。最后,在$t_n^{(k)}$之间线性地插入。这些分布的无限项之和$B_H^{\downarrow}(t)$是一个定常随机函数,这是在水文学家O. 迪特森的博士论文中最早提出的(1969),见 Mejia Rodriguey-Iturbe & Dawdy 1972 和 Mandelbrot 1972 w。

◁ 通过回顾,我们看到这种推广不再需要每单位时间里零点的平均数是2^k。它可以是形式b^k,而b是任意大于1的实数基。

◁ 相应的分形所允许的缩减比,由离散序列$r = b^{-k}$给出。当$b \to 1$时,该序列成为越来越密,逐渐地实际上成为与连续一样了。这样,对于寻求定常性和很宽的标度比选择来说,$B_H^{\downarrow}(t)$就成为越来越可接受了。但是,在此过程中,$B_H^{\downarrow}(t)$失去了它的特殊性。在 Mandelbrot 1972 w 的证论中,暗示了$B_H^{\downarrow}(t)$收敛于在下一章将要讨论的随机函数$B_H(t)$。

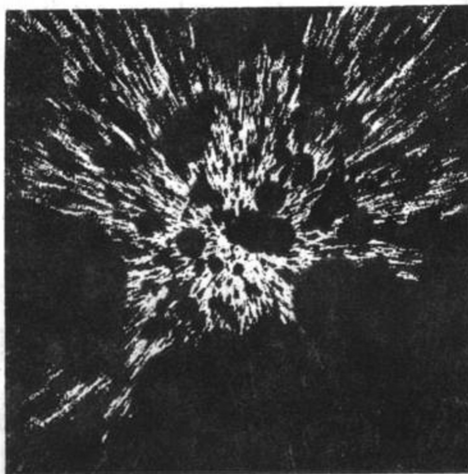


图 26-1 如艺术家的计算机"故障"(艺术作品 1)

可以相信此图是由于部分计算机程序出了错。"故障"被迅速查明和清除。(但只有在它的输出已记录下来之后)而最后的输出如图 33-1 至图 33-4。

在关键处由一个细微故障引起的被曲解的变化,远远超过了我们的想象。

显然,非常严格的指令已设计在正确的图里,此指令被隐藏起来,而其他指令没有显示。

事实上,该图至少初看应该作为高级艺术品而这不是偶然所至。对此,我的想法概括在 Mandelbrot 1981 中。在不久的将来,我将完全发表。 ▬

第九篇　分数的布朗分形

第 27 章　河流排水;标度网和噪声

进展到分数的布朗分形,标志着本书的一个重要转折点。直到现在,我们一直保持着时间和(/或)空间网格的分形的不变性的限制,即容许平移和此分形在自身上映射的相似性的不变性。

这样的限制是与在第 22 章阐述的随机化分形的第二个理由相矛盾的。此外,在大多数感兴趣的情形里,它们没有任何实际的物理意义。与此相反,第 27 章至第 35 章就进展到其平移和标度不变性两者都无限制的分形。

这一章研究广义的布朗运动,记作 $B_H(t)$。在 Mandelbrot & Van Ness 1968 中称它为分数的布朗运动(简记为 fBm)。其动机在于每年河流的排水,但是也要涉及标度网和标度("1/f")噪声,而第 28 章至第 30 章研究相关的曲面。

属于高斯过程的重要性

从第 27 章至第 30 章,它们所共有的第一特性是都仅仅包含高斯过程。对统计学家说来,属于高斯过程是非常特殊的,但我早就放弃了这种看法(见第 42 章为此作的注解)。不过,高斯过程仍然是一种基准,它要求我们在跨越它们之前应当极小心地进行研究。

非递归定义

第 27 章至第 30 章还有一个除本书外到处都没有提出过的共有特性。

所有其他各章的结构，不论随机与否，在较早的构造里所得到的图样，都是在不够精细的形态上加上越来越多的细节，递归进行的。最后的分形性质是从生成法则中导出的。

现在则相反，我们从宣布希望得到的某种性质开始，而且仅仅在此之后才寻找能实现该希望的生成法则。十分遗憾，当所希望的性质容易说明和看来简单时，执行的规则不是递归的。事实上，还不如说是不合意的。

如果是这样的话，我们为什么还要坚持这些性质呢？回答是这样的，它们包括了自相似性和无褶皱性，也就是定常性，它在科学中，也在分形理论中占有非常重要的地位。

“公理”方法的相对代价在本章中特别明显，此时它的输出与由递归得到的分形相适应。例如，研究具体情形的人，若要求维数 D 介于 1 与 2 之间的平面分形曲线，也许会在第 26 章的中点位移方法和本章描述的方法之间举棋不定。前者不是无褶皱的，这是一个后者克服了的缺点。使递归构造有如此魅力的系列离散步骤，在大多数情况下反映在无意义和不合意的层次上。

约瑟和诺亚效应

在第一章中提出的论点，即大自然中的许多非光滑图形长期以来吸引着人们的注意力，这在许多情况下是难以精确阐述的。然而《圣经》提供了两个惊人的例外：

……大洋的源泉都破坏了，而天堂的窗户打开了；地上的四十个日日夜夜，雨水绵连不断。《创世记》，6;11～12。

……那里引来了整个埃及土地丰收的七年，而在它们之后将

要引起七年饥荒。《创世记》,41;29～30。

不难看出,诺亚的故事作为一个寓言说明了中东的雨水不均衡,而作为寓言的约瑟的故事说明了湿年和旱年的趋向集聚为周期性的湿和旱。在《论科学中机遇的新形式》讲义中(没有公开,其部分梗概见 Mandelbrot & Wallis 1968 和 Mandelbrot 1973 f)。我用术语诺亚效应和约瑟效应来对这些故事取名。

由可控制的资料证实,《圣经》的“七和七”是诗人对实际生活的过分简化,而(不是如此显然)在实际的尼罗河记录中出现任何周期性都是一种错觉。另一方面,下列事实是大家公认的,即尼罗河和其他河流逐年的排水和洪水警戒线是异常可靠的。

这种可靠性对许多学者的强烈吸引力,就像水坝的设计那样生命攸关。然而,长时间以来,它停留在测量范围之外,也就是分析的范围内,就像每个领域取其第一步就进入统计学,水力学首先假定每条河流的逐次排水是独立的,等同于高斯变量的分布,即高斯白噪声。传统上的第二步假定马尔柯夫相关性,然而,这两种模型总体上是不现实的。Mandelbrot 1965 h 实现了一种突破,它是基于 Hurst 1951,1955 经验的结果(赫斯特的故事见第 40 章)。

赫斯特现象,H 指数

以 $X^*(t)$记一条河流从第 0 年开始到第七年结束之间累计的排水量。用减去在 0 年和 d 年之间的样本平均排水量来调节,以及定义 $R(d)$作为调节后的 $X^*(t)$当 t 在 0 到 d 范围内的最大和最小值之差。此后,$R(d)$就是水库所蓄的容量,它得以保证所述问题在整个 d 年中能理想地工作。一个水库理想地工作就是指:它结束时和开始时充得一样满,从不变空也从不溢出,以及产生均匀的流出量。这种想法显然是不能实现的,但是 $R(d)$是水库设计方法的基础,由于里普尔的工作,它已被用于阿斯旺高坝。赫斯特认识到人们能用 $R(d)$作为研究实际河流排水记录行为的一种工具。为了方便起见,他以标度因子 $S(d)$除 $R(d)$,并且考

察了 $R(d)/S(d)$对 d 的依赖性。

在年排水量服从高斯白噪声的假定下,因子 S 是没有重要意义的。一个已知的定理表明,累计排水量 $X^*(t)$近似于线—线布朗函数 $B(t)$。因此,$R(d)$正比于 $X^*(d)$的均方根,和 $X^*(d)\propto\sqrt{d}$。由此就得出 $R/S\propto\sqrt{d}$ (Feller 1951)。假如年排水量是不独立的,而且是马尔可夫型的,则同样的结果也成立。◁用有限差分▶或者假如其相关性取为在概率论或统计学基础书中所描述的任何形式,结论也同样成立。

然而,此论据使赫斯特得出大大不同和完全不期望的结论,即 $R/S\propto d^H$,其 H 几乎总是大于 1/2。尼罗河的年排水量(它离独立性最远)表明 $H=0.9$。对于圣劳伦斯河、科罗拉多河和卢瓦尔河,H 在 0.9 和 1/2 之间。莱茵河是一条例外的河流,它既没有约瑟传奇,也没有赫斯特现象,而对于它,$H=1/2$ 在经验误差以内,各种数据均收集于 Mandelbrot & Wallis 1969 b。

赫斯特噪声,作为一种标度噪声

当一种脉动或噪声 $X(t)$满足 $R/S\propto d^H$,我建议把这种 $X(t)$称为赫斯特噪声。Mandelbrot 1975 w 证明了它必须有 $0\leqslant H\leqslant 1$。

托马斯对解释赫斯特现象提出了挑战,我猜想这是标度的一种征兆。为了以直观的形式定义标度噪声,回想起任何自然界的脉动都能进行,而且能够听到——这是术语噪声所暗示的。把它录下来,并且通过一个扬声器(例如在 40Hz 到14,000Hz 之间是高保真的)来听,然后将同一磁带以比常速更慢或更快的速度来放。一般说来,我们想象所听到的内容特性极大地改变了。例如,小提琴的声音,听起来就不再像小提琴了,而一头鲸的叫声,如果磁带放得足够快,就从听不见变成听得见。然而,有一类特别的声音,它的性质十分不同,在改变磁带速度之后,只要调节音量,可从扬声器的输出中得到和以前"同样的声音"。我建议把这类声音或噪声称为标度的。

高斯白噪声在这些变换下保持相同的模糊的哼声，因此它是标度的，但是其他的标度噪声可用作构造模型。

分数的 δ 方差

第 21 章把随机函数的 δ 方差定义为在时间增量 Δt 时函数增量的方差（第 25 章）。为了阐明赫斯特的 $R(d)/S(d) \propto d^H$（其中 H 是任意所希望的），Mandelbrot 1965 h 考察出其充分条件是积累过程 X^* 是高斯的，它具有零 δ 期望，而 δ 方差等于 $|\Delta t|^{2H}$。这些条件唯一确定一个标度的高斯随机过程。而且其指数 $2H$ 是分数，此单一的过程就称为（缩减的）分数的布朗线—线函数。如要详细了解，可参见 Mandelbrot & Van Ness 1968，Mandelbrot & Wallis 1968，1969 abc。

从线—线变到线—面的 $B_H(t)$，作为一种所希望的替代定义是这样的：在以时间为参数、维数为 $D=1/H$ 的曲线之中，$B_H(t)$ 的轨迹只有一条，其增量是高斯的，关于任何平移是定常的，因此关于任何比率 $r>0$ 都是"无褶皱的"和标度的。

值 $H=1/2$，即 $D=2$ 产生普通的布朗运动，称之为无持久性（独立增量）的过程。剩下的 fBm 分成两个明显不同的子族。值 $1/2<H<1$ 对应于持久的 fBm，它的轨迹是维数 $D=1/H$ 在 1 和 2 之间的曲线，而值 $0<H<1/2$ 对应于非持久的 fBm。

分数积分微分

已经点明的所希望的 δ 方差尚需实施。假如我们从布朗运动开始，就必需注入持久性。标准的方法是积分，但是它注入了比需要的更多的持久性。很幸运，存在一种方法，它只获取标准积分效果的一部分。当 $0<H<1/2$ 时，同样可应用于微分。这种思想隐藏在数学家们许多"经典而模糊的"角落之中。这又回到了莱布尼茨（第 41 章），而由黎曼，刘维尔和外尔所完成。

作为背景,回想一下微积分。m 是正整数,把函数 $x^{1/2}$ 作 m 次微分,变换为 $x^{1/2-m}$;而作 m 次积分,则变换为 $x^{1/2+m}$(在每种情形里都还要乘一个常数)。黎曼-刘维尔-外尔算法把这种变换推广到其中 m 不是整数的情形,而把 $1/D-1/2$ 阶的分数积分微分应用于布朗运动就产生 fBm。这样,通常的布朗公式,即位移 $\propto \sqrt{时间}$,就代之为位移 $\propto$ (时间)$^{1/D}$,其中 $1/D \neq 1/2$。我们的目标达到了!

有关的公式由 Mandelbrot & Van Ness 1968 给出,而在 Mandelbrot & Wallis 1969 c 以及 Mandelbrot 1972 f 中描述了(真正的)近似式。

◁ 这里也还有另外的复杂性和潜在的危险。黎曼-刘维尔-外尔算法包含一个卷积,因此企图通过快速傅立叶技术(fFt)来执行。这种方法产生一个周期函数,也就是调节到没有任何总趋向的函数。在研究标准的时间级数时,排除趋向几乎毫无困难,因为依赖性局限于少数几项。但在 fBm 的情形,就与此相反,排除趋向要认真对付,要到以 $|H-1/2|$ 增加的程度,而且可以成为非常重要的。这种效应将在下一章内(作为正文内容的扩充)通过比较各种山脉图形的方法来作说明。图 28-1 至图 28-4 是用 fFt 得到的,它表明没有任何总体倾向,因此模拟了山顶;而图 28-8 是未走捷径得到的,它显示了明显的总体倾向。

◁ 如已知 fFt 的盈利经济学,无论怎样使用它们常常都是最好的,但是我们必须取比所希望的样本尺寸更长的周期,而且当 $H \to 1$ 时,容许再增加些耗费。▶

$H>1/2$: 长(=无限)项持久性和非周期循环

在 $H>1/2$ 的情形里,函数 $B_H(t)$ 的主要性质是其增量的持久性取非常特殊的形式:它永远延伸。因此,在 fBm 和赫斯特现象之间的联系表明,在河流排水量记录中遇到的持久性不局限于很短的时间间隔(就像在法老部长们办公室里的期限),而趋向于超

过几个世纪(某些是湿期,而另一些是旱期)甚至几千年,持久性的强度由参数 H 度量。

持久性非常明显地表现在 $B_H(t)$ 的增量图形上和这些增量模拟的年河流排水量的图形上。几乎每个样本看来近似地像叠加在如下背景上的“随机噪声”,即不论样本的周期怎样,已经完成了好几个循环,然而,这些循环并不是周期的,即不能作为样本长度外插。此外,常常见到一种基本的倾向,即不需要连续外插。

由于经济学中常常观察到类似行为,而加强了对上述例子考察的兴趣。经济学家喜欢把任何数据集分解为一种倾向、一些循环和噪声。这种分解意味着帮助了解基本的机理,而 fBm 的例子阐明了倾向和循环可能是由于无意义的噪声引起的。

◁插值　当普通布朗函数 $B(t)$ 在时刻 $t_1, t_2, \cdots$(不一定是等间隔的)是已知时,$B(t)$ 在这些时刻之间的期望值由线性插值得到。特别,在 $[t_j, t_{j+1}]$ 上的插值完全地依赖于 B_H 在 t_j 和 t_{j+1} 上的值。在所有 $H \neq 1/2$ 的情形中,则完全相反,$B_H(t)$ 的插值是非线性的,它依赖于一切 t_m 和一切 $B_H(t_m)$。当 $t_m - t_j$ 增加时,$B_H(t_m)$ 的影响就慢慢地减小。因此,B_H 的插值可作为整体来描述。在第 26 章考察的随机中点位移曲线,其行为非常不同,因为在某些时间间隔上其插值是线性的,这是两种过程之间最重要的差别。▶

函数和零集的 D

增量的持久性和以下事实是同义语,这个事实是 $B_H(t)$ 的图形在所有尺度上都比普通布朗图形 $B(t)$ 要规则一些,这可表示为其维数是 $2-H$,而它的零集维数是 $1-H$。

$H > 1/2$:分数布朗轨迹

当我们转向二维向量值 $B_H(t)$ 时,要寻求那种在所有尺度上其方向都倾向于持久的运动,持久性包含了一种相当强烈的倾向

(但不是一种义务),要避免自相交。因为我们在本书中也要求保持自相似性,我们假定坐标函数 $X_H(t)$ 和 $Y_H(t)$ 是两个分数布朗线—线时间函数,在统计上与同一参数 H 无关。用这种方法,我们得到了一条分数布朗线—面轨迹(图 27-1)。

其分维是 $D=1/H$;它至少是 $1/1=1$,就像是一条曲线,而最多是 $1/(1/2)=2$。这后一种结果表明,$B_H(t)$ 的轨迹填满平面的"稠密性"要比普通布朗轨迹少些。为证实这种论点,下面分别考察有界和无界的轨迹。

H 对有界轨迹的作用是一阶的,对 $H>1/2$ 就像 $H=1/2$ 那样,一条有界的布朗轨迹是一张穿有无限个孔隙的分形网。有强烈启发性的研究表明,该孔隙的面积满足 $Pr(U>u)\propto u^{-D/E}=u^{1/2H}$。

还有,我从经验调查研究了当变化 D 时有界轨迹的边界,寻找对在布朗运动里观察到的值 4/3 有何偏离(这是图 25-2 所指出的)。结果没有找到明显的偏离!

另一方面,无界轨迹在定性上受到 H 的影响。当一条轨迹在时刻 0 从 O 点出发时,它回到围绕 O 点的小单元的期望数对布朗原型是无限的,但当 $H>1/2$ 时是有限的。◁其原因是积分 $\int_1^\infty t^{-2H}\mathrm{d}t$(它由第 25 章中导出)当 $H=1/2$ 时发散,但当 $H>1/2$ 时收敛。▶当有限个分形网叠加在一个方块上时,就覆盖得很少有腔隙,但要稠密地覆盖几乎不能达到。叠加点阵的数目当 H 接近于 1 时是小的,而对 $H=1/2$ 则要增至无穷。

$H<1/2$: 非持久的分数布朗运动

当 $0<H<1/2$ 时,分数布朗运动产生非持久函数和轨迹。所谓非持久的,就是趋向于经常返回到出发点,因此它比布朗对应物扩散得更慢。

公式 $D=1/H$ 仅当 $E>1/H$ 时才有效。当 $E<1/H$(特别是

对平面情形 $E=2$)，分维就达到最大可能的值，$D=E$。我们还记得布朗轨迹的最高可能维数是 $D=2$，但此最大值仅当 $E\geqslant 2$ 时被实现。当压缩为 $E=1$ 的直线时，布朗轨迹必须适应于 $D=1$，当 $H=1/3$，fBm 轨迹勉强填满该通常的三维空间。

回到平面 $E=2$。维数分析证明，$H<1/2$ 的无界轨迹几近必然无限次地访问任意指定的点。因此，与 $B(t)$的情形($B(t)$不能度量出 $D=2$ 所期望的那些性质，并且稠密地而不是完全地填满平面)相反，只要 $1/H$ 超过 2，就达到完全填满的目的。为了证明 $B_H(t)$几近必然无限次回到它的出发点，回想第 25 章返回时刻的维数是 $1-2H$，因此当 $H<1/2$ 时是正的。这个论点可延伸到除 0 以外的点。这样，无界分数布朗轨迹($H<1/2$)与边为 1 的方块的交是单位面积。

有界轨迹是一张带有孔隙的网，但有正面积。(隐藏于第 15 章！)

河流排水的分数布朗模型，“动机”

再有，引入 B_H 的原始动机隐藏于这些几何学家的个人经验之中，即数学和图形学的技巧很可能适用于这类经验。我打算指明，虽缺乏热切动机但吻合和工作得很好的模型，总比虽有很好的动机但缺乏吻合的模型要好得多。但是，科学家们却两者都要。十分遗憾，按我的观点看，现在的“阐述”是设计出来的，它比解释事实还缺乏说服力。

为了了解河流的逐年排水量为什么是互相依赖的，我们首先考虑从一个季度输送到下一个季度天然蓄水池中的水量。然而，天然蓄水池产生记录的短期光滑性，而最好能引进短期持久性。从长期观点看，累计排水量的图形在“效果上”(如第 3 章所定义的)是连续的，其维数等于 3/2。

再进一步，许多作者比我更多地准备求助于过程的总层次，每个过程有它自己不同的尺度。在最简单的情形里，贡献是可加的。

第一个分量考虑天然的蓄水池，第二个分量考虑微气候的变化，第三个分量是气候的变化，如此等等。

不幸的是，无限度的持久性要求无限个分量，而模型就要以无限多的参量告终。剩下的就是必须说明为什么各种贡献之和是标度的。

现在来讨论把一个函数（相关的）写成无限项指数之和，我花费了许多时间才指出，要表明此和式是双曲的并不比说明为什么原始曲线是双曲的更容易，同时说明祈祷可能的原因只有魔术（非科学的）的价值，只要它保持空的。因此，很高兴发现与我并肩工作的詹姆士·麦克斯韦；见第 41 章的**标度变换：恒久而古老的万灵药**。

当然，实际的水力学工程师能对每个过程都强加有限个外界限，它们具有最长工程规划范围的数量级。

其他的标度噪声 $1/f$ 噪声

形式定义　一个噪声 $X(t)$ 称为标度的，假如 X 本身或者它的积分或微分（如果需要可以是多重的）是自仿射的，也就是，假如 $X(t)$ 在统计上恒等于在时间上压缩，继之在强度上相应变化所作的变换。这样，必须存在一个指数 $\alpha>0$，使得对每个 $h>0$，$X(t)$ 在统计上恒等于 $h^{-\alpha}X(ht)$。更加一般地，特别当 t 为离散的情形，称 $X(t)$ 为渐近标度，假如存在一个慢变量函数 $L(h)$，使得 $h^{-\alpha}L^{-1}(h)X(ht)$ 当 $h\to\infty$ 时趋向一个极限值。

这个定义要求校核 $X(t)$ 和 $h^{-\alpha}X(ht)$ 的每一个数学特征。这样，标度永远不能由经验科学来证明，在大多数例子里，标度性质是从单个试验中推断出来的，它仅仅涉及了同一事物的一个方面，例如间隙长度（第 8 章）的分布或者赫斯特的 R/S。

◁ 最广泛使用的标度试验基于谱。一个噪声是谱标度的，假如它度量的谱密度在频率 f 处具有形式 $1/f^{\beta}$，其中 β 是正指数。当 β 充分接近于 1 使之满足 $1/f^{\beta}$ 能简记为 $1/f$ 时，就作为“$1/f$ 噪

声”▶

许多标度噪声在其本身的领域中有着明显的含义，而它们的普遍性质是一种值得注意的事实。■

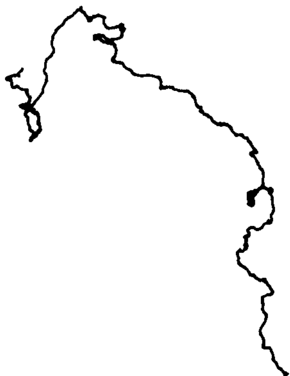


图 27-1

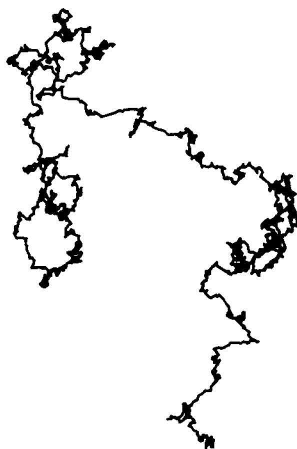


图 27-2

图 27-1 和图 27-2　分数布朗轨迹（维数 $D\approx1.1111$，$D\approx1.4285$）

图 27-1 构造了在统计上自相似的分形曲线（$D=1/0.9000\approx1.1111$）的例子。它的坐标函数是独立的分数布朗函数，其指数 $H=0.9000$，它表明了约瑟效应对尼罗河的作用。事实上，H 接近于 1 但还不足以防止自相交，而是强迫曲线的“倾向”在任何所参与的方向上要持久，因此极大地阻止它们相交。把复杂曲线想象为大、中、小卷圈的叠加，这可说成在高度持久性和维数接近于 1 的情形，小卷圈勉强可见。

图 27-2 使用了同样的计算机程序，但 $D\approx1/0.7000\approx1.4285$。伪随机源是不改变的，因此全部形状可识别。但是 D 值增加后就增加了小卷圈的相对重要性，而减少了中卷圈的重要程度。前图中看不清的细部就显得非常明显了。■

第 28 章　地形和海岸线

这一章的开头展示了完全属于人工的图画,即仿造的地图以及山脉和岛屿的照片,打算表明像阿尔卑斯那样的山脉在实用上可以用一级近似(即适当选取由布朗机遇支配的分形曲面)来模拟。最后,我们会遇到一个可以觉察到的大自然图象的模型:海岸线,本书用它开头,但一直回避至今。

山脉的表面是标度形状,这个概念是我们的出发点。这是新思想吗? 当然不是! 虽然在科学上从未阐明和探索过,但在文学上却是普遍的。作为例子,增加一段第 2 章开头的摘录,读一段 E. 温伯的《攀登阿尔卑斯山(1860 ~ 1869)》,第 88 页上写道:"这是值得注意的,……岩石……的碎片……常常出现悬崖(由此断裂出碎片)的特征形状,为什么山脉的总体就不能有或多或少的均匀性呢? 产生小形状的原因和形成大形状的原因是相同的:同样的影响正在起作用——同样的霜和雨水给出的总体的形状和它的部分形状相同。"

我们不需要采用温伯在文学上诗中的看法来同意他那值得探索的结论。在这一章,易于处理的数学环境内,我所做的是我能想到的:布朗曲面和分数布朗曲面。

甚至用我的第一个分数布朗山的模拟(图 7-20 至图 7-24)来"眼见为实"。随着图形学的质量开始改进,地形的质量也改进了。但是最后,模型和我们的经验之间的差别非常明显,因此必须引进新的模型,这将在下一章里看到。

在平坦地球上的布朗地形(Mandelbrot 1975 w)

我们用垂直截面的方法来研究地形。就像在第 4 章和图 25-1

所指出的那样，本书的源泉之一是由 Mandelbrot 1963 e 报道的一种感受，即标度的随机行走是一个山脉横断面的粗略的一阶近似。因此我寻找一种随机曲面，它的垂直截面是布朗线—线函数。统计模型的建筑师的工具箱里没有这类曲面，只好把稍带模糊的代用品也提上来使用了。

它就是点的布朗面—线函数，就像在 Lévy 1948 中定义的 $B(P)$。为了在短期面晤中就熟悉它，并且具体地应用它，没有别的替代办法，只有小心地考察图 28-1 和图 28-2 上的实际模拟。该布朗虚构景色具有分形维数 $D=5/2$，而它的确比大多数地球的地形更粗糙。

因此这是一个需要返工的粗糙模型。而不是一次漂亮的向前跳远！

警告：不要与布朗片混淆　布朗运动的变种可无止境地增加，而专门术语却很少。这里用到的布朗面—线函数不要与布朗片相混淆。后者是完全不同的过程，它沿坐标轴消失而且明显地是各向同性的。见 Adler 1981，特别是其中第 185 页和第 186 页上的图示说明。

布朗地形的海岸线

让我们停一下，以便校核海洋海岸线研究的进程，那时把海岸线定义为零集：位于洋面上的点，包括位于近海岛屿上的点。图 28-10 上的布朗海岸线是我首次遇到的具有下列特性的曲线：(a) 没有自相交，(b) 特别没有自接触，(c) 其分维显然大于 1，(d) 是各向同性的。一个最近的变种见图 28-6 和图 28-7。

更精确地说，其维数是 3/2。此值较图 5-5 上理查森的最大值还要大，布朗海岸线的适用性是有局限的。这使我们想起北加拿大、印度尼西亚，也许还有西苏格兰和爱琴海，以及可能适用的许多其他例子，但肯定不是全体。因为由理查森的数据资料，期望任何一个 D 普适地应用总是愚蠢的。

产生一个布朗地形(Mandelbrot 1975 c)

很遗憾,维数 $D=5/2$ 的简单布朗地形和维数 $D=3/2$ 的海岸线是不够的,因为它们容易计算出来。的确,布朗函数是"泊松"地形的最佳近似,后者是由独立的矩形断层叠加起来而造成的地形,水平的高原沿一条随机选择的直线断裂。然后构成陡壁两边上的水平线之差也随机选择:例如以等概率取 ± 1,或按高斯分布。然后全部重新开始,并在第 k 阶段里除以$\sqrt{k}$(这样就使得每个各别的陡壁与其他陡壁的累计之和相比,在大小上是可以忽略的)。

把上述步骤无限继续下去的结果,就刚好概括出通常的随时间的泊松过程。不需要再作数学上或物理上的详述,我们就能看到,这种论述至少抓住了构造发展的一种形式。

由于这种机理的简单性,得到安慰的是,相信在某些很早和很特殊的各种事件的"标准"状态里,地球到处都有 $D=5/2$ 的布朗地形。但为了讲述下一节,本论题必须到此终止。

布朗地形的全局效应

莱维发现,布朗空间—线函数具有一种初见时使人吃惊的性质以及具有一种非常直接、实用的含义。随便说,该性质断言,布朗地形的不同部分决不是统计上独立的。因此,为了在布朗面—线函数里嵌入布朗线—线函数,必定要放弃一种形式(它至今仍是布朗机遇的独特长处):部分独立性。

考察分别位于该地形子午线截面东面和西面的两点。沿着子午线,地形是布朗线—线函数,因此在不同点上的"斜率"是独立的。此外,可以期望子午截面以下述方式充当屏幕的作用,在东面点的地形情况不会影响到在西面点的地形分布。◁假如发生这种情形,地形应是马尔科夫的。▶事实上,西面的点影响到东面的点,意味着生长过程必然包含了很强的总体依赖性。

这种依赖性表示布朗曲面比布朗线—线函数更难构造。第25章的随机中点位移过程(在第26章和第27章中已经阐明它不能扩大到分数布朗线—线函数)也不能扩大到普通布朗—线函数。就是说,不能如此进行下去:首先把此函数约束于粗的网格上,然后在每个格子内(它与其他格子是独立的)填满它的值。也不可能一层一层地构造:首先对 $x=0$,然后对 $x=\epsilon$ 而不管 $x<0$ 的值,再对 $x=2\epsilon$ 而不管 $x<\epsilon$ 的值,等等。

更为一般地,每种有希望很容易一步一步地把布朗线—线函数推广到"多维时间"的算法,就不可避免地要产生出一个函数,它在分类法上不同于所希望的。

就像本章最后一节要提到的,在模拟中我参与修改了难办的理论定义的措辞,所用的方法是已知误差项的逐次近似。但我不能担保,由于读本书较早版本而受激励的人是否也已加入到我们现在的游戏中来。

球面上的布朗地形

下面设地球地形的基准面是球面。很幸运,相应的布朗球—线函数 $B_0(P)$ 也已经由我的良友所提供:见 Lèvy 1959。这是容易描述的,是有趣的,甚至是很有意义的,但我们将看到这也不是很现实的,因为太多地预言海岸线具有维数 $D=3/2$,这是一个严重缺陷。

$B_0(P)$ 最简单的定义是使用噪声理论的术语,我们不能停下来作这种定义,但许多读者都是熟悉的。在球面上铺一层高斯白噪声的毯子,而 $B_0(P)$ 是沿着以 P 为中心的半球面上白噪声的积分。

在小于 $60°$ 的角度以内,$B_0(P)$ 看来非常像布朗面—线函数,然而从整体看却不是的。

例如,$B_0(t)$ 具有明显的性质,即当 P 和 P' 是球面上的相对点时,其和式 $B_0(P)+B_0(P')$ 与 P 和 P' 无关。的确,此和式简单说就是白噪声(它用于构造 $B_0(P)$)在整个球面上取的积分。

这样，在 P 点的一个大土丘对应于在相对点 P' 处的每一个大洞，这种分布有一个与基准面的中心不相同的重心，但它几乎不能成为稳定的平衡位置。可是不必担心：它是从静力不稳定性中拯救出来的（因此它早就从模型中开除出去），这要感谢地壳均衡理论。该理论认为地球上近似固体的外壳在海洋的最深处非常薄，而在最高的山脉之下又非常厚，通过与地球同心并画在离海洋的最深点往下一点的地方的一个球面几乎把外壳二等分。如同意如下的观点，即一座山脉的看得见的顶峰必定总是与其见不到的根（在参考球面下）相连接的，则对 $B_0(P)+B_0(P')$ 是常量就不会惊奇不已，但它不一定推出严重的静力不平衡。

布朗非洲长刀和美洲豹

上面的布朗地形的变种与证据吻合得怎样？以当今的大陆和海洋为基础，D 是错误的，因此吻合性很差。

另一方面，平坦的大地构造学（大陆撕裂和漂移的理论）提出在原始的地球上进行适当的试验，认为它出现于两亿年以前。但这种根据较为脆弱，在这种情形里看来试验要失败。魏格纳告诉我们（而且他的理由已被接受，例如，见 Wilson 1972），有一次大陆连接在非洲大刀状之内，而当时各海洋形成一个美洲豹状的超海洋。

图 28–9 的地形好像非洲大刀一样，它是一堆陆地，到处被宽阔的海湾弄得凹凸不平。但是初看上去好像陷入错误之中。它倾向于过分强调非常大尺度的细节，这是由球面几何学与下列事实的组合而引起的，即在球面上布朗的相关性法则涉及一个角度小于 60°的很强的正相关性，以及介于相对点之间的很强的负相关性。在将注意力更为集中于比较局部的特性的第二次观察时，就使吻合性损坏了；当角度小于 30°（譬如说）时，球面上的布朗海岸线变得与平面上的布朗海岸线不能区别了。后者的所有缺点都浮回到曲面上。

一个分形片，它的高度函数与上面的非洲长刀相同，但是具有

半个半径数量级的尺度，看上去好像是外行星的一个不规则的月亮。与图 2-1，图 2-2 及图 2-3 相反，它没有漂浮于海上的残骸或货船相伴，因此它的 D 只是不规则性的度量，而不是支离破碎性的度量。

平坦地球上的分数布朗地形(Mandelbrot 1975 w)

上面两个关于地形的布朗模型都有个麻烦，即 $D=3/2$ 对于海岸线来说是太高了。因此，为寻求一种能更广泛地适用的模型，却尝到了一种没有料到的味道。早在第 5 章和第 6 章就确定 $D>1$，我们就开始寻找各种方法强迫 D 提高到超过 1。现在又必须把 D 压缩到 3/2 以下。为了得到不太粗糙的海岸，我们必须有不太粗糙的地形和不太粗糙的垂直截面。

很幸运，前一章为我们作了很好的准备，为了取得垂直截面的模型，我把布朗线—线函数以它的分数的变种来代替，具有这种截面的随机面—线函数 $B_H(P)$ 的确存在。其曲面的 D 是 $3-H$ (Adler 1981)，而是水平线和垂直截面的 D 是 $2-H$。

因此，对经验数据可能要求的任何维数的模型建立和模拟都不再存在任何困难了。

确定 D 理查森的数据(第 5 章)使得我们期望海岸线维数“典型的”在 1.2 左右，而地形的维数在 2.2 左右。因此我们能够以很有效的 $H=0.8$ 作为满足图 28-3 和图 28-4 的值。然而，对地球的特殊区域需要考虑其他的值。$D\approx2.05$ 左右的值说明由非常慢变的分量所支配的地形，当该分量是大斜率，其地形就是一张倾斜而凹凸不平的桌子，其海岸线与直线的差别就是极不规则性。在顶峰附近，其地形是一个凹凸不平的锥体，而海岸线是一条极不规则的卵形线。

D 接近于 3 的地形也潜在地是有用的，但很难以有用的形状来说明。观察一下图 28-16 就足够了，D 接近于 3 的海岸线使人联想到一块淹没的冲积平原。因此一切 H 值都将在统计模型建

筑师的工具箱里找到它的位置。

宇宙学原理

第 22 章的宇宙学原理能够用地形的术语来重新描述。强宇宙学原理联合了定常性和各向同性的概率论概念。因此在平坦大地上的地形 $Z(x,y)$ 可说成是强宇宙学的,假如产生地形的法则在每个参考系(其原点 (x_0,y_0,z_0) 满足 $z_0=0$ 而 z 轴是垂直的)中都相同。特别地,当变化 x_0 和 y_0 以及旋转水平轴时,上述法则必须保持不变。我的在平坦大地上的布朗地形和它的分数形式,两者都不满足此原理。

但是它们满足一个"有条件的"形式,其中原点被限定于满足 $z_0=B(x_0,y_0)$,这样它就位于地球的表面。

用定常过程来拟合地形的企图已经实现了。即以规则的点阵覆盖 $z=0$ 平面,把不同点阵单元内的高度取为独立的随机变量。这种模型不能说明本章中考察过的任何标度定律。

在球面地球上的布朗地形满足强形式的宇宙学原理,这就实际上处理了地球的大部分,强形式是更为有用的,何况,条件形式成立,在处理局部效应时它更加完善。

水平面

对位于离地球表面有限距离的观察者来说,水平面是由沿着周围各个方向最大表观高度未遮去的点所构成的。

当地形是在圆球状地球上的一个扰动,水平面显然就在离观察者的有限距离处。

当地形是在平坦的水平平面上布朗的或分数布朗的扰动,水平面的存在就不明显了:每座山可能在一座更高的山背后隔一段距离,等等,直至无穷。实际上,位于距观察者距离 R 的一座山具有 R^H 级的相对高度,所以它的表观高度的切线在水平面以上的度

数上大约是 R^{H-1},而当 $R\to\infty$ 时趋于0。因此再次定义水平面。

为了获得进一步的了解,把从观察者到水平面的距离除以它的平均值。在平坦的地球上,这个函数与观察者的高度是统计独立的,而在球形的地球上,则相反,当观察者离得更高时,水平面趋于一个圆。还有,平坦地球水平面位于通过观察者的一个平面之上,后者与观察者高度相独立。但是,假如观察者是足够高的,球形地球的水平面却落在那样平面之下。总之,从观察到的水平面的性质,证实了地球是球形的,相反的结论应该毁灭了。

地球地形的分数布朗模型,"推动力"

照例,人们会惊奇,为什么以简易为优点选择的模型确证了如此有吸引力的应用性。我曾建议,但还不能断定它们是可信服的(第42章)。

◁ 首先,能像对 $B(P)$ 那样来构造 $B_H(P)$,即把矩形断层叠加起来(Mandelbrot 1975 f),然而,断层的剖面必须不再是很陡的悬崖:当接近断层时其斜率必须增加。很可悲,这种合适的剖面是设计出来的,所以这不是一种好方法。

◁ 似乎选择由一个布朗模型开始更好,然后试着减少维数。就像在第27章对河流所做的那样。排除局部光滑性,把一个面积无限的曲面变换为面积有限的曲面。另一方面,它保留大部分特性不受影响。因此,局部光滑性把在一切尺度上具有同样确切维数的对象替换为这样的对象,其总体效果的维数是5/2,而局部效果的维数是2。

◁ 更加一般地,具有不同基本尺度的 k 个各不相同的光滑物以 $k+1$ 个以过渡区相连的不同维数的区域为结尾。然而其整体可以成为与一个中间维数的分形难以区分清楚。换句话说,把具有完全确定尺度的现象叠加,可以模拟标度。

◁ 另一方面,一个标度现象常常自发地用分层次(每一种层次都有一个尺度)的思想来分析。例如,第9章的星系集团就不需

是真实的，这将在第 32 章至第 35 章中证明。因此，我们不必赶紧跟随笛卡儿的推荐并把每一个困难再划分为几部分。当我们的思想自发地把地貌学的位形分析为具有极为各不相同的特性的叠加时，这些特性不需要是真实的。

◁ 很幸运，地球的地形具有内在的有限的外界限，因为它的基准面是球形的。因此，不妨假定各种各样的计划经历了整个地质学的历史，包括空间的尺度停止在大陆的数量级。实际上，假定 H 从一地变到另一地时允许该计划相对剧烈地变化。▶

碎裂的石头，机场跑道和摩擦学

正如在很久以前，即在第 1 章里提到的，我是从拉丁文 *fractus* 创造了分形(*fractal*)，前者描述了碎裂石头的外貌：不规则和支离破碎。语源学不能强把一个实际的石块表面说成是分形，但是它必定不是一个标准的曲面，而它应该是个分形，假如它是标度的。

对标度的论证是这样的，石头是由砂粒粘在一起构成的有层次组织的区域，其中大区域粘住的强度要比其小区域小。当打一块石头时，所产生的能量最容易通过分离大区域而消耗在它本身。但是没有理由认为在几何学上容许这种分离，因此这种断裂很可能是把属于各种层次的中间区域墙的部分结合起来。

具有磨损和摩擦式样的科学就是摩擦学，它来源于希腊文 $\tau\alpha\beta\omega$ = 擦，磨。在 Sayles & Thomas 1978(修正了一些有毛病的分析之后，见 Berry & Hannay 1978)中的证据支持了以下这种信念，分数的布朗曲面提供了机场跑道和许多自然的粗糙曲面的一阶近似表达式，D 的经验值(从 Sayles & Thomas 图 1 中 7 – 2D 曲线图形中推出)范围从 2 到 3。

油和其他自然资源的空间分布

现在关于地形是标度的“原理”已经用各种方法试验过，让我

们来考察一个推论。就像第 38 章所表明的，我们可以期望与地形相联系的每个量都服从双曲概率分布（“齐夫定律”，“帕雷托定律”）。确实常常是这种情形。事实上，早在提出海岸线是标度的海岸线研究（第 5 章）之前，Manderbrot 1962 n 就发现了油和其他自然资源的分布关系是双曲的。该发现不同意当时占优势的观点，即问题中的量是对数正态分布的。这种差别是极其有意义的，此储备在双曲律下的储备比对数正态律下的要高得多。我的结论在 1962 年没有得到更多的响应，但我将再次探索。

将在第 39 章进入关于**无腔隙分形**后再次讨论矿石。

捷径：周期曲面和中点位移曲面

因为我的布朗或分数的布朗地形以包含的算法为根据，需要近似式或者捷径。这样，图 28-8，图 28-10 和图 28-11 包含了对高斯过程的泊松近似式，而图 28-1 到图 28-7 以及彩色图-2 到彩图-7 均以由快速傅立叶方法算得的周期函数替代 x,y 的非周期函数，然后修剪到保持一个不受周期性影响的中央部分。

另外，我用中点位移（就像第 26 章那样）来产生分形曲面，记作 $B_H^*(x,y)$。这种曲面最容易实现，只要以等边三角形 $\mathcal{J}$ 为初始器。$B_H^*(x,y)$ 的值是由 $\mathcal{J}$ 的顶点描述的，其第一步分别在 $\mathcal{J}$ 的三条边的中点插入该函数，用像对坐标函数 $B_H^*(t)$ 同样的过程。下一步在 9 个二级中点作插值。如此等等。

其输出肯定要比任何非分形曲面或大多数非随机分形曲面更加实际。但它是定常的吗？$\Delta B_H^* = B_H^*(x,y) - B_H^*(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 应该仅仅依赖于点 (x,y) 和 $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 之间的距离。事实上，现在的 ΔB_H^* 显然依赖于 $x,y,\Delta x$ 和 Δy。因此，B_H^* 不是定常的，即使 $H=1/2$。

我已经考察和比较了 12 条捷径，它们是定常的，我希望有一天出版这些比较结果。

图 28-1 至图 28-4　普通的和分数的布朗湖景色
(维数按 3.421 是 $D \approx 2.1$　至 $D = 5/2$)

图 28-3 是分数布朗地形的一个例子，它的维数十分接近于 2，这就是我的地球景色模型。其他的图形是由此模型外插更高维数的地形，最后是图 28-1，这是一个通常的面—线布朗地形。后者具有与图 25-1 一样的确定特征，即每个垂直截面是通常的布朗线—线函数。布朗地形是一个粗略的地球模型，因为布朗地形的各个细部显然是太不规则了。布朗地形的曲面维数

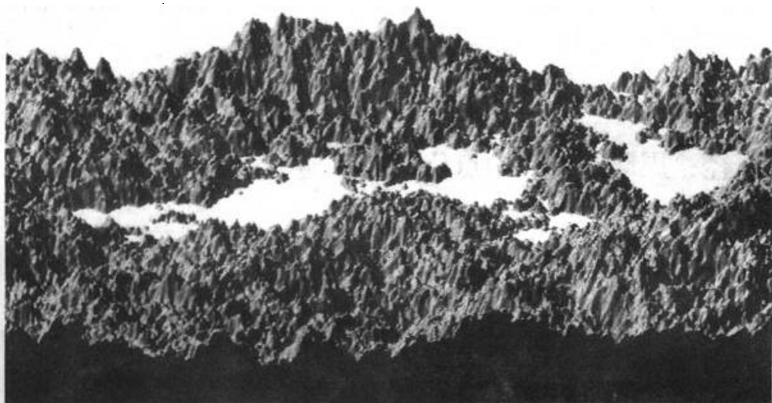


图 28-1

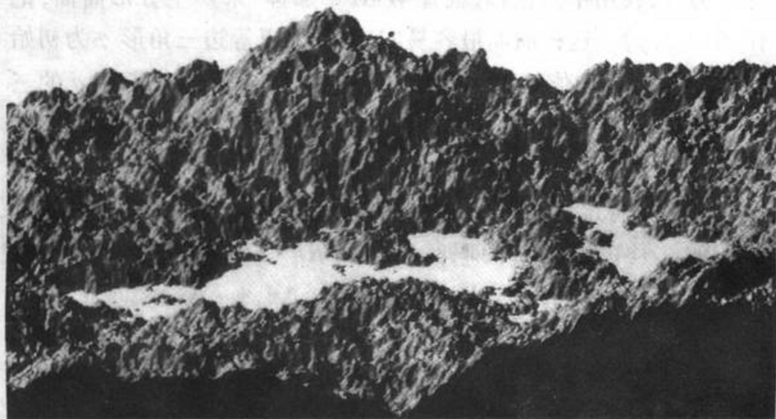


图 28-2

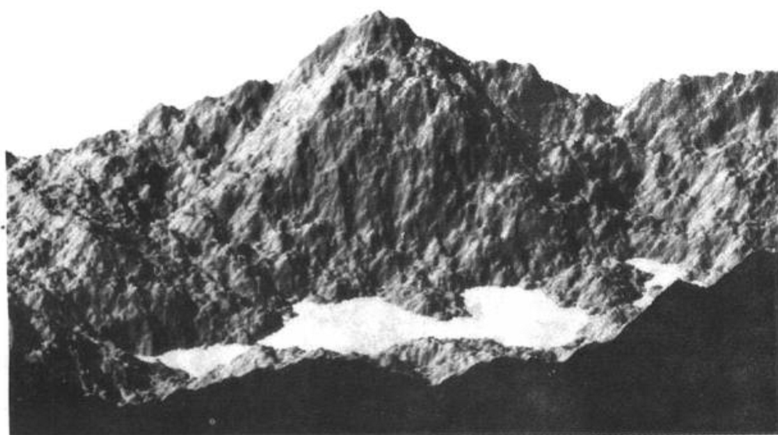


图 28-3

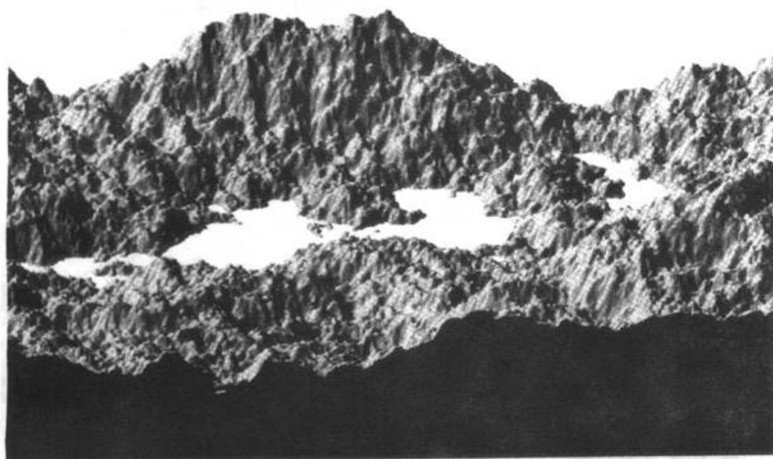


图 28-4

$D=5/2$ 和海岸线维数 $D=3/2$ 太大了，这个事实使得只能表示粗略的相符。

对于每一幅景色，其方位被计算为构成正方形网格的经度和纬度。编好程序，用计算机来模拟光源位于左上方 60°处的光线，而此时观察者位于基础面以上 25°处。详情可见彩色图的说明。 ■

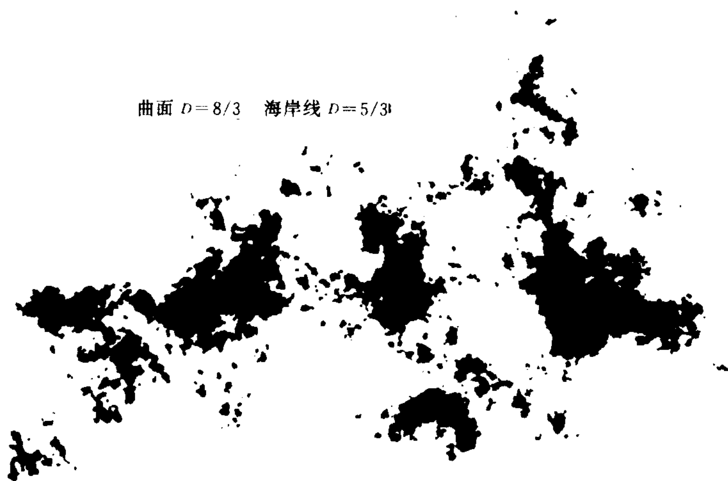


图 28-5

图 28-6

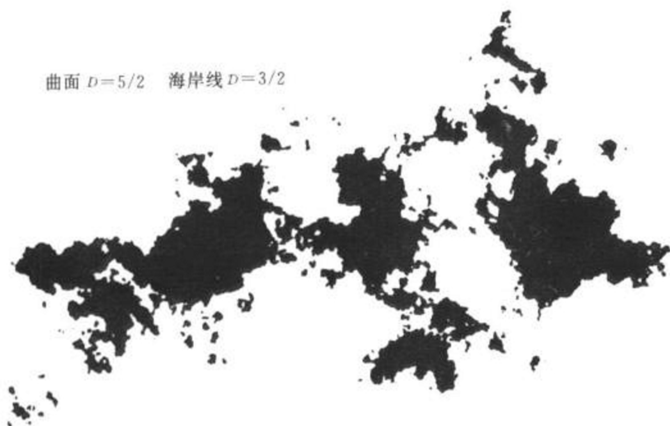


图 28–7

图 28–5 至图 28–7　布朗海岸线和岛屿"带"

这些图形的初衷是要强调一个重要的、最新发现的效果。当地形的维数 D 达到和超过 2.5 时，存在一种强大而不断增加的趋势，使海洋割裂为带弧形的分离的几个"海"。这些海是互通的，但每一个都具有锋利的特征。另一方面，岛屿似乎变成了"带子"。同样的效果在这些景色：图 28–1 至图 28–4 和图 28–11 所呈现的山脉中见到（但没有这么明显）。

在示例中缺乏各向同性，它与产生机制是各向同性的这个事实，是完全相容的。

这些图形等同于（除了种子）图 2–1 和图 2–2，图 2–3（将在第 30 章的末作解释）上薄片的平面截面。这里和图 2–1 和图 2–2，图 2–3 一样，我们使用了一个修饰过的形式，它是期望过程中周期变种的一个周期的变形。这就减少了整个形状对 D 的依赖性。真实的布朗海岸线的整个形状与这些图形所显示的相差更大。

有关这里带的效应，将在第 34 章和第 35 章中讨论。■

图 28-8

图 28-8 分数布朗景色中的轮廓线

这里的两张图对分数布朗函数组合了两或三条轮廓线(粗线是海岸线)。这两张图包含不同的维数,但是包含同样的程序和源:上图使用 $D \approx 1.3333$,而下图用 $D \approx 1.1667$。经检查,从地理学的观点看,这两个维数都是可靠的,但一个在高的一边而另一个在低的一边。

这些曲线似乎比具有相同 D 的图 28-6、图 28-7 中的曲线具有少得多的崎岖度。其原因是在图 28-6 和图 28-7 中每个截面显示出非常强的极大值;那里几乎不存在系统的斜率。相反,在这里我们看到一座巨大山脉的侧,具有很强的总体斜率。本图的"普通"外表接近于图 28-6,图 28-7 上某些特别崎岖的小段的放大图。

在比较了这些不同的轮廓线之后,我们更加意识到,即使在 D 固定以后,仍给不规则性和支离破碎性之间的相互作用留有很大余地。 ■

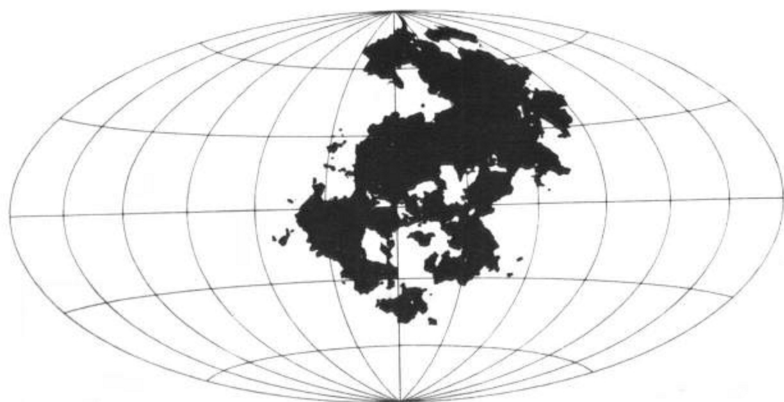


图 28-9 和彩图-4 布朗长刀(海岸线维数 $D=3/2$)

在彩图-4上的"远行星"代表了从空间远处见到的虚构的分形非洲长刀。它的地形是通过在计算机上(据我所知这是第一次)实现一个P. 莱维随机曲面来产生的,这个随机曲面即:从球面上的点(经纬度)到标量(高度)的布朗函数。海平面是这样调节的,使得总面积的四分之三在水下,海岸线是由插值得到的。

该图表明与哈墨地图——魏格纳的大陆漂移理论的研究者们所支持的一个投影图——有着相同的非洲长刀。

这个非洲长刀模型与"真实的"相似程度如何呢?特定的局部细节不能期望它完全正确,只能在局部和全局两方面都呈波动的程度。这种类似性是不完美的,正如所料想的。的确,这个非洲长刀海岸线模型满足 $D=3/2$,而在地质学书中想象出的绘图来自真的非洲长刀,其 D 与当今大陆上观察到的 D 是相同的,即 $D\approx1.2$。假如新的证据证实与 $D=3/2$ 是相容的,我们就能用相当基本的大地构造假设学来解释非洲长刀的几何结构。

非欧氏空间的分形 在黎曼非欧几何学里,球面起着平面的作用。因此非欧几何学走了一半路程:它们在非欧氏基础上研究了欧几里得形状。本文的大部分也走了一半路程,因为它在欧几里得基础上研究了非欧几里得形状。现在的非洲长刀综合了这两个出发点:它是非欧氏基础上欧几里得形状的一个例子。

■

我的观点，即适当选择的分数布朗函数是地球地形的合理模型，最初发现于这四张海岸线模型。与图 28-9 一样，它们是从我 1975 年的法文版中遗留下来的，只是黑色区域已被更加仔细地填满，因此它比原图更细致。

当 D 接近于 1 时，图 28-10 的最上面那张图的海岸线太笔直了，因而是不实际的。

另一方面，相应于 $D=1.3000$ 的海岸线，即从上至下的第二张图，使我们马上想到了真实的地图。我们看到了非洲(左边的大岛)、南美洲(左边大岛，就像镜象中看到的)和格陵兰岛(右边大岛，把图的顶部从 12 点钟转到 9 点钟以后)的清楚明白的摹拟。最后，如果把图的顶部转到 3 点钟，两个岛一起模拟了有点"营养不足"的新西兰，以及一对 Bounty 岛。

当 D 增加到 3/2，即从上至下的第三张图，这个地图猜谜游戏就更难玩了。

当 D 再次增加至接近于 2，图 28-10 的最下面那张图，地理游戏就变得更加困难，或至少是更加专门了(明尼苏达？芬兰?)。最终成为不可能的。

其他的源产生相同的结果。然而，基于更精细绘图上的相同测试满足 $D\approx1.2000$。■

图 28-10　布朗海岸线的第一个著名例子

收入这张图可能包含了过多感情上的因素，因为不能说其他图比它表示得差。但是这些具有不同海平面的岛屿图是 Mandelbrot 1975 w 和我 1975 年的文章的特征，我喜欢它们。它们是带有变维数 D 和变海平面的分数布朗岛屿的一个更完整序列的一部分，它们是第一次能被这样画出来。(1976 年，我们制作了从海面上显露出来的这种特别岛屿的照片；到 1981 年，这照片看上去原始得可笑，但是它获得了收藏价值。)

在我真的看到底图的景色——其小岛屿就像种子一样撒在狭长的半岛尖顶上——的旅行中，我常常陷入惊讶之中。

从不太精密的阴极射线管中拍下了原始的图解照片，因此资料已被重新处理过了。这里(与图 28-1～4，以及彩图-4 到彩图-9)，不需要特别的边缘光滑模拟。很幸运，以前的作图过程建立了这样的印象，即海向着水平面闪烁。

与最近的景色相比，读者将观察到该图含有异常高的维数。其原因是较早的作图技术不能表示小的细节，因此早期景色的维数似乎小于已被送入产生程序中的 D。为了弥补，我们增加 D，使它超出大量证据所建议的范围。然而，当绘图改进了，偏差就变得明显了，因此适得其反。今天，这里采用即理查森的数据所提出的 D，产生了完美的、令人满意的景色。

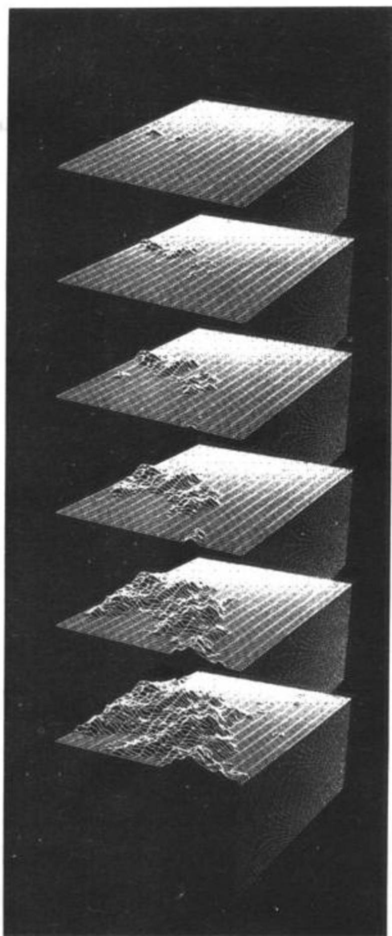


图 28-11　分数布朗岛屿(维数 $D = 2.3000$)的第一个著名例子

■

第 29 章　岛屿、湖泊和盆地的面积

作为前一章的深入，我们进一步探索地形的布朗模型。有关岛屿面积的结论是可以接受的，但是有关湖泊和盆地的结论却是不能接受的。为了纠正这种不一致性，改进模型提到日程上了。

投影的岛屿面积

就像第 13 章所指出的，海洋岛屿投影面积 A 的可变性是地图的一个明显特征，它常常比海岸线的形状更显著。我们报道了 Korčah 1938 中把 A 的分布作为双曲的：$Pr(A > a) = F \cdot a^{-B}$（这里我们用 Pr 代替了原来的 Fr）。最后我们表明，当海岸线是自相似时，该经验公式是成立的。而现在，我们处于比假定地形是自相似更加充足的状态。

毫无疑义，能够把关系式 $2B = D$ 从第 13 章考察的非随机科赫海岸线推广到分数布朗零集。而且，从现在看来这种论证仍然部分地有启发性。相应于具有 $H = 0.800$ 的分数布朗地形的分布，实际上非常接近于全地球的经验数据。

每个单独取得的分数布朗岛屿的维数 D_c 还是不知道的。

投影的湖泊面积

有人主张，湖泊的面积也服从双曲分布。因此，我们可以企图不考虑未包含任何新内容的湖泊。然而，另一种想法认为，湖泊和海洋岛屿的定义决不是对称的。

本章的专门分析，澄清了有关湖泊的两个代名词“死谷”和“盆

地"的许多概念。它使我们面对这样的事实,河流和堤岸树在自然界中是不对称的,不在我的任何一个布朗模型中,这就导致后面提出的改进。

但是,湖泊面积的分布仍然是神秘的。也许它的双曲分布仅是由于在各种形式的折磨下双曲分布的"鲁棒"性引起的(Mandelbrot,1963 c,以及第 38 章)。例如一个双曲的随机被乘数与一个大的任意乘数的乘积本身就是双曲的,其被乘数可以由那里地形和每一事物都是双曲的原始状态所引起。而乘数可以是由于千百个几何学和大地构造学影响到湖泊形状的因素引起的。然而,这种"解释"实际上不比挥挥手更多。

死谷的概念

这概念与海洋岛屿相对称,它是由大陆所围住的一块面积,其高度低于海平面,我们把这样的面积用一个不解自明的复合术语"死谷"来标记它。某些死谷里还有水——通常是比海平面低,例如,这种面积集中在死海(满到 - 390 米)、黑海(- 28 米)和索尔顿湖(- 72 米)。其他的死谷是干的,像死谷(底深 - 86 米)或盖塔拉洼地(- 133 米)。还有一些模棱两可的情形——低地。

有关在海平面上死谷轮廓线以内投影面积的资料对我不适用。但是考察地图会暗示死谷的数量要比岛屿少一些。有关模型的论述都假定地球是平坦的,除了增加的布朗面—线地形,这种不对称性正是所希望的。岛屿和死谷的分布具有相同的指数意味着,第 10 个最大岛屿或湖泊的面积与第 20 个最大岛屿或湖泊的面积的比率几乎相同。但是柯尔恰克定律还包含一个"前因子" *F*,它规定第 10 个最大岛屿或湖泊面积的绝对值。对各种图形的比较检查显然表明,在由海洋包围大陆的情形(或者相反)对岛屿的前因子比对死谷的要大(或者相反)。而在布朗球—线模型内部,较少的面积(非洲长刀)比大的(美洲豹)切成更多的小片。

然而，前面的论述对湖泊没有告诉我们什么：若不是为了罕见和不相干的例外（例如接近于近海的面积被盐水渗漏所充满）死谷和湖泊是不同的概念，湖底的高度不必满足 $z<0$，而且湖面的高度不需要 $z=0$。更高的复杂性在于：大多数湖泊刚好满到上边缘，这是一个鞍点，然而此法则也有例外（例如，大盐湖和那些覆盖了上节列出的死谷之底的湖泊）。

盆地的概念

现在我们考察第二个湖泊的替代物，它以中性的几何学术语“盆地”来表示。

为了对此概念下定义，设想一种不渗透的情景，在其每个凹陷都精确地充满至边缘。一滴水为了从凹陷处出来，必须向上运动，然后再落下来。然而增加上来的这滴水，想象得到能够沿着一条永不往上，而只是水平或者向下的路径逃逸。每个凹陷有正面积，因此凹陷的数目可是有限的或无限的，但必是可数的。不妨假设不同的出口有不同的高度。在精确的出口海拔高度上，地形的轮廓线由一定数目的自回避圈加上一个带有自接触点的圈组成。稍高的海拔高度处，该自接触点消失了，而在稍低的海拔高度处，一个圈就分成相互套住的 2 个圈。

一旦充满，就把按上述构造的凹陷称为盆地。

魔鬼平台

现在假定地形是布朗模型，其 $0<H<1$。由于自相似性，个别的盆地组的面积无疑是按双曲型分布的，当 D 超过 2 不多时，面积的分布指数无疑接近于 1。

更特殊地，我猜测随机下落的一滴水几乎必然落入一个盆地。假如这个猜测是正确的，盆地的曲面就是在东南亚平台形区域的任意延伸，我把它们称为魔鬼平台。那些没有落入盆地的点就形

成了盆地的累积海岸线，相当于是树枝状的网，一种随机形式的谢尔宾斯基垫片。假如我的猜测错了，盆地的累积海岸线事实上是正的而不是零面积的(第 15 章)，我退一步的猜测是存在一个盆地，它任意地接近不在盆地内的每个点。

侵蚀的布朗模型:山脉和平原的混合物

现在我不可抗拒地被拉向修正我的布朗模型，即想象为布朗大陆的每个盆地 B_H 充满着泥土而构成一个平原。我们不需要以图形来描绘其构成的函数 B_H^*，因为在感兴趣的情形里，当 D 不超过 2 很多时，充满小盆地不会构成可观的差别。为了得到将要充满盆地的泥土，侵蚀必定逐渐把小山削平；但我们将看到(假如 D 不超过 2 很多)，不需要极其大量的泥土，因此假定小山的形状只稍有改变是很有用的。由于侵蚀而逐渐把鞍点(它使盆地挖空)填平的问题不能在这里讨论。

从本书的观点来看，提出修正的主要优点是，如果适当地选择海平面，在平坦地球上侵蚀的布朗地形仍然是标度的。这样的侵蚀对维数有什么影响呢？有证据说明，B_H^* 的维数位于 2 和 B_H 的维数$(3-H)$之间。

现在来论述当 $D=2+\epsilon$ 时，大陆体积的数量级为(大陆投影的典型长度)$^{2+H}\propto$(大陆面积)$^{1+H/2}$，以及一个盆地的体积相对于大陆是(盆地的相对面积)$^{1+H/2}$。因为相对面积是双曲分布的，其指数接近于 1，而且 Σ(相对面积)$=1$，由此导出 Σ(相对面积)$^{1+H/2}$相当地小。例外的情形是，最大的盆地极端地大，这种盆地不需填满泥土，就像大盐湖的情形。

河流和堤岸

在第 7 章起中心作用的一级近似里，我提出河流和堤岸形成了各种填满平面的树。实际上，此特征仅仅适用于地图；一旦引进

高度，河流和堤岸树之间的点的对称性就破坏了。的确，忽略湖泊后，在堤岸树上的点总是局部最大点（小山）或者鞍点（通道），而在河流树上的点永不会是局部最小或者鞍点。由于布朗和分数布朗模型确有局部最小量，这就推出它们没有河流树。这是对我的布朗模型的最新打击。

在填满盆地以后，就没有那种河流了，只有（无限浅的）湖泊的分支串，这使我们想起了那种带圆盘状分支的仙人掌，许多堤岸构成一棵树；我相信这是 $D<2$ 的一条分支曲线，但它可以是正面积的曲线，因为维数 $D=2$。各种各样的变化强加到它们身上，而且在更加合适的场合下被好好保存起来。

盆地的性质

为了透视在前节展望中提出的要求，首先考察一维的简化，即线—线分数布朗函数 $B_H(x)$。在此，一个岛屿不过是一个区间 $[x', x'']$，当 $x'<x<x''$ 时有 $B_H(x)>0$，而 $B_H(x')=B_H(x'')=0$。把 B 到达极大值的点记作 $x=x_0$（那种存在 n 个最大值点 x_0 的情形是零概率），而 $B_H^*(x)$ 的定义如下：

对于在 $[x', x_0]$ 中的 x，$B_H^*(x)=\max_{x'\leqslant u\leqslant x} B_H(x)$；

对于在 $[x_0, x'']$ 中的 x，$B_H^*(x)=\max_{x\leqslant u\leqslant x''} B_H(x)$。

从点 (x,z) 出发的小水滴找到（沿一条非上升路径）通向海洋之路的充要条件显然是 $z\geqslant B_H^*(x)$。那些满足 $B_H(x)<z<B_H^*(x)$ 的小水滴永远保持在盆地内，而 $z=B_H^*(x)$ 是当所有盆地已填满时的水平面。此函数 B^* 简直就是莱维魔鬼阶梯（图 31-2～4）从 x' 登上 x_0 之后，有一个从 x_0 下降到 x'' 的阶梯。它连续而不可微，而且，在一个长度为 0 的集合上变动，加在大陆最高点附近的任何水滴将通过与“白水”（即浅滩水——译者注）区域交替的平坦区域而重新回到海洋。

不能逃逸的小水滴充满于区域 $B_H(x)<z<B_H^*(x)$。该区域

是不连通的(因为它不包含 $B_H^* = B_H$ 的点),而它的连通部分是大陆的盆地。一个盆地的长度是在 $B_H^* - B_H$ 的两个连续零点之间的距离。因为它具有标度,它的分布是双曲的;当 $H = 1/2$ 时,已知它的指数为 1/2,而我相信其指数总是 H。把最长的盆地长度除以 $|t' - t''|$,当 H 接近于 0 时最大,而当 H 接近于 1 时最小。

现在回到在平坦地球上的布朗大陆 $B_H(x,y)$。$B_H(x,y)$ 再次由下列条件定义,即从高度为 $z > B_H^*(x,y)$ 出发的一个小水滴能沿着一条在上述大陆上的非上升的路径逃逸到海洋。像以前一样,满足 $B_H(x,y) < z < B_H^*(x,y)$ 的空间区域分解为连通开区域,它定义为盆地。

现在来把这些盆地与隔在两个平行墙 $y = 0$ 和 $y = \epsilon$ 之间的一层非常薄的大陆相比较。应用前面的记号 $B_H(x)$ 和 $B_H^*(x)$,$B_H^*(x)$ 的定义限制水逃逸到位于上述两墙之间的路径,而 $B_H^*(x, 0)$ 的定义容许相当宽地选择逃逸路径。由此得出几乎对于每个 x 有 $B_H^*(x,0) < B_H^*(x)$。因此,对函数 $B_H^*(x,0)$ 以及 $B_H^*(x,y)$ 的任一垂直截面比对 $B_H^*(x)$ 更感兴趣。他们如恶魔般地被平台化成具有(无限个)高峰的局部极大值和平坦局部极小值的奇异函数。假如我最强的猜测是成立的,后者就几乎覆盖了大陆的每个点。

因为盆地面积的总和至多等于大陆的面积,盆地能按递减面积排列,因此是可数的。结论就是相应于 z_0 的随机值 B_H 的海岸线几乎肯定没有二重点。

因此,所有盆地积累的边界由下法得到。取值为 z_m 的一个可数集——它几乎肯定没能包括那种海岸线含有一个圈的值,然后来检查海岸线,即从所有 $z_0 = z_m$ 中擦去死谷海岸线。

取检查过的海岸线的并,再加上其极限点,就是所要的边界。

对任意的 $M > 2$,向 M 维的 $x = \{x, \cdots, x_m\}$ 布朗函数的推广是直截了当的。给定 $B_H(x)$,已经对 $M = 2$ 用过的论证表明,B_H^* 和

B_H 之间的差，随着 M 的增加而减少。在极限情形里，即 $M=\infty$ 而 B_H 是希尔伯特空间的布朗函数，从莱维的经典结果得出 $B_H^*-B_H\equiv 0$。此恒等式对一切 $M>M_{crit}$ 而有 $M_{crit}<\infty$ 都成立吗？ ■

第 30 章　均匀湍流的等温曲面

本章的高潮是对图 2-1 和图 2-2、图 2-3 的解释。该内容主要是奉献给带有反持久性指数 $H<1/2$ 的三变量分数布朗函数的。$H=1/3$ 的情形受到特别重视，而 $H=1/2$ 再次起着出发点的作用。

湍流标量的等曲面

当一流体是湍流时，其等温曲面(其温度精确地是 45°F)在拓扑上是球面的集合。然而，在直观上很明显，此曲面比球面或欧氏几何中描述的任何实体的边界面都要远不规则。

这使我们想起了在第二章里引用的佩琳的话，它描述了在加盐的肥皂溶液中得到的胶状薄片的形状，这种类似性可以扩展到超过纯粹的几何学模拟。可以是这样，一薄片充满了其肥皂浓度超过某个阈值的区域，另外，此浓度起着对充分发展湍流的惯性指示器的作用。

不论怎样，胶状薄片的模拟表明，等温曲面近似于分形。我们希望知道是否真是这样，以及如果是真的，则要求计算其分维。为此，我们需要了解在流体里温度变化的分布。Corrsin 1959 d(许多作者之一)把此问题简化为一个柯尔莫哥罗夫等学者早在 40 年代就面临的经典问题。这些早期学者中，一部分已经取得巨大成就，而有一部分已经失败了。本书对这些经典结果的论述是考虑到一些非这方面的专家而插入的。

伯格斯 δ 方差

在第 21 章里，把 x 的 δ 方差定义为 x 增量的方差。伯格斯假定速度在两个给定点 P 和 $P_0 = P + \Delta P$ 之间的 δ 方差正比于 $|\Delta P|$。这个粗糙而简单的假设定义了伯格斯湍流。

伯格斯湍流函数的精确数学模型是带有下列无限个步骤的集合形成的泊松函数，这些步骤是由互相独立的随机变量的三个无限序列给出的方向、位置和强度所构成的。这种描述应大功告成。除了对 x 和 y 增加变量 z，以及用速度（三维的）代替高度（一维的），高斯的伯格斯函数就能用我的地球表面的普通布朗模型（已在第 28 章中描述）。

柯尔莫哥罗夫 δ 方差

作为湍流的模型，伯格斯 δ 方差具有致命的缺点，其最糟糕的是从标准的量纲分析看来这是不正确的。由柯尔莫哥罗夫以及同时代的奥布霍夫、翁萨格以及冯韦茨赛克尔提出的正确的量纲论述表明，对于 δ 方差只存在两种可能性：或者是普适的，也就是不管试验条件怎样，总是相同的；或者是可怕的紊乱。要成为普适的，δ 方差就必须正比于 $|\Delta P|^{2/3}$。它的推导可从许多著作中找到；而此结果的几何性质在 Birkhoff 1960 中有重点描述。

在开始有点怀疑以后，现在已经确定柯尔莫哥罗夫 δ 方差出奇地说明了在海洋、大气和一切大容器中的湍流。（见 Granf Stenart & Moillet 1959）这个证据表明了先验思想，对粗糙数据紊乱性抽象的重大胜利。它值得（虽有大量限制，在第 10 章加进了最新内容）让专家范围以外的人也知道。

具有柯尔莫哥罗夫 δ 方差的高斯函数也成功了，在所涉及到标量（一维的）温度的范围内，该高斯函数是一个分数布朗三维空间一线函数，其 $H = 1/3$。因此柯尔莫哥罗夫场包含了反持久性，

而地球的地形受益于持久性。更为基本的差别在于,当要求表达地球数据的 H 至今还只是现象学的时候,柯尔莫哥罗夫的 $H = 1/3$已在空间几何学中生根了。

在均匀湍流里,等曲面是分形(Mandelbrot 1975 f)

虽有前节预示 $H = 1/3$ 的胜利,柯尔莫哥罗夫方法有一条主要缺陷:在流体里速度差的分布或温度差的分布,除了它不能是高斯假定以外,仍然是未知的。

这种否定的结果是吓人的,但没有什么压力迫使放弃方便的假定。至多,湍流的学者们在研究高斯模型时必需谨慎;当一种计算产生逻辑上的不可能性时,他们就要放弃这种模型。否则他们就向前推进。

现在我们回到温度。特别地,Mandelbrot 1975 f 把高斯假定与伯格斯和柯尔莫哥罗夫 δ 方差结合在一起。我们能够希望:没有高斯假定时,其结论仍应保持正确,因为只用到连续性和自相似性。

在坐标为 x, y, z, T 的四维空间里,温度 T 定义为函数 $T = T(x, y, z)$,分数布朗函数的图形是 $4 - H$ 维的分形,而且它的许多低维截面都是我们已知的如下分形。

线的截面 对于固定的 x_0, y_0 和 T_0,这等温截面是由沿空间轴(其中某一个 T 值是所考察的)上的点所组成。他们构成分数的布朗零集,而分维是 $1 - H$。

平面的截面 对固定的 y_0 和 z_0,代表温度沿 x 轴变化的曲线是分数布朗线—线函数,其维数是 $2 - H$。对固定的 z_0 和 T_0,隐式方程 $T(z_0, x, y) = T_0$ 定义了平面上的等温线。这些等温线具有维数 $2 - H$。除了 D 值以外,他们等同于第 28 章所研究的海岸线。

空间的截面 对固定的 z_0,截面是维数为 $3 - H$ 的分形 $T(x, y, z_0)$的图形。对 $H = 1/2$,它与第 28 章的图形中所定义的布朗地

形相同。对于 $H=1/3$，是在同样图形中的分数布朗地形。

图 2-1 至图 2-3 的解释

对固定的 T_0，由隐式方程 $T(x,y,z)=T_0$ 所定义的等温曲面是海岸线在三维的推广，而且把我们引向一类具有 $D=3-H$ 的新分形。因此，$D=3-1/2$ 是高斯-伯格斯无持久性湍流，而 $D=3-1/3$是高斯-柯尔莫哥罗夫反持久性湍流。

这些曲面由图 2-2 和图 2-3 所说明，该图的由来终于被解释了。

为了对照起见，图 2-1 增加了持久性函数 $T(x,y,z)$的等温曲面，其 $H=0.75$。由于这种庞大的计算花费太大，不得不把曲面适度地光滑化。D 的不同对整个形状的影响没有想象的那样剧烈，这一事实已在图 28-6、图 28-7 中说明过了。

第十篇　随机孔洞;织物

第 31 章　区间孔洞;线性莱维尘埃

这几章在结构上有点儿互相牵扯。直至第 35 章说明如何能对织物进行控制以前,随机孔洞和织物这两个论题并不交会在一起。第 31 章引入了织物但未大量涉及孔洞;该章的内容本来也可以分散在前面几章里,但把它们集中在一起作统一处理更好些。

第 31 章至第 33 章不包含织物,但用孔洞的概念来构造随机分形,许多内容是新的。就像前面有关布朗运动的那几章一样,新的分形不依赖于时间和(/或)空间坐标网。

本章描述约束于线上的随机尘埃,把它们应用于最早在第 8 章中处理过的噪声问题。并作为推广到平面和空间这两种不同问题(分别在第 32 章和第 33 章中描述)时的基础。

第 32、33 章和第 35 章的主要实用目的,是帮助建立星团的模型。这是最早在第 9 章里叙述过的挑战性问题。

条件定常误差(Berger & Mandelbrot, 1963)

在第 8 章中,我们曾因找到了用康托尘埃作为某些附加噪声主要特性的一个合适的初步模型而大为高兴。但我们甚至没有试图真的把数据与模型相拟合。显然,这是因为预期这种拟合将是很糟糕的。对于任何我可以想象的不规则的自然现象,康托尘埃

作为一个精确的模型实在太规则了。特别是因为它们的自相似比局限于形式为 r^k 的值。此外,康托尘埃的原点不恰当地处于一个特殊地位,造成最糟糕的后果:使这个点集不能通过平移叠加到自身,用专门的术语来说,它不是平移不变的。

容易通过随机性来注入不规则性。就平移不变性而言,我们将对所希望的康托尘埃的替代物只要求在统计意义下与它的平移相合。在概率论的专门术语里,这就意味着该集合必须是定常的,或者至少满足一种适当减弱的定常性条件。

第 23 章提出了部分地实现这目标的一种简单方法,本章将再向前推进三步。第一步涉及间歇性的最早实际随机模型,Berger & Mandelbrot 1963 从尺度满足 $\varepsilon > 0$ 和 $\Omega < \infty$ 的康托尘埃的有限近似出发,随机地搞乱其中的间隙使它们相互间统计独立,但保持相继间隙间长度为 ε 的区间不变。第 8 章已经说明,在一个康托尘埃中,长度超过 u 的间隙的相对数量由近似于双曲线的阶梯形函数给出,随机化把这个函数重新解释为一个尾部概率分布 $Pr(U > u)$。

这样就产生了一个 $\varepsilon > 0$ 的随机康托尘埃。不幸的是,$Pr(U > u)$的阶梯带有 N 和 r 的初值的痕迹。这就是 Berger & Mandelbrot 1963 把这些阶梯光滑化的原因:把以 ε 为单位度量的相继间隙,取作统计上独立的整数 $\geqslant 1$,它们的长度分布是:$Pr(U > u) = u^{-D}$。

这个模型的拟合出奇地好:德国的电话产生 $D \approx 0.3$。许多作者对不同的通道进行了深入的研究,找到的 D 从 0.2 至接近于 1。

在 Berger & Mandelbrot 的模型里,相继间隙的持续时间是独立的,因此误差就构成了概率学家称为"更新的"或"递归的"过程(Feller, 1950),每个误差是个递归点,其中过去和未来是相互统计独立的,从而遵守与其他误差相同的法则。

线性莱维尘埃

不幸的是,把截尾的康托尘埃的间隙搞乱(并使其分布光滑化)所得到的集合仍然在几方面有欠缺:(a) 对附加噪声数据拟合的公式在细节上还不完美;(b) $\varepsilon > 0$ 的限制对物理学家是可以接受的,但从美学观点看是很讨厌的;(c) 这种构造是粗劣和任意的;(d) 它与康托原始构造的要旨相差太远。

Mandelbret 1965 c 利用出自保尔·莱维的集合,构造了一个较好的模型。它避免了缺点(a)和(b)。我把这个集合称为莱维尘埃。一旦确定了 D,莱维尘埃就是结合了两种所需性质的唯一点集,就像随机截尾的康托尘埃一样。若从这个集合中的一点看,过去与未来是独立的,像康托尘埃一样,它是一个自相似的分形。莱维尘埃比康托尘埃更好。以 0 与 1 之间的任何比值 r 的约化,与其自身在统计上等同。

第 25 章的布朗运动零集原来就是具有 $D = 1/2$ 的莱维尘埃。

不幸的是,莱维用以引入这个点集的方法没有消除上面列出的缺点(c)和(d)。但它在技巧上是很精微的:为了不用 u 是一个 $\geqslant 1$ 的整数的限制,我们必须设它是一个正实数,满足 $Pr(U > u) = u^{-D}$并延伸到 $u = 0$。因为 $0^{-D} = \infty$,总"概率"是无限的。用来消除这个似乎荒唐的含义的这种方法是重要和有意义的。但它在本书中并无其他用处。

幸运的是,如果我们采用 Mandelbrot 1972 z 中建议的更自然的"孔洞"构造,这些困难都将消失。

真实的和虚设的孔洞

在此我预先指出,借助于"真实的"和"虚设的"孔洞的组合来描述原始康托尘埃是有用的。我们仍从[0,1]出发,去掉它中间的三分之一(开区间)(1/3, 2/3)。以后,构造的实质保持相同,但描

述的形式有些变化。可以看出，在第二阶段中去掉了[0,1]的每个三分之一的中间三分之一，虽然去掉已经消失的三分之一的中间三分之一并无可察觉到的效果，但下面将要说明，采用这种虚设的孔洞是合适的。用同样方式去掉[0,1]的每个九分之一的中间三分之一，每个二十七分之一的中间三分之一，如此等等。注意长度超过 u 的孔洞的数量的分布现在由阶梯函数给出，它的总体性态现在正比于 u^{-1}，而不是 u^{-D}。对于不同的凝结规则，都有对 u 的同样依赖性，只是阶梯的位置和比例因子取决于构造方法。

区间孔洞和导致的间隙(Mandelbrot，1972 z)

随后，Mandelbrot，1972 z 通过把分布阶梯光滑化，以及随机而独立地选取诸孔洞的长度和位置，使康托构造随机化。最后，为了体现正比于 u^{-1}，要假定集中长度为 Δt 的区间、且本身的长度超过 u 的孔洞的数量的期望值为 $(1-D_*)\Delta t/u$，并满足一个泊松分布。记号 $1-D_*$ 的意义不久就会清楚。

由于相互独立，孔洞可以相交，而且它们喜欢这样：一个孔洞不与其他孔洞相交的概率是 0。换句话说，孔洞和间隙的概念不再相一致：术语间隙将用于表示由重叠的孔洞所造成的区间。这就产生了一个问题：还是所有的孔洞最终将结合成一个巨大的间隙，还是将留下一些点始终未被覆盖？我们将先陈述答案，然后在下一节里用一个直观的诞生过程的论证来证实它，并且说明那些未被覆盖住的点形成非强迫的群集。

考虑一个区间，它不能被长度超过 ε_0 的孔洞全部覆盖住，然后引进长度超过可变 ε 值的较小的孔洞，而 ε 从 ε_0 减小到 0。当 $D_* \leqslant 0$ 时，令 $\varepsilon \to 0$，将使得几乎一定(其概率趋于 1)没有不被覆盖的点。当 $0 < D_* < 1$ 时，同样的情形也可以发生，但它不再是几乎一定的了。甚至在极限情形下，一个未被覆盖的"孔洞分形"的存在也具有正概率。Mandelbrot 1972 z 证明了这是一个维数 $D = D_*$ 的莱维尘埃。

总之，$D=\max(D_*,0)$。

莱维尘埃的诞生过程和非强迫群集化

由第8章的构造，康托误差以级联状迸发或"群集"出现，群集的强度由指数 D 度量。当间隙被随机地搞乱时，这个性质仍然保持，但其证明既不清楚又无启发性。

与此相反，关于随机孔洞尘埃的同样结果的证明，则既简单而又极有意义。

再次指出，关键是由长度超过阈值 ε 的孔洞开始，然后用某个 $r<1$（例如 $r=1/3$）反复与 ε 相乘，从而使它的值趋于0。我们从一个无孔洞的中间间隙区间开始，这个区间的边界是两个"ε 间隙"、添加长度在 $\varepsilon/3$ 和 ε 之间的孔洞，有时会有消除一切的破坏性效果，但较柔和效果的出现也有相当大的概率：(a) 作为边界的 ε 间隙，延伸为较长的 $(\varepsilon/3)$ 间隙；(b) 在中间间隙里出现较小的附加 $(\varepsilon/3)$ 间隙。这个重新定义的中间间隙必然被理解为群集。用同样的方式，以 $\varepsilon/9,\cdots,3^{-n}\varepsilon$ 代替 $\varepsilon/3$，就得子群集。

当 $n\to\infty$ 时，这些群集的演化受到新的诞生和死亡过程的支配，就像在第23章中所用的经典理论那样。群集的死亡与增值，独立于具有同样 n 的其他集团以及它们的家族史。长的中间间隙消失的概率较短的间隙为小，且平均地产生较多的后代。当增加 $1-D_*$ 时，在 ε 间隙之间的区间变得较短，而且在 $(\varepsilon/3)$ 间隙之间的某些区间性将完全消失。因此，后代的期望值以两种方式减少，值 $D_*=0$ 是下述意义下的临界值：对 $D_*\leqslant 0$，家系几乎必定死光；而对 $D_*>0$，家系永远保持有正概率。

在伯杰和曼德布罗特模型中的平均误差

◁ 这个专题性插话打算说明，关于康托尘埃模型中相对误差的主要结果在随机化以后仍然成立。事实上，这些论证和结论是

相当简化了的，特别对于 $\omega=\infty$ 是如此。本论题通过实例，说明条件期望在自相似过程中的应用。

◁ 假设在区间$[0,R]$中至少存在一个误差，其中 R 值的范围是 $R\gg\eta$ 和 $R\ll\omega$。将此条件记作 $M(R)>0$，把伯杰和曼德布罗特的模型称为条件定常的理由是，如果$[t,t+d]$全部包含在$[0,R]$之内，则其误差的条件数（记作$\{M(t+d)-M(t)|M(R)>0\}$）具有一个独立于 t 的分布，因此只要讨论 $t=0$ 就足够了。还有，规定期望是可加的，只是条件定常性意味着

$$\langle M(d)>0|M(R)>0\rangle=(d/R)\langle M(R)|M(R)>0\rangle。$$

至于自相似性，这意味着

$$Pr\{M(d)>0|M(R)>0\}=(d/R)^{1-D^*},$$

其中 D^* 是由讨论过程确定的某个常数。为了证明这个论断，只要引入一个满足 $d<d'<R$ 的中间量 d'，然后把条件 Pr 分解为

$$Pr\{M(d)>0|M(d')>0\},\ Pr\{M(d')>0|M(R)>0\}。$$

联合最后的两个等式，我们得到

$$\langle M(d)|M(d)>0\rangle=(d/R)^{D^*}\langle M(R)|M(R)>0\rangle。$$

因此，把条件定常性和自相似性相组合，就足以证明

$$\langle M(d)|M(d)>0\rangle d^{-D^*}=\text{常数}。$$

对所研究的具体模型，确定其指数是 $D^*=D$。此外，只是自相似性就意味着比例

$$\{\text{第 1 次误差的时刻}|M(R)>0\}/R$$

和

$$\{M(R)|M(R)>0\}/\langle M(R)|M(R)>0\rangle$$

是随机变量，它依赖于 D 而与 R 和 ω 无关。

◁ 与条件概率相反，条件事件 $M(R)>0$ 的绝对概率极大地依赖于 ω。然而，如果对 $\omega<\infty$ 适当地进行截断，我们就找到

$$Pr\{M(R)>0\}=(R/\omega)^{1-D}。$$

因为最后一个表达式可由上节的表达式通过用 L 代替 R 和用 R 代替 d 导出。事件“$M(R)>0$ 推出 $L<\infty$”可像事件“$M(R)>0$

推出 $M(L)>0$"一样来处理。在极限情形 $\omega\to\infty$，$[0,R]$完全落在一个非常长的间隙中的概率趋于1，所以观察到误差的概率成为无限小。但以前导出的误差数的条件概率不受影响。

◁上述论证补充了第22章中关于条件宇宙学原理的讨论▶

■

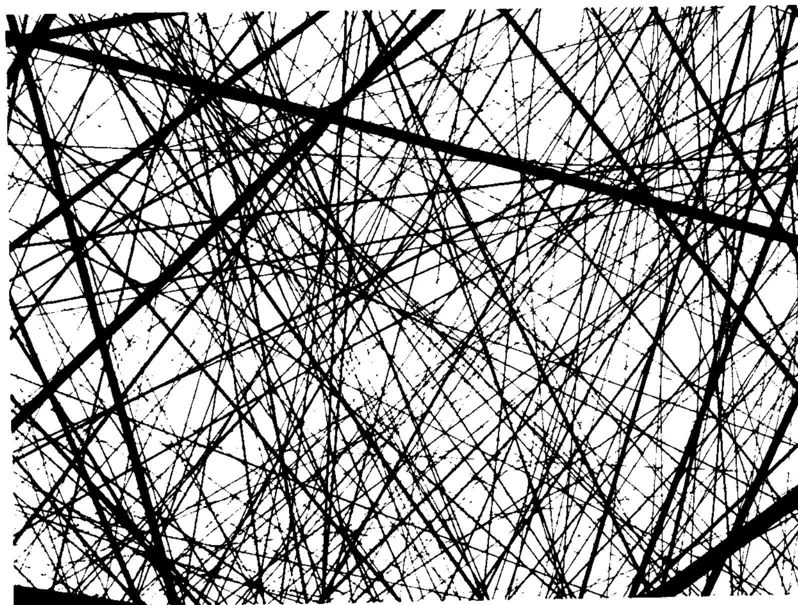


图 31-1　随机街道图样

本图就像第8章中所指出的，不幸的是，直接阐明康托尘埃十分艰难，然而可间接想象为三元科赫曲线与其基的交。用同样的方法可以间接地想象莱维尘埃。在此图中，像街道一样的黑色条纹是随机设置的，特别是在各个方向上取向的机会等同，其宽度遵循双曲线分布，迅速变窄而不能画出。白色的余集(即"住宅块")渐近地成为零面积的，其维数 D 小于2。

只要剩下的住宅块的维数 $D>1$，则它与任意直线的交集就是维数为 $D-1$ 的莱维尘埃。另一方面，如果 $D<1$，则交集几乎必定是空的。然而这个结果在这里并不十分明显，因为不能把构造进行得足够深入。

第33章将给出很好的说明，当从平面中扣去的是随机圆盘状的空洞，即

如图 33-1 至图 33-4 所示例的那样，孔洞分形与直线的交是莱维尘埃。■

图 31-2 ~ 图 31-4 保尔·莱维的魔鬼阶梯（维数为 1：竖直段横坐标的维数分别为 $D=9/10$，$D=3/10$ 以及 $D=0.6309$）

图注 这些图是图 8-5 上康托函数或魔鬼阶梯的随机化模拟物。图 31-4 中莱维阶梯的维数与原始康托集的相同，而图 31-2 和图 31-3 的维数不是小得多就是大得多。

为了描述莱维阶梯，把横坐标作为纵坐标的函数，在第一阶段，一旦纵坐标增加了量值 Δy（这里 $\Delta y=0.002$），横坐标值将按分布 $Pr(\Delta x > u)=u^{-D}$ 随机地增长。在第二阶段，把横坐标按比例放大或缩小，使阶梯终止于坐标点(1，1)。$D=0.3$ 的小阶梯看来减少到很少的几级，这是由于阶梯竖直段横坐标的群集化占了压倒优势。■

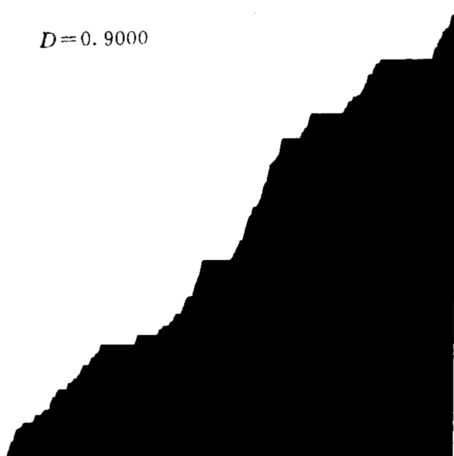


图 31-2

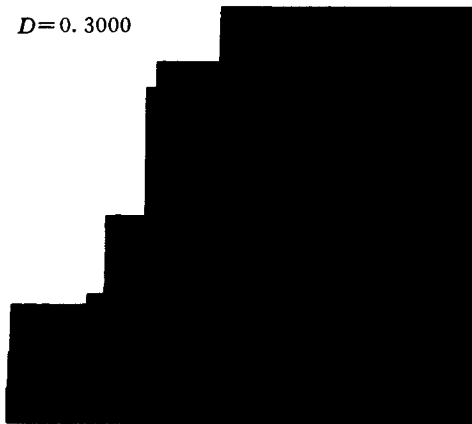


图 31-3

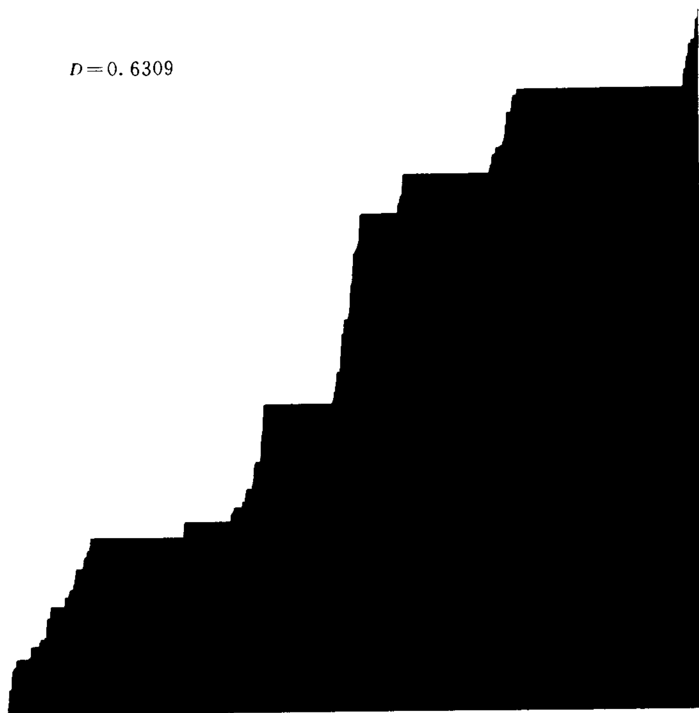


图 31-4

第 32 章　从属运算；空间莱维尘埃；有序星系

本章和下一章的中心议题是星团，这是已经在第 9、22 章和第 23 章涉及过的题目。基本方法是把上一章的尘埃推广到平面和空间。本章主要涉及空间莱维尘埃。遵照博赫纳，我们以"从属运算"方法通过"处理"布朗运动引入这些分形。在莱维尘埃的范畴内，我们还要遇到莱维飞行，即一种非标准的随机行走。本章从随机行走集团的非正式预告开始，然后阐明从属运算的意义，并由推广到非随机的情况来加以证实。预告中所作的断言，将在最后一节中论证。

预告：随机行走群集

我的早期星团模型的目的，是展示具有下列特性的质量分布：(a) 集中分布在一个球上的质量 $M(R)$ 满足 $M(R) \propto R^D$，且 $D < 2$；(b) 该分布在统计形式上满足条件宇宙学原理。

瑞利飞行中继站　从构造既没有分形维数也没有拓扑维数的星团开始。从空间一点 $\Pi(0)$ 出发，一支瑞利飞行火箭机会等同地随机跃向各个方向，每次飞跃的时间都是 $\Delta t = 1$，而到达下一个中继站 $\Pi(1)$ 的距离是满足 $\langle [\Pi(1) - \Pi(0)]^2 \rangle = 1$ 的随机高斯分布。然后火箭跃向 $\Pi(2)$，从而

$$U_1 = \Pi(1) - \Pi(0) \quad 和 \quad U_2 = \Pi(2) - \Pi(1)$$

是独立且等同分布的向量。如此等等。

为了看出火箭作无休止的飞跃，我们增加它前面的中继站 $\Pi(-1), \Pi(-2), \cdots$。但时间方向的改变并不影响随机行走，因此从 $\Pi(0)$ 开始画两条独立轨线就足够了。

火箭的轨迹(包括它飞跃时留下的“凝结尾流”)是一个随机集合,所以对所讨论的中继站集合未考虑它们到达的次序。当从任一点 $\Pi(t)$出发考虑时,两个集合有完全相同的分布。按第 22 章中引进的术语,这两个集合都满足适当统计形式的条件宇宙学原理。

载荷 对瑞利飞行的每个中继站随机地分配等同分布和统计独立的质量,并把条件定常性推广到质量。

维数 $D=2$ 众所周知,火箭在 k 次飞跃中所通过的距离与$\sqrt{k}$成正比。结果在半径为 R,圆心是 $\Pi(t)$的球内,中继站的数目是 $M(R)\propto R^2$。此公式中的指数与中继站 $\Pi(t)$集合的维数 $D=2$ 的想法相一致,特别是总体密度为 0。

布朗运动 在连续时间内插入瑞利飞行将得到布朗轨迹,它是 $D=2$ 的连续曲线(第 25 章)。这样,瑞利飞行模型实质上是分形曲线($D_T=1$ 和 $D=2$),且满足条件不是很强的宇宙学原理。这个讨论是令人满意的,但 D_T 和 D 的值是不可取的。

广义密度 如果我们在布朗轨迹的两点 $\Pi(t_0)$和 $\Pi(t)$之间载入质量 $\delta|t_0-t|$,质量 $M(R)$就是花费在半径为 R 的球内的时间与均匀广义密度δ 的乘积。

宇宙的膨胀 在标准的讨论中,初始分布具有均匀密度 δ。当宇宙均匀地膨胀时,δ 减小,但分布仍是均匀的。另一方面,通常总认为每种别的分布当膨胀时将发生改变。均匀地加载的布朗轨迹从构造上说明了这个结论是不正确的:δ 也随膨胀而改变,但它仍保持确定的和均匀的。

因此,不管我们的宇宙是否膨胀,都可以利用瑞利中继站。这个性质当通过利用莱维飞行来减少 D 时仍保持。对此,我们现在加以说明。

莱维飞行中继站;非整数维数 <2 我的星系分布的随机行走模型利用尘埃实现了任何想要的分形维数 $D<2$,而尘埃这个集合的准确拓扑维数为 $D_T=0$。为了达到这一目标,我应用了数学期望$\langle U^2(t)\rangle$为无限的随机行走。因为 U 是双曲随机变量,在 $u=1$

处具有内界限，因此对于 $u \leqslant 1$，有 $Pr(U>u)=1$，而对 $u>1$，$Pr(U>u) \propto u^{-D}$，其中 $0<D<2$。

一个重要的结果是当 $R \gg 1$ 时 $\langle M(R) \rangle \propto R^D$。这是我们已经提出实现的关系式，它允许实现可能在实践或理论中提出的任何维数。

◁ 关于莱维稳定性　当 $t \to \infty$ 时，留在时间间隔 t（适当地定尺度）的质量收敛于一个与 t 无关的随机变量，这是由保尔·莱维第一个研究的，最好称为“莱维稳定的”（第 39 章）。因此，对我的模型中隐含的过程，将应用术语“莱维飞行”。

◁ 由于 $\langle U^2 \rangle = \infty$，标准的中心极限定理不再有效，而要用一个特殊的中心极限定理来代替，这种替换有值得注意的后果。标准定理是“普适的”，即极限仅依赖于量 $\langle U \rangle$ 和 $\langle U^2 \rangle$，而非标准的定理不是普适的，$M(R)$ 的分布通过 D 明显地依赖于飞跃的分布。▶

本章的余下部分要构造一个尘埃，它对莱维飞行所起的作用与布朗运动对瑞利飞行所起的作用相同。直接的内插是冗长而烦琐的，因为需要给出把分布 $Pr(U>u)=u^{-D}$ 应用到发散的 $u=0$ 处的意义。与此相反，有一种既简单又精确的间接方法，即应用从属运算的过程，对这种过程有独立的兴趣，并启示了大量明显的推广。

柯西飞行和 $D=1$

我们通过一个例子来引进从属运算。为了从维数 $D=2$ 的布朗轨迹开始生成维数 $D=1$，我们必须试图把 D 减少 1。对欧几里得经典形状，容易实现这种减少。对于平面的情形，可取一段直线作截面。对三维空间，可取一个平面作截面。而对四维空间，可取一个三维空间作截面。我们在第 23 章就已看到，对随机分形凝乳有同样的规则，在第 25 章，布朗线—线函数的维数为 3/2，而它的零集和不垂直于 t 轴的所有截面的维数为 1/2。

作形式上相似的推广。这种把 D 减少 1 的方法导致我们猜

测,适当选择的布朗轨迹的截面典型地具有维数 2 - 1 = 1。这个猜测的确得到了证实(Feller 1971, p.348)。而且,应该把它推广到普通三维空间中轨迹的平面截面和四维空间(其坐标是 x,y,z 和"想象")中轨迹的三维截面。

从线至四维空间的一条布朗轨迹出发来研究"想象" = 0 的点,这些"非想象"点的位置可看作由基本布朗运动访问的次序产生的,而这些访问之间的距离是独立和各向同性的。其结果是,非想象点的位置可看作随机飞行的中继站,这种飞行的步调所遵循的法则与布朗运动十分不同,这种行走就称为柯西运动或柯西飞行。给定两个时刻 0 和 t,就可以找到从 $\Pi(0)$ 到 $\Pi(t)$ 向量的概率密度正比于下式

$$t^{-\epsilon}[1 + |\Pi(t) - \Pi(0)|^2 t^{-2}]^{-E/2}。$$

S.J.Taylor 1966,1967 中证实了形式上的类推猜想 $D = 1$,柯西飞行在图 32-5 到图 32-11 的一些图中说明。

从属运算的思想

再来考虑一下前面的构造。线到欧氏空间的布朗运动,当它的线—线坐标函数为 0 时,就到达非想象点。但每个坐标都是一维布朗运动。不仅(第 25 章)这个函数的零集形成一个维数 $D = \frac{1}{2}$ 的集合的事实,而且零之间的区间相互独立的事实,都意味着零集就是线性莱维尘埃。总之,柯西运动是一个线性莱维尘埃在布朗运动上的映射。请回忆十里抽一是古罗马人的一种很有效的方法,他们杀死逢十的人来惩罚敌对集团。我们看到,柯西运动是由"十里抽一"的分形形式得到的,这是 Bochner 1955 首先提出的,并称为**从属运算**(Feller 1971,包括分散的对此概念的非初等评论)。

为了今后参照,注意到有

$$D_{柯西轨迹} = D_{布朗轨迹} \times D_{布朗零集}。$$

从属运算可以推广到非随机分形

为了详细说明分形从属运算的性质，我们把它应用于科赫和皮亚诺分形曲线。（说来奇怪，现在的讨论似乎是在非随机情形对从属运算的首次提及。）

这个思想是这样的：保持起始器不变，但把发生器用它的子集代替，这样就能修改这些曲线。这就把被从属的极限分形集用从属子集来代替。我们首先来举一个例子，然后引入重要的维数相乘的法则。

D<2 的例子　取三元科赫曲线的四节发生器，如图 6–1。去掉第二和第三节，将导致经典的三元康托尘埃发生器，如图 8–1。因此，康托尘埃从属于雪花的三分之一。如果我们从科赫发生器的四节（$N=4$）中去掉第一和第三节，就形成一个不同的从属尘埃，它不是限制在一条直线上的。在两种情形，从属运算都把维数从 log 4/log 3 改为 log 2/log 3。如果仅去掉发生器的一节，则虽然从属尘埃的维数是 log 3/log 3 = 1，但它不是直线的一个子集。

D=2 的例子　取图 7–3 皮亚诺–蔡查罗曲线的四节的第二阶段，去掉第二和第三节，则新的发生器是[0,1]自身！因此，直线区间是皮亚诺–蔡查罗曲线的一个（最平凡的）从属。去掉不同的二节，可产生 $D=1$ 的分形尘埃。去掉一节，就剩下一个维数为 log 3/log 2的集合。

维数的乘法

从第 6 章和第 7 章看出，科赫和皮亚诺曲线可看作是时间参数 t 位于[0,1]区间的“运动”轨迹。通过一个例子来说明怎样定义时间。一个雪花发生器的四节被覆盖时刻的四进制展开式分别从 0,1,2,3 开始。例如，第三个四分之一的第二个四分之一被覆盖时刻的四进制展开式从 0.21 开始。把科赫曲线和皮亚诺曲线

看作运动,则它们本身就是[0,1]区间的“分形映射”。在这个范畴内,发生器各节第一次涉及的十里抽一效应是去掉包括数字1或2(或0和3)的 t 值。因此,极限 t 值属于[0,1]区间的某个康托尘埃。

因此,我们可以把科赫或皮亚诺曲线的从属子集描述为时间分形子集的分形映射。显然,这个子集就是康托尘埃,称为从属物,其维数是 $\log N/\log N' = \log 2/\log 4 = 1/2$。较为一般地,我们找到自明的关系式

$$D_{从属} = D_{被从属物} \times D_{从属物}。$$

这推广了表示柯西运动特征的关系式。我们知道,当研究截面相交时出现维数相加。现在我们发现了一种有趣的“微积分学”,它像给出了维数的和的意义那样,给出了维数的积的意义。

当然,与交集的余维数相加法则相类似,这个法则也有例外。

作为从属物的线性莱维尘埃

第31章的线性莱维尘埃是博赫纳使用的第一个从属。纯数学家们继续广泛地把它作为从属物,而相关的莱维阶梯就称为稳定的从属物函数。为了得到自相似的从属集,采用一个自相似的被从属物,例如布朗运动或分数的布朗运动。

注意到虽然布朗运动的内在维数为2,但限制在直线上的布朗运动的维数为1。因此,上一节的规律应换成

$$D_{从属} = \min\{E,\ 2 \times D_{从属物}\}。$$

较一般地,一个分数布朗运动的内在维数是 $1/H$,而

$$D_{从属} = \min\{E,\ D_{从属物}/H\}。$$

因此,从属集能充满的最大空间相应于 $E = (1/H)$ 的整数部分。

作为被从属物的布朗运动 最重要的被从属物是布朗轨迹。取值时刻限制于线性莱维尘埃(它的维数 $D/2$ 在0与1之间)的布朗映射是一个空间尘埃,它具有数值在0与2之间的任意维数,最好称它为空间莱维尘埃。

若保证从属物尘埃的间隙和被从属物的增量是两个统计独立量,则从属过程也有统计独立增量。若保证从属物的间隙长度满足 $Pr(W>w)=w^{-D/2}$,以及在延续量为 w 的间隙中布朗运动移动了相当于 $u=\sqrt{w}$ 量级的数值,则空间尘埃的间隙看来应满足 $Pr(U>u)=Pr(W>u^2)=u^{-D}$。可以证明这一点确实成立。

有序星团

公式 $Pr(U>u)=u^{-D}$ 表明,从属尘埃体现了本章开始时预告的过程。

维数 设尘埃本身的维数是 D,如果每个线性间隙端点的映射被区间所连接,我们就得到莱维轨迹:它的维数是 $\max\{1,D\}$——就像在第16章中对树的研究那样。

相关性 莱维轨迹在它产生的星系中导致一个线性次序,这蕴含着每个星系只与它的最近邻居相互作用,而且每对邻居的相互作用独立于其他对邻居。在这种意义下,一个莱维飞行相当于把不可解的 N 体问题未经证实就用许多二体问题的某种组合来代替。结果似乎完全不切实际,然而并非如此。Mandelbrot 1975 u (Peebles 1980, pp.243~249 有详细的描述)证明了莱维飞行导致天体星球上两点和三点的相关性,这与 P.J.E.Peebles & Groth 1975 通过曲线拟合得到的结果相同,见 Peebles 1980。 ■

图 32-1 作为艺术作品2号的计算机昆虫

本图可以部分地归结为计算机程序出错。该"故障"立即被查明和消除(当然只在输出被记录以后!)最终输出的就是图7-17。

由于关键处的一个小故障引起的变化,导致了我们完全想不到的东西。

显然,在图7-17里设计了非常严格的序,而这里这种序被消隐了,而且没有显示任何其他序。

这个图至少乍看起来可以当作高级艺术品。这个事实不是偶然的。Mandelbrot 1981 l 概述了我对此的想法,并在不久的将来将详细发表。 ■

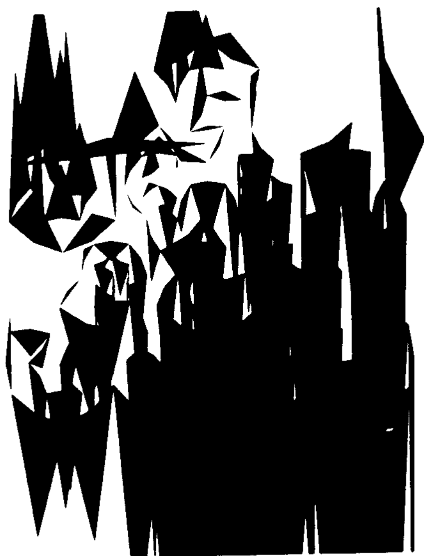


图 32-1

图 32-2 和图 32-3 及图 32-3

Mandelbrot 早期模型群集(维数为 $D=1.2600$),莱维飞行和它的中继站

粗略地说,莱维飞行是由中继站分隔开的一个飞跃序列。本章只对中继站有直接兴趣,但飞跃是这种构造的必要部分。

因此,这些图中顶上的(白底黑线)图包括实际飞行时形成的"凝结尾流",也是运动轨迹的一部分。在三维空间中的轨迹由它在两个相互垂直平面(可以想象为打开一半的书)上的投影来表示。

转到底下的(黑底白点)图,我们抹去了代表飞跃的区间,这样就得到了一张照相底片,每个中继站是一颗星、一个星系,或者是更一般的物质团。

更确切地说,顶上白底黑线图的直线区间具有下列特征:它们在空间的方向是随机的和各向同性的(即平行于从空间原点到在球面上随机选取的一点连线的向量)。不同的区间在统计上是独立的,其长度服从概率分布 $Pr(U>u)=u^{-D}$,只是当 $u<1$ 时 $P(U>u)=1$。值 $D=1.2600$ 接近于对真实星系所找到的 $D\approx1.23$。

绝大多数区间小到看不见。事实上,我们在平面上布置均匀网格,并对

包含有一个或多个中继站的胞作出标记。换句话说，每个点代表了整个微群集。

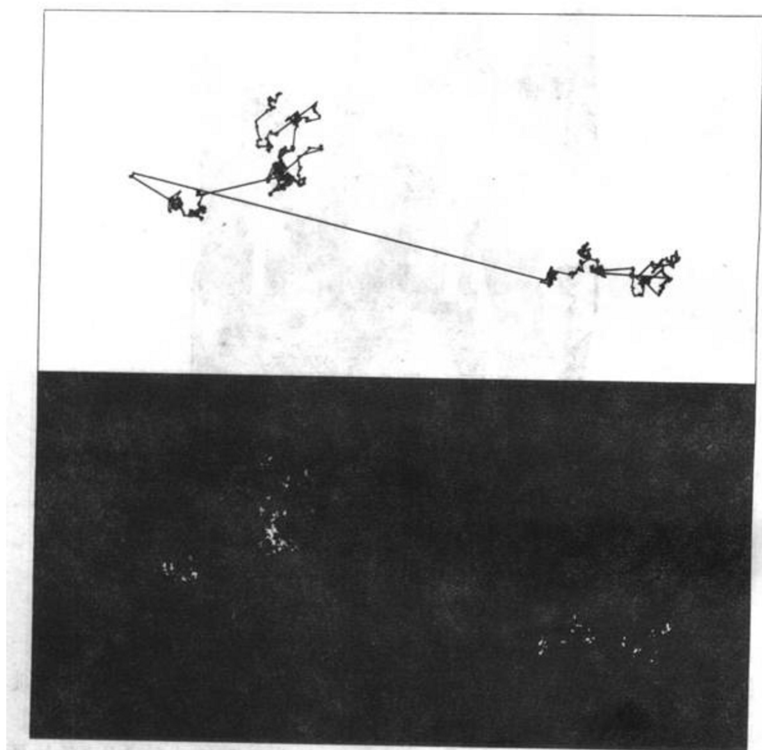


图 32-2

此外，不管 D 如何，微群集本身是成群的。它们显示出如此清晰的级联层次，从而难以相信，这个模型并未涉及明显的级联，而只是嵌入了自相似性。

所有这些图都表示了向前和向后两种不同飞跃的开始，并且这些飞行只是同一过程的两个统计独立的样品，这就给出了详细说明。显然，如果把原点移到某个别的中继站，这两个一半仍将是独立的。因此每一个中继站都有完全相同的理由自称为世界中心。这个特点是我在本书中提出的条件宇宙学原理的本质。

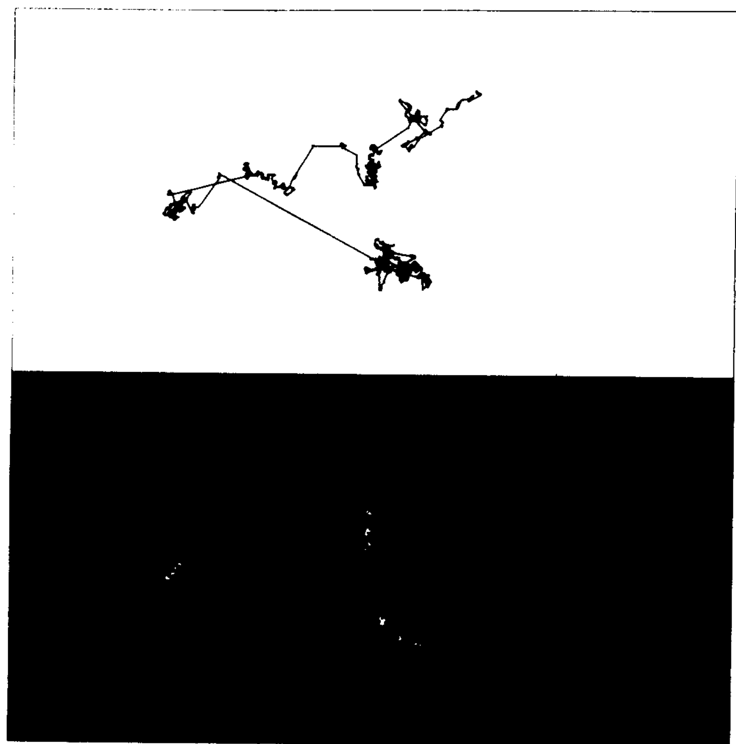


图 32-3

现在的方法并未声称考虑了星系的实际产生方式，而是回到我的论题上，即条件宇宙学原理与表面上的多层次群集化相容，甚至不引入用于"测量"的任何东西，就可以提出各种各样的位形。 ▬

图 32-4　非随机性从属：$D=1$ 的群集分形尘埃
从属于 $D=1.5$ 的科赫曲线

我们可以根据科赫构造来修改递推方法。有规律地中断直线而使之成为一个尘埃，它与直线有相同的维数 $D=1$，但在拓扑和表观上却完全不同。

设想有一条橡皮带，开始时沿着[0,1]放置，按照图6-11中所用的科赫发生器来产生一条维数为3/2的分形曲线，然后永久性地钉住这些角顶，并把橡皮带的8个直线区间全部都在其中点切开成为16段，每段的长度弹回到原长度的1/16，再钉住这些段的自由端，重复上面的过程，最终结果是一个自相似级联性群集形尘埃。$r=1/16$ 和 $N=16$，因此 $D=1$。

这种结构相当于允许我们对发生器的一节作标记，使它在科赫构造的下一阶段被去掉。这个过程在正文中称为从属运算。我们仅保留的一点，是科赫运动在属于分形维数 log 16/log 64 = 4/6 的子集时的位置。事实上，$(4/6)\times(3/2)=1$ 是正文中讨论的维数乘法规则的特例。

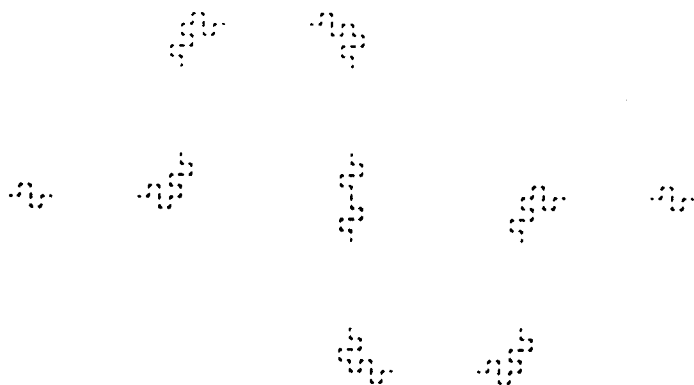


图 32-4

注意本图中所有的点，都按照科赫曲线（它的发生器是个子集）内部排序。此外，容易导出在相继钉死点之间回跳距离的频率分布。粗略地说，距离（$\geq u$）的数目正比于 $u^{-D}(D=1)$，图32-2和图32-3以不同方式应用了同样的频率分布。■

图 32-5 至图 32-11　通过从属运算使 D 减少制作的莱维群集越来越相互分离

一个平面莱维尘埃的群集化程度，取决于它的维数 D。这里通过对 $D=2$ 的平面布朗轨迹作处理，来说明这种效应。应用了相继的线性莱维从属运算，其中每一个都由其前一个决定。自始至终有 $D_{从属物}=2^{-1/6}=0.89$。因此

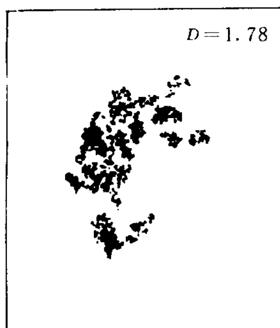


图 32-5

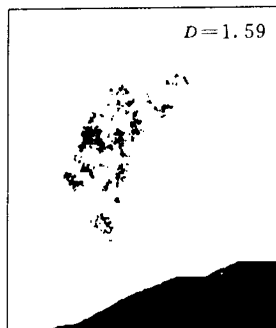


图 32-6

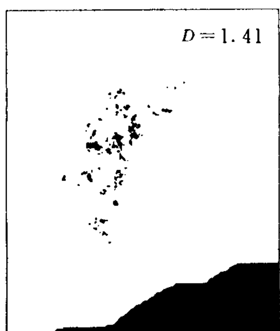


图 32-7

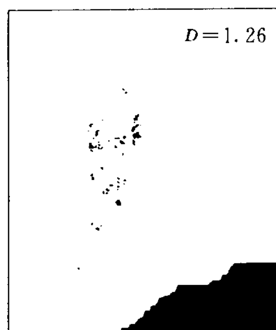


图 32-8

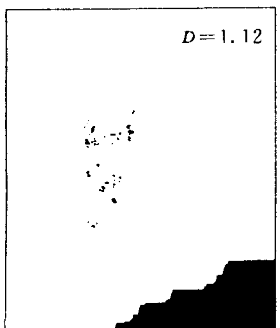


图 32-9

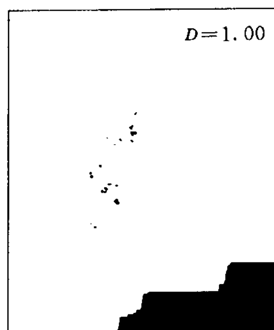


图 32-10

从属尘埃的维数是1.78(=2×0.89),1.59,1.41,1.26,1.12,1和0.89。在大多数尘埃下面的阶梯,显示出用多少次"十里抽一"从 $D=1.78$ 的尘埃产生这个尘埃。被从属物的一个"幽灵",即连续的布朗轨迹,当 D 接近2时显然能感觉到;而当 D 减少时,就越来越微弱了(见第35章)。群集化的增加,并非由于全部点集中在其中几个的附近,而是由于大多数点的消失,导致表观级联层次数目的增加。

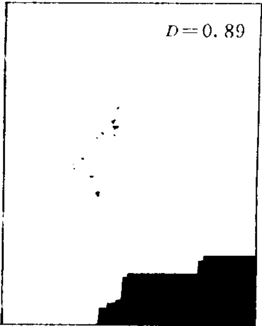


图 32-11

图 32-12 至图 32-16 放大 $D=1.2600$ 的莱维尘埃

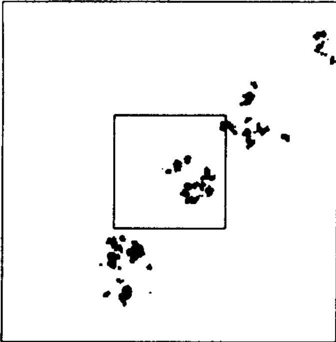


图 32-12

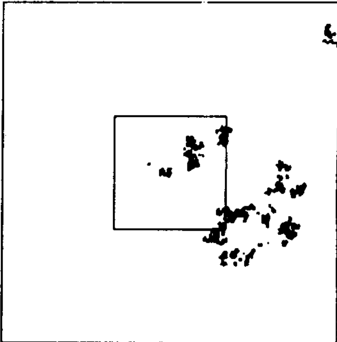


图 32-13

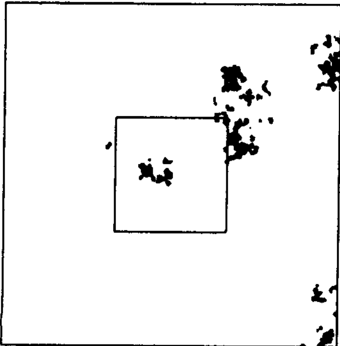


图 32-14

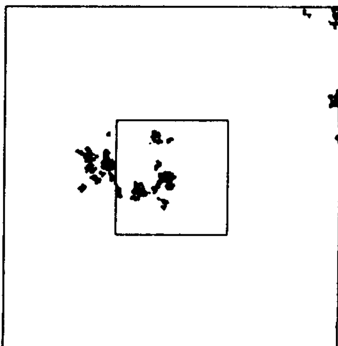


图 32-15

图 32-12 表示莱维运动的12,500,000个位置的一个群集,好像是在很远的宇宙飞船上从方窗口中看到的。从图 32-12 到图 32-16 接续的图中,从宇宙飞船到群集中心的距离和视野尺寸要除以 $b=3$。由窗口看到了结构的详细变化,但在主要方面保持不变。这是所期望的,因为这个点集是自相似的。 ■

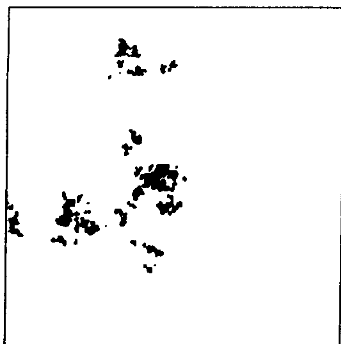


图 32-16

图 32-17 至图 32-21　环览 $D=1.3000$ 的莱维尘埃

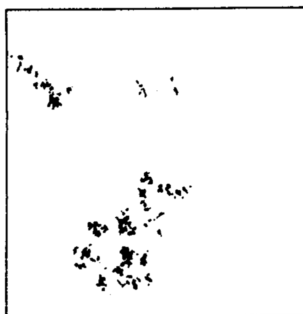


图 32-17

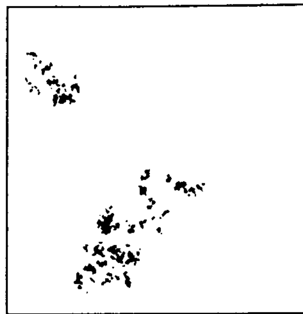


图 32-18

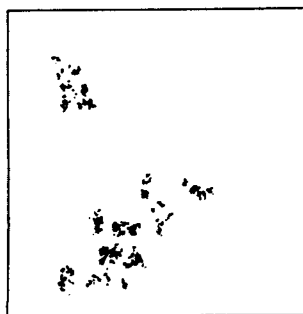


图 32-19

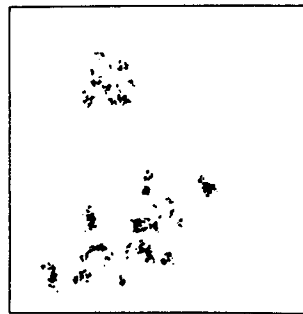


图 32-20

莱维飞行位置在平面所形成的群集形状具有极大的样本依赖性。就是说，如果我们在保持维数相同的条件下一再对群集模拟，就会得到许多种不同的形状。

对于小的孤立空间莱维群集，若从各种不同的方向进行观察，即对现在的5张“连环画”依次一张张看下去，也将有同样的结论。

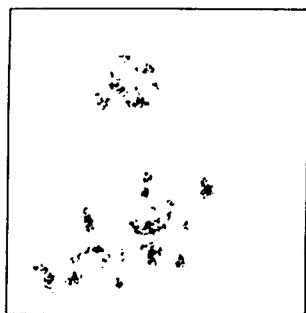


图 32-21

第 33 章 圆盘形和球形孔洞；月球火山口和星系

在第 31 章中，我们通过区间形随机孔洞，把线性莱维尘埃作为孔洞分形引入。在第 32 章中，又迅速转为通过从属运算过程，把该尘埃推广到平面和空间。而在本章和下一章，则要直接推广随机孔洞。

在本章中，平面和空间的孔洞是圆盘和球，因此这种推广直接与月亮火山口和陨星的形状有关。但是空间孔洞最重要的应用是特殊的，而且不太明显。当 D 接近于 1 时，一个孔洞分形就是一个尘埃，因此，星团代替莱维飞行中继站模型里的一个候选物。它与随机行走模型相比，其主要的不同是，现在的星系不是沿着一条轨迹排列的。因此增加了直觉的逼真感，导致损失了计算的方便性，并最终得到了吻合性：预测协方差性更接近于经验数据。在第 35 章中还将进一步改善非球形孔洞的吻合性。

平面和空间的孔洞

作为随机和交叠孔洞的基础，借助于虚设孔洞重新叙述在第 13 章和第 14 章中网格上的平面凝固。其第一个级联阶段是把 b^2 个正方形以外的，记作 N，把它们保留为凝乳。或者说，第一步是去掉 b^2-N 个正方形孔洞，而下一步则去掉 $b^2(b^2-N)$ 个 2 阶正方形孔洞。其中包括 $N(b^2-N)$ 个真实的新孔洞和 $(b^2-N)^2$ 个“虚孔洞”：它们再次删去了在第一阶段已经删去的某些东西，如此等等。

为了计算真实的和虚设的孔洞，我们发现面积超过 S 的孔洞数正比于 $1/S$。在三维空间，相对于凝结有相应的结果，即体积超过 V 的孔洞数正比于 $1/V$。

类似地，在本章和第 35 章的大部分内容涉及到这样的情形。其集中在一个边长为 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$，或 $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y$ 和 $\mathrm{d}z$ 的单元体内的独立孔洞数，是一个泊松随机变量，它的期望是

$$\langle Nr(\text{面积} > a)\rangle = (C/2a)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\langle Nr(\text{体积} > V)\rangle = (C/3V)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z。$$

在 $\mathbb{R}^E$ 中，相应的期望是

$$(C/E_V)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_E。$$

由于得到的孔洞集的分形性质就像在第 31 章中所处理的线性情形一样简单，当 $C<1$ 时这些性质可从线性情况的性质推出，而本书的前一版就猜测对一切 C 都成立，这在 E. Hélou 1978 中得到了证实。

当 $C>E$ 时，孔洞集几近必定是空的。当 $C<E$ 时，是一个维数为 $D=E-C$ 的分形。

关于孔洞分形的拓扑，一般原则表明，当 $D<1$ 时，孔洞集是 $D_T=0$ 的尘埃。另一方面，当 $D>1$ 时，一般原理不够了，其拓扑要由孔洞的形状来决定。这里产生了逾渗问题，在其他分形情形中也有。

月球火山口和圆盘孔洞

我们从未被覆盖的月球火山口的几何性质开始。这是一个简单的二维预习，是有趣的。希腊文 $\kappa\rho\alpha\tau\eta\rho$ 意味着一个碗或饮水容器。几乎所有的地球火山口都起源于火山的作用，但是一般都认为在地球和月亮、火星、木星的卫星 *Callisto* 以及其他的行星和它们的卫星上所观察到的火山口绝大多数是陨星碰撞而产生的。

陨星越大，由于碰撞而产生的火山口就越大越深。此外，由于后来的重陨星碰撞而引起的小火山口可"敲凹"老的大火山口的边

缘。至于其大小,存在确实的经验证据。就是在陨星碰撞的瞬时,火山口的面积服从双曲分布,面积超过 S km² 而且其中心位于 1km² 的方块以内的火山口数目可写作 C/S,其中 C 是常数。这个证据在 Marcus 1964,Arthur 1954 和 Hartmann 1977 中有讨论。

为了简化论证(不改变主要结果),我们把月球表面近似为平面,而把月球火山口近似为圆盘形孔洞。假定月球从统计上不变的环境中陆续不断地掘出陨星,则它表面上的每一点反复不断地被覆盖直到无穷次被覆盖。然而也可能每次都把火山口擦干净(譬如说,由于火山熔岩)在这种情况里在给定时刻未被覆盖的孔洞点集可能是非平凡的。或者,太阳系也可能是以这样一种形式发展的,即我们的月亮仅仅在有限的时间周期里被轰击。参量 C 可以度量,或者是自从火山口上一次磨损以来的时间,或者是轰击的总时间。

为了估计对孔洞分形的影响,让我们保持源不变,而使 C 变化。当 C 从 0 增加到 2,月亮表面日益饱和,而且前节所陈述的结果表明,对 $C \geqslant 2$, D 要减少直到 0。图 33-1 至图 33-4 阐述了孔洞分形对 D 的依赖性。

Appenzeller and Emmenthaler 当 C 非常小时,瑞士乳酪爱好者们可与我一起来想象,我们处理的形状类似于一片乳酪,其上几乎全刺有非常小的针孔。这是 Appenzeller 构造的粗略推论。当 C 增加时,我们逐步转到具有大重叠孔的 Emmenthaler 的粗略推论。

(因此,英国的摇篮曲中说,月亮是绿色奶酪做的,它除了颜色以外是正确的。)

临界 D' 的拓扑 上面两种乳酪推论必需称为"粗略"的,因为孔洞分形"乳酪片"没有面积。我作如下的猜想:只要 C 足够小,孔洞分形是一个 σ-丛,每个接触丛是与纤维相连的网,且具有拓扑维数 $D_T = 1$;当 D 到达某个临界维数 D_{crit} 时,D_T 的值降为 0,而 σ-网破裂成尘埃。

下一个临界维数是 $D = 0$。当 $C > 2$ 时,月亮表面是超饱和的,每个点几乎必定被至少一个火山口覆盖。特别是,假如月亮表

面从没擦清楚而且继续挖掘无穷尽的陨星。

非标度的火山口 与地球的月亮不同,某些行星的特征由火山口密度 $Ws^{-\gamma}(\gamma \neq 1)$来表示。由这些火山口引起的问题,在这一章的附录中处理。

星系和星系际的空洞,广义的球孔洞之路

当月亮的孔洞有一个像火山口那样独立地被承认的实体时,具有标度分布的球状孔洞开始作为同样几何方法对空间的自然推广。我想它们可以产生第32章的星系模型之一。于是,我假设联合了许多孔洞的星系空洞是存在的,而且可以延伸到非常大的尺寸,由此产生的模型的很好的符合性是十分惊奇的,并且需要进一步的理论(第35章)和实验。

协方差 因为统计学家和数学家相信相关性和谱,作为星系群集模型的孔洞分形的第一个试验将依赖于它们的相关性质。空间两点之间的协方差的确与我的随机行走模型中的相同,因为后者与数据符合得很好。在天空中,两个方位之间的协方差同样应该相同。在三和四方位之间预测的协方差比由随机行走模型所预测的更为吻合。但这样改善是很专门的,而且在别的地方讨论更好。基本上,一旦已知 D,各种模型给出相同的相关性。

现在再回想一下,包括布朗分形或分数布朗分形的高斯现象完全由协方差性质所表征。当它们是标度的,它们完全由 D 所表征。高斯现象为统计学家的思想所影响时,我们就企图不用协方差。但是,分形尘埃并不是高斯现象,其 D 不能确定关于它们的许多重要事实。

临界维数 比相关性更基本的问题是,孔洞分形是否具有正确的拓扑。为了作校核,最好就像前节一样,保持源不变而让 C 从0增加到3。只要 C 很小,那么 $D_T=2$,且我们的分形就是由树枝状幕所构成的。当 D 跨越某个值 D_{2crit}(称为上临界维数),该幕就撕裂成 $D=1$ 的丝。而当 D 跨越一个较小的值 D_{crit}(称为下界

维数)时,丝又破裂为 $D_T = 0$ 的尘埃。因为星团模型需要尘埃,验证 D_{crit} 超过观察到的 $D \approx 1.23$ 是十分重要的。我的计算机模拟证实了这个不等式。

逾渗 希望世界不比所需要的更复杂,故我相信,$D > D_{crit}$ 是在第 13 章描述意义下,孔洞分形到达逾渗的充要条件。

陨　　星

撞击地球的陨星的质量分布已被仔细地研究过。例如 Hawkins 1964。由石头组成的中等大小的陨星,在空间 1km^3 内包含了超过体积 $V\text{km}^3$ 的陨星大约为 $P(V) = 10^{-25}/V$。

这个论点通常用下列非常混合的单位作不同的表达。每年中,地球表面的每平方千米,平均停留其上的质量超过 m 克的陨星为 $0.186/m$。它们的平均密度是 3.4g cm^{-3}。在更加一致的单位下,这个关系可以简缩为:体积超过 $V\text{km}^3$ 的陨星是 $5.4 \times 10^{-17}/V$。此外,地球每 10^{-9} 年[这是绕太阳的地球轨道数量级(以千米为单位)的倒数]运动大约 1 千米。因此,用一致的单位并保持其数量级,则 5.4 成为 10。我们得到,当地球在空间移动 1 千米时,地球表面上每平方千米停留有体积超过 $V\text{km}^3$ 的陨星 $10^{-25}/V$。假定当地球扫过空间时与地球撞击的陨星是空间陨星分布的典型样本,我们就得到了已经断言的结果。

此 $10^{-25}/V$ 定律在形式上与月球火山口的 C/S 定律等同,但存在一个不同:火山口能够重叠,而陨星却不能。

然而,如果来看看下面的情形是有趣的:假如 $P(V) = 10^{-25}/V$ 而保持 $V = 0$,并且假如陨星是可以重叠的——乱想!那么将发生什么情况?不需要 *E*1 Hélou 1978 中的结果,由直线在空间随机地投射,与陨星的截面是些直线孔洞;而且能够证明,这些中心在 1 千米以内,长度超过 u 千米间隔的数目是 $C' 10^{-25}/u$(C' 是一个数量级为 1 的数值因子,在这里是不重要的)。因此第 32 章的结果表明,孔洞点集的直线截面的维数是 $1 - 10^{-25}$。当从直线截面

返回到全部填满的形状，就加 2，得到 $3-D=10^{-25}$。

这个结果是无意义的，因为它隐含特殊性，即甚至在容许重叠以后，陨星是接近填满空间的。然而，余维数 $3-D=10^{-25}$对其他情形是值得考虑的。让我们假设在第一次近似下 10^{-25}的关系式抑制在一个正界限 $\eta>0$ 下，而且不存在较小尺寸的陨星。我们所概述过的论点断言，如果我们真的都通过极限 $\eta\to 0$，全部陨星以外的点集将收敛于一个维数为 $D=3-10^{-25}$的孔洞集。很幸运，这个极限集可非常慢地获得，以至于在可观察的范围内容许陨星重叠而提不出问题。不幸的是，D 值没有什么实际的重要性。

附录：无标度的火山口

目前，月亮的火山口分布在现在的目的下最好写为 $Pr(A>a)=Fa^{-\gamma}$，而 $\gamma=1$。同样的 γ 对火星也是成立的。但对木星的卫星，得到了不同的 γ 值(Soderblom 1980)。类似地，对小体积陨星 $\gamma<1$，由此产生的孔洞集是无标度的。

$\gamma>1$ 的情形　在第一个无标度的情形里，对行星表面上任意给定的点，不管 W 值如何，几乎必然要落入无数的火山口中。其表面织物由小火山口绝对控制。木星的卫星 *Callisto* 就有这种织物，而且的确是以 $\gamma>1$ 为其特征的。在本书的第一版讨论时，还在旅行者号飞船航训以前，$\gamma>1$ 只是一种理论上的可能性。

$\gamma<1$ 而火山口面积是有界的情形　把界限记为 1，则留在所有火山口以外的点的概率是正的◁因为积分 $\int_0^1 Pr(A>a)da$ 是收敛的▶，但当 W 增加时它减少。由此产生的麻点状表面(甚至超过标度的情形)就是从前讲到的一薄片瑞士乳酪。γ 值越大，小孔的数目就越小，而产生的乳酪片就越薄。然而，不管 γ 值怎样，薄片具有正的面积，因此这是一个(非自相似的)二维点集。另一方面，我毫不怀疑它的拓扑维数是 1，这就意味着它是一个分形。

在空间(陨星)，此孔洞分形的维数是 $D=3$，而 $D_T=2$。 ■

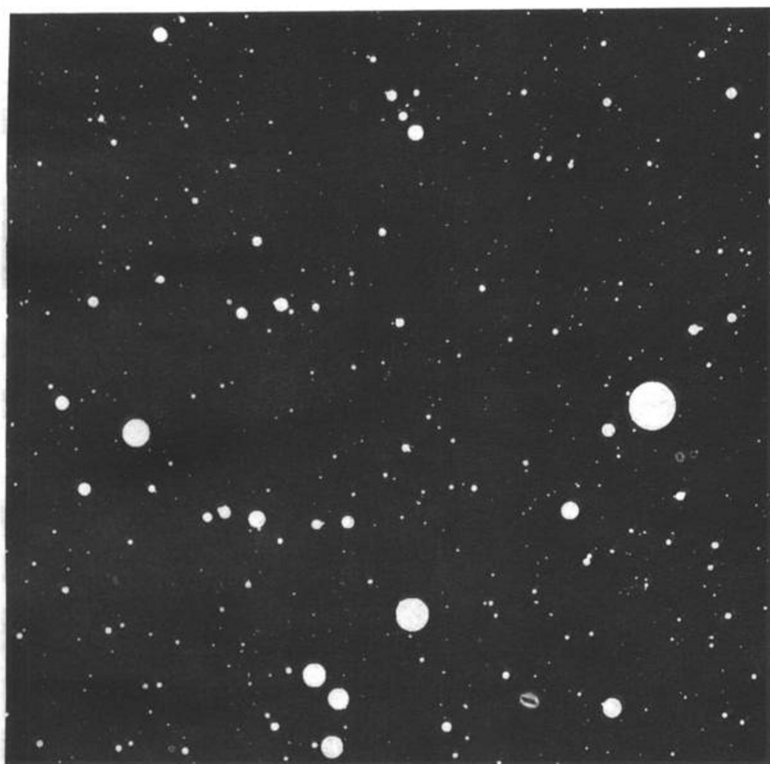


图 33-1

图 33-1 和图 33-2　稍小的有限孔洞（白色的）以及
随机“瑞士乳酪薄片”（维数分别是 $D=1.9900$ 和 $D=1.9000$）

此孔洞是白色的圆盘。它们的中心在平面上是随机分布的，对 ρ 阶圆盘，面积是 $K(2-D)/\rho$，然后把维数常数适当地选成满足课文中所描述的孔洞模型。图 33-1 表明了一种 Appenzeller，其中黑色部分的维数为 $D=1.9900$，而图 33-2 是一种 Emmen thaler，其黑色部分的维数是 $D=1.9000$。■

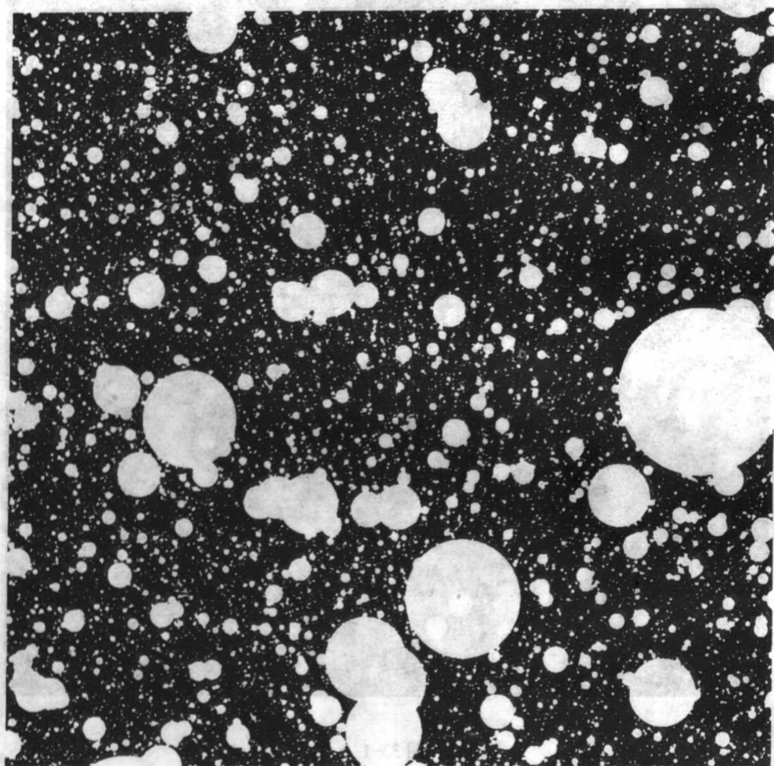


图 33-2

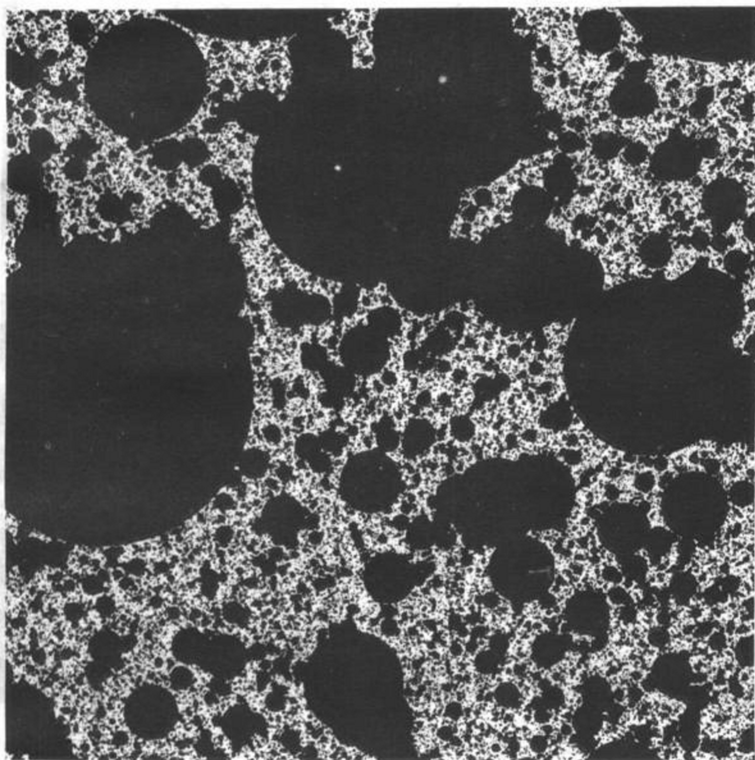


图 33-3

图 33-3 和图 33-4　较大的有界孔洞(黑色的)和

随机分叉的白色丝状物(维数为 $D=1.7500$ 和 $D=1.5000$

此结构出于图 33-2 和图 33-3,但是孔洞比较大,所以几乎任何东西都不可忽略,所以它们用黑色代表。D 是剩下的白色分形的维数。■

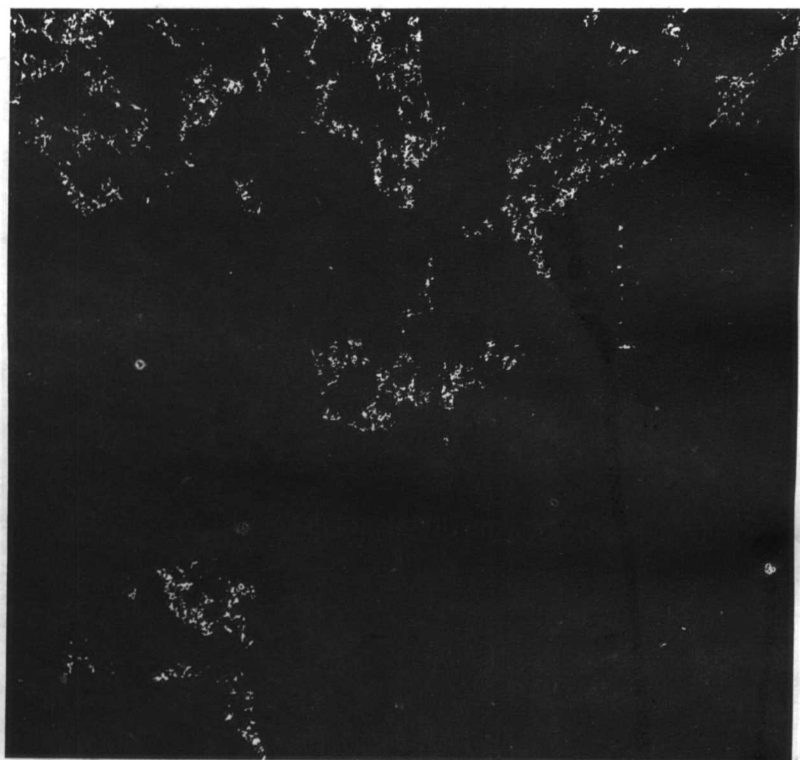


图 33-4

第 34 章　织物:间隙和腔隙;卷云和细孔

织物是一个难以理解的概念。数学家和科学家们都想回避它,因为他们对它捉摸不透。工程师和艺术家们无法回避这个概念,但几乎都没有掌握得使自己满意。然而,有许多迹象表明,织物的几个个别方面正在被定量地掌握。

事实上,大量的分形几何可认为就是对织物的一种隐含研究。在本章和下一章里,两个特定的方面将被明显地作研究,而且着重于星团。对织物的陈述可以分散在较早的第 18 章和第 19 章开始的一些章之间,但是看来把我对织物的注解收集在一起更好些(这是以中断讨论孔洞为代价的!)。

如同反复说明过的,寻找星团模型的工作是分阶段进行的。较早时,在第 32 章和第 33 章所描述的是寻找适合于在宇宙学条件下要求的 D,而在后面第 35 章所描述的是合适的织物。

本章的几段引论给出了关于星系的基本观察结果,以便区别织物的两种样子,称它们为腔隙和细孔,*lacuna*(与湖有关)是间隙的拉丁文,因此一个分形称为腔隙;如果它的间隙趋于很大,即包括大的区间(圆盘或球)。而一个细孔的分形"几乎"包括了容许逾渗的纤维;因为 *percdare* 在拉丁文中意味着"流遍"(第 13 章),则细孔(*sub-colare*)似乎是合适的新拉丁文,意为"几乎流遍"。

本章的其余部分引进了几个腔隙的尺度,而细孔的尺度超出了现在的初步讨论。

第 35 章将表明:通过孔洞,腔隙和细孔怎样被控制。

到现在为止,度量分形的主要法则是由拓扑维数和分形维数给出的。第 14 章是个例外(没有追踪),因为分支的阶注入了对分派到同样 D_T 值的 D 值的分形之间的精细的区别。我们遇到过许多不同的表达式,其形式为

$$前乘因子 \times (量)^{指数},$$

但至今只是讨论了式中的指数,研究织物就要迫使我们把注意力扩展到前乘因子。因为它永远不能被略去,我们不会惊奇,自然(科学)和人类的思想都不是简单的!

星系的"卷云形"纤维

1974年在巴黎,一个神秘的经验的发现,引起了我的注意。这是在我对第32章的所描述模型作第一次讲课以后。我的唯一目的已经达到,即一个分形所要求的 D 值(实际上,我还没有造出此术语分形)。但是在讨论时,一位不认识的天文学家指出,存在着一个进一步的,未被期望的,似乎是真的元素:由我的模型所产生的样本上,这些点似乎常常沿着几乎笔直的线落下,而更一般地似乎分散于沿着窄的"近乎小溪"或"近乎纤维"。这位不认识的天文学家告诉我,星系以均衡的较为清晰的形式共有这种性质。而且观察到的星系的"近乎小溪"更加接近于分得较细的"近乎小溪"。这位天文学家强调,小溪是非常不佳的术语,与所讨论的构造无关联。

为了避免专门术语上的混淆,我想起了这种被气象学家称为卷云的薄膜状羊毛似的云状物,并把星系具有卷云形结构归入资料档案,以及希望能改善模型使得卷云更加明显。

实际的参考文献出来太迟:Tombaugh 在1937年于英仙座超星系已观察到"卷云",而 de Vaucouleurs 于1950年在当地和南方超星系证实了它们。进一步的证实来自 Peterson 1974(涉及 Zwicky 目录),Joëveer, Einasto & Tago 1978,以及 Soneira 和 Peebles 1978(涉及 Lick 天文台,Shame 和 Wirtanen 目录;见 Peebles 1980)。

卷云形分形

显然,在非随机分形尘埃中卷云形结构能够,但不需要发现。

在第9章的傅尼埃模型中没有这种结构，那里产生了“块”集合。与此相反，取一个第14章的谢尔宾斯基地毯，并断开它的发生器，就能很快产生卷云。因为所引起的分形的维数在本质上能取任意的值，我们就得到了一个重要的观点，即卷云形没有维数的问题。然而，特别是内在的非随机的卷云太不自然了，以至不能引起注意。

这就表明，一个未被注意，但毫无问题的卷云形结构应表示在 D 足够接近于2的随机模型中，是值得注意的。

这就导致我们小心地检查其他的随机分形族，特别地，在第28章的图、彩图-8和彩图-9中可观察到一些即时的且有趣的形状，其中的群岛（许多岛屿似乎是连接的）常常是环形的且比块状的要多。

卷云在“几乎”逾渗的分形里被期望

图33-3和图33-4揭示出，一个明显的卷云结构由移动随机的圆盘状孔洞而从分形结构中呈现出来，就像第33章中，其维数接近于（但“稍稍低于”）临界逾渗维数 D_{crit} 也就足够了。在这种情形里，卷云形结构的原因是显然的。当我们审阅一系列分形时，让 D 减少而通过 D_{crit}，每一次都安置到它的前一个里。我们知道，拓扑维不连续地从1降到0，而这个不连续性是例外的：形状的大多数方面是连续地变化的。例如，以半径为 A 的球来代替每个点所得到的焦点失调的图画是连续的。这种图画不但当 $D > D_{crit}$ 时，而且当 $D_{crit} - D$ 为小的正数时，都像小溪似的。

观察到 D_{crit}，也可以说是为第32章的分形而定义的，但是它的值是退化的，等于 $\max D = 2$。

被观测到的星系腔隙

在许多聚有多数星系分布模型的小室里，第二种方案要出台

了。为了避免其他人不公正的(甚至当证实时)非难,来研究在第32章和第33章分析过的,我自己早期的两个模型之一。当 D 与测试值($D \approx 1.23$)相当时,在我的图上所显示的空间有限部分,粗粗一看是合理的。但全天空图是完全不正确的。它们的间隙包含了巨大的区域(天空的十分之一,或更大),这个区域在任意规定的距离以内完全没有星系。与这种荒凉相反,实际的图形(即处理过的 Lick 天文分图,Peebles 1980)除了好的标尺外,看来是十分均匀或是各向同性的。我说天空具有低的腔隙,而模型具有高的腔隙。

表观的宇宙学涵意 大约在1970年,这最后一种情形诱惑了我去错误地解释天空的容貌,这是因为 D 较 de Veucouleurs 1970 中建议的值 $D \approx 1.2$ 大得很多。至于谈到宇宙论家们,我们知道他们迷惑于一个均匀的宇宙,并且期望 $D=3$ 的均匀性超过一点外界限。他们可以急忙解释上面的错误,以支持这样的概念:具有 $D \approx 1.23$(更一般地,$D<3$)的分形仅适合于描述宇宙的一个小区域。

腔隙是一个不同于 D 的参数 我正要阐明,当修改觉察到的腔隙时,保持分形的 D 不变常常是可能的。其基本思想由图34-1和图34-2阐明,那里两个不同的谢尔宾斯基地毯有着相同的 D,而外表却非常不同。图34-1有比较大的间隙,不论在直观上还是按照我将提出的度量,它是更有腔隙的一个。

宇宙学的涵意 习惯上的推论,即觉察到的低腔隙度推出一个"小的"外界限 ω,也许是过于急促了。魔鬼的倡导者准备主张:以小尺度作为支持 $D \approx 1.23$ 的证据和以大尺度作为支持接近各向同性的标度证据,对于 $\omega=\infty$ 而设计的合适的分形模型是不相容的。要赢得这个论点,并不须证明 $\omega<\infty$ 是错误的,而只要阐明确定 ω 需要另外的注意事项和数据即可。

湍流的腔隙

外界限 ω 是小还是大的论点,也影响到湍流的研究。就像在

第10章中提到的，Richardson 1926宣布在大气中的ω是极大的，而当时大多数气象学家都认为它是小的。因此前节的大部分解释对湍流也有相当的。

现在对$\omega=\infty$还存在不多的口头上的强烈支持者，这个论点的敏感性对湍流要比对星系少，它将在后面的正文中作更好的讨论。

康托尘埃的腔隙

腔隙的概念（与准逾渗的概念相反）在直线上有意义，因此前几节的要求对线性尘埃大多数都很容易满足，我们回想起从第8章起，一个在[0,1]上的康托尘埃$\mathcal{C}$可以用许多不同的方法到达0到1之间（除去边界）任何给定的D，而这些结果不必相似。

情况是这样，即使$\mathcal{C}$是按照一个规定的数N（等于段数）作分解。的确，D和N决定了各段的公共长度$r=N^{-1/D}$，而不是各段在[0,1]内的位置。因此，同样的D和N值（因此r值）与显然不同的各段分布是相容的。

在一种极端情形，我们可以把这些分段分别地集中到接近0端和接近1端的两块。在中间留出一个大的间隙，它的相关长度$1-Nr=1-N^{1-1/D}$是非常接近于1的。已经看到一个例子，即图34-1左边的谢尔宾斯基垫片水平线当中的区域。在本质上，在0和1间的任何地方放置一个单独的大块都可达到同样的效果。

另一种极端情形，我们可用具有相同长度的$N-1$个间隙来分隔N个段，在图34-2的谢尔宾斯基垫片水平线当中的区域就是一个例子。当凝乳是随机的，就像第23章中的那样，间隙就接近于相同的长度。

当$N>>1$时，由第一种极端情形构造的成果看来像几个点，因此“仿制品”维数$D=0$；而第二种极端情形构造的成果看上去像一个“填满”的区间，因此仿制品维数是$D=1$。当然，只要为那$N-1$个间隔选一个合适的区间集合，区间的相对长度增加到$1-$

Nr,我们可以模仿 0 和 1 之间任何的 D。

两种极端情形的差别随 N、$1/r$ 和 b 而增加。从一个具有大的 N 但极小腔隙分形的容貌很难猜出分形的维数。然而,对小的 N 是很清晰的。因此,用只考察分形来猜 D 的游戏具有局限性。它不是无用的游戏(在前几章里我们仔细研究过它,是正确的),但对于星系它是使人迷惑的。

◁这个论点由一个专题来阐明,这个专题的必备知识"流放于"第 39 章。对一个非腔隙分形的查看揭示了相似性,我们将看到它的维数是 1,而不是它的豪斯多夫维数。在这种情形里,两个维数是不同的,而后者更好地体现了分形维数。▶

间隙与卷云作比较,对 $N >> 1$ 和 $D > 1$

当 $N >> 1$ 和 $D > 1$ 时,对发生器的合理选择能够产生下列四种后果之一:腔隙会不是高就是低,而卷云不是任意地接近于逾渗就是没有,因此,织物的两种式样在原则上是相互独立地变化的。

备择的腔隙度量

从我开始考察腔隙的短时间内,几个不同的处理方法证明了考察是有价值的。不幸的是我们必须不期望产生相互是单调函数的备择的度量,它们是被选为概括一条曲线形状的实数,因此他们含有"平均人"和"或然性变量的典型值"的意思。这个事实是很糟的,但不能改变(尽管许多统计学家们愿意为了维护他们的主张而去干一切),即典型值是固有的不确定性。

间隙分布的前乘因子

我们企图用最大间隙的相对长度来度量一个康托尘埃的腔隙度。交替地,在如图 34-1、图 34-2 那样的平面形状,腔隙趋于与孔

洞周长和它的面积平方根之比成相反的变化。但是一个更加有希望的度量从间隙大小的分布中推演出来。

从第 8 章知，一个康托尘埃的间隙长度满足 $Nr(U>u)\propto FV^{-D}$。在此意义下，$\log Nr(U>u)$（它看作 $\log u$ 的函数）具有规则的梯状图形。目前的讨论没有改变上述的结果，但是直到现在还没有重大意义的前乘因子 F，被提到了日程上。

我们必须面对这样一个事实，即 F 的定义带有任意性。例如，F 可以取作与阶梯的左端点或者右端点相连接，或是与它们的中点相连接的相关直线。很幸运，这种细节是不重要的。当腔隙向上时，我们看到任何合理合情地定义的前乘因子都向下。同样的结果对于与谢尔宾斯基地毯和分形泡沫相关的体积或面积标度因子也是成立的。在所有的情形里，腔隙增加是由于许多腔隙都倒入一个单个的较大的间隙里，这就造成了阶梯的图形滑向时钟 4:30的形状，比阶梯本身所有斜率 $-D/E$ 更为陡峭，这就是引起上面所讲的 F 减小的原因。

这样，我们看到，对于很广泛然而很特殊的分形类，它包括康托尘埃和谢尔宾斯基地毯，腔隙可以由 F 来度量，因此也就可以被定义了。

但这是一个局部有效的定义。当一块地毯中央的大装饰花在它的中心被一块较小地毯遮住时，这个定义也就被迫终止。因此我们需要另一个定义，最好对 F 由关系 $M(R)\propto R^{D}$ 的前乘因子（它更广泛有效）所代替。

腔隙作为与质量前乘因子有关的二阶效应

当一个分形不是递归地构造（例如是随机的）时就需要腔隙参加进来。本节和下节所描述的都是统计平均的，即使对非随机的康托尘埃也如此。

首先，考虑图 34-1 和图 34-2 的水平中央截面所得到的康托尘埃。取其中一个尘埃的总质量为 1，考虑长度为 $2R=2/7$ 的各

种子区间中的质量。在图 34-1 的例子,高贵腔隙,质量从 0 至 1/2 范围内广泛变动,而对图 34-2 的例子,低卑腔隙,质量只在离其平均值很近的范围内变化。不幸的是,正规的质量分布在康托尘埃的情形里变复杂了,最好,转换到完全随机的康托尘埃 $\mathscr{D}$ 的较简单的情形。

我们把 $\mathscr{D}$ 与[0,1]相交;把在该区间内的期望质量记作$\langle W\rangle$(这种记法的原因马上将揭开)。当在[0,1]内选一个小区间为$[t, t+2R]$,其中期望质量就应是 $2R\langle W\rangle$,但是如果我们去掉不感兴趣的没有质量的情形,期望质量就增加到$(2R)^D\langle W\rangle$,这个值依赖于 D,而不依赖于其他(这就表明我们的尘埃与[0,1]相交的概率是$(2R)^{1-D}$)。换句话说,质量本身作为 $W(2R)^D$ 出现,其中 W 是随机变量:它有时大有时小,但不管腔隙怎样,它的平均值等于$\langle W\rangle$。

现在我们来深入研究一下,看看 $W/\langle W\rangle-1$ 的实际值与 0 差多远。习惯上偏差的度量是二阶表达式$(W/\langle W\rangle-1)^2$ 的期望值,记作$\langle(W/\langle W\rangle-1)^2\rangle$。当腔隙直观地看上去像低下的,这二阶腔隙就是小的,而当直观看上去腔隙是高级的,就认为二阶腔隙是大的。因此$\langle(W/\langle W\rangle-1)^2\rangle$是腔隙定义的候选者。其他的,例如$\langle|W/\langle W\rangle-1|\rangle$也是很有诱惑的,但它们比均方更难估算。

总之,除了关系式"质量 $\propto R^D$"外,我们已经转移到逐个地注意质量对 R^D 比值的前乘因子。注意到腔隙概念与拓扑无关,而涉及与给定 D 的比较;对中间大小 D 的比较,它的可能用处还未研究。

腔隙作为与质量前乘因子有关的一阶效应

一种另外的处理腔隙的方法包含$[t,t+2R]$中的质量分布,当它的中点 $t+R$ 限制属于 $\mathscr{D}$ 时。这个条件就意味着$[t,t+2R]$与 $\mathscr{D}$ 相交,但它的逆不一定是真的:如果$[t,t+2R]$与 $\mathscr{D}$ 相交,中点 $t+R$ 不一定在 $\mathscr{D}$ 内。现在我们加在$[t,t+2R]$上的这个较严

的条件有一个较大的趋势,即去掉质量比平均值相当低的情况,因此引起了期望质量的增加。换句话说,以满足$\langle W^* \rangle > \langle W \rangle$的 W^* 代替 W。而比值$\langle W^* \rangle / \langle W \rangle$对大的腔隙 $\mathscr{D}$ 是大的,而对小的腔隙 $\mathscr{D}$ 是小的,因此我们找到了另一个腔隙的候选定义和度量:$\langle W^* \rangle / \langle W \rangle$。

跨接界限和腔隙

迄今为止所讨论的进入腔隙的途径都是内禀的,就是说不包含任何外部比较点。然而我们知道,许多物理系统包含有限的外界限 ω。这些系统也容许其他进入腔隙的途径,它们比前述的两个途径稍稍减少些一般性,但有极大的方便。

让我们真把 $\omega = \infty$ 的分形集 $\mathscr{D}$ 用一个分形集 $\mathscr{D}_\omega$ 来代替,这个 $\mathscr{D}$ 在标度低于 ω 上"像 $\mathscr{D}$",而在标度大于 ω 上是接近于均匀的。ω 的一个例子是跨接半径,那里星系分布从 $D < E = 3$ 变化到 $D = 3$。此跨接能存在而直到现在没有精确的定义,而且不再会有。这个思想是这样的,一个坐在 $\mathscr{D}$ 的一点上的观察者把 ω 看作最小块的尺寸,他必须调查研究以得到一个公正的总体思想,对于一个居民来说,低卑的腔隙世界看来应该迅速地成为均匀的,而高贵的腔隙世界看来应该极慢地成为均匀的。

第一个推动是写出

$$\langle M(B) \rangle = \alpha R^D, \qquad 对\ R \ll \omega$$

和

$$\langle M(R) \rangle = \beta R^E, \qquad 对\ R \gg \omega。$$

以及讨论了跨接出现于当 $\alpha R^D = \beta R^E$,即 $\omega^{E-D} = \alpha/\beta$ 时。

因此,

$$\langle M(R) \rangle = \alpha \omega^{D-E} R^E, \qquad 对\ R \gg \omega。$$

较小的变量选出的点使这两个式子有相等的导数。因此 $\omega^{*E-D} = D\alpha / E\beta$,当腔隙(即 α)增加而 β 和 D 保持不变时,ω 和 Λ^* 都增加。两者都是定义和度量腔隙的新的候选者。

修正的平移不变量

一条直线可在其自身滑动的事实被称为平移不变量。与此相反，第 22 章强调康托尘埃有个著名的不合要求的性质，即它们不是平移不变量。例如一个原始的尘埃 $\mathscr{C}$ 和它平移 1/3 后的甚至不相交。另一方面，$\mathscr{C}$ 和它平移 2/3 后的有一半 $\mathscr{C}$ 是公共的。

在最大腔隙的情形里，康托尘埃的 $N >> 1$。产生一个有意义的重叠的唯一的可容许的平移具有的长度接近于 1 或接近 0。另一方面，在最小腔隙的情形里，可容许平移的长度是（近似地）$1/N$ 的任意倍。

换句话说，为了适合康托尘埃，平移不变量必须被减弱，而当腔隙低卑很小时，我们能逃避较小减弱的惩罚。

第 22 章的结论是我们能把平移不变量和宇宙学原理推广到分形，只要使它们随机化以及在"有条件的"形式下重算不变量，这种重算提供了引进随机分形的主要原因。

从层状的到非层状的织物

本章使用了改变谢尔宾斯基地毯的细孔的过程，以及在康托尘埃和谢尔宾斯基地毯的腔隙包含了对非随机和较早随机分形的层特性的一种回答。这种方法是有用的，但人为化。特别地，对形如 r^k 的标度比的限制通过收缩自相似性的范围而获得了腔隙。对于 N 的高值（例如，$N = 10^{22}$，见图 12-4 上的图片说明），而相应地低的 r，层状就出现且显著。

这种控制细孔和腔隙的方法显然并不理想。因此很幸运，我发觉推广孔洞的方法能做得更好：由下章里讨论的更一般的形状来代替区间，圆盘和球。

无腔隙分形

一个分形可以没有腔隙，就像在第 39 章开头所表明的。

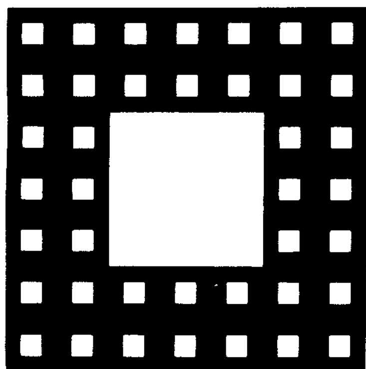


图 34-1

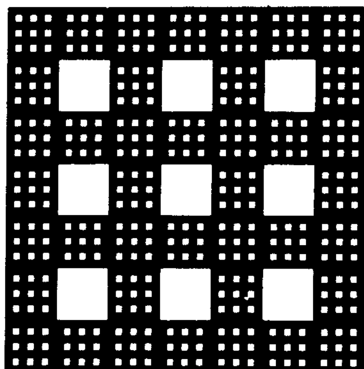


图 34-2

图 34-1 和图 34-2　地毯的腔隙

考虑用发生器(如图 34-3)构造的谢尔宾斯基地毯。

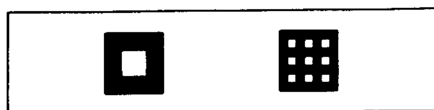


图 34-3

两个发生器都满足 $b = 1/r = 7$ 以及 $N = 40$，因此 $D \approx 1.8957$。$N = 40$ 的事实也许不显然，但考察了以下几个阶段以后就明白了，如同以上放大 7 倍以后的图形所示。

显然，在两种情形里的 D 是相同的，这一点并不很明显，因为被下面的事实遮住了，即左边的地毯给人一种一定具有大的间隙的印象，也就是有更多的腔隙(腔隙 = 孔，间隙)。第 34 章提出几个另外的方法来抵消这种印象。

维数 $D \approx 1.8957$ 异常地接近于伯努利逾渗(第 13 章末)的维数。但是这种相似性是要使人误解的，因为这两种情形的拓扑是非常不同的。▶

第35章　一般的孔洞以及织物的控制

按照本书的方法，第31和第33章通过以区间、圆盘和球为基础的最简单的例子介绍了孔洞分形。这些结果变得令人满意，但是使用更一般的孔洞会带来了更大的财富库。

的确，El Hélou (1978)证实了一个孔洞分形的维数完全由孔洞长度(面积或体积)的分布所确定。但在第34章引进了细孔和腔隙以后，D是分形的唯一数值参数的时期就结束了。在这一章里要表明这些特征是怎样受孔洞形状的影响的。另外，此情况研究所要求的与几何学提供的异乎寻常地相符合。

从细孔的观点，孔洞的形状影响到D_{crit}，因此对于给定的D，它影响到差$D-D_{crit}$的符号和数值。

从腔隙的观点，在较早几章获得的最简单的改善如下所述。在线性孔洞分形(第31章)的情形里，莱维尘埃是最多孔的，而任何较少的腔隙度都可由取许多区间的并作为孔洞而简单又自然地获得。在由第33章直接得到的空间孔洞分形的情况中，最简单的是把除圆盘或圆球以外的每一个孔洞都取东西。在从属于布朗运动或分数布朗运动的空间孔洞分形的情形(第32章)中，最简单的是把一个比莱维尘埃少些腔隙的分形尘埃取作从属运算器。

不幸的是，(书稿的)最后期限快要到了，这是所写的本篇的最后一章，而涉及孔洞分形的争论要作大量的修改才能使之合适地写入本书，因此本章必定是很简略的。

孔洞发生器；各向同性

用于前面引言的术语孔洞形状包含有孔洞发生器的意义，当然，术语发生器已在前几章中用过了。我们回想起，康托和科赫模

型的手杖发生器,以及谢尔宾斯基模型的孔洞发生器既决定了分形的形状又决定了它们的 D。与此相反,这里的孔洞发生器决定除 D 以外的一切东西。

非随机孔洞发生器 这是一个开集,在这开集中挑选任意一个点作为它的中心,而开集的长度(分别地,面积或体积)等于 2(分别地,π 或 $4\pi/3$)。这些孔洞是重新标度的发生器,它们的位置和大小是随机的,具有与第 31 和第 33 章里同样的分布。

例如,在 $E=1$ 的情形,具有长度超过 τ 及中心在长为 Δt 的区间的孔洞数目延续成为期望是 $(E-D_*)\Delta t/\tau$ 的泊松随机变量。而在 El Hélou 1978 已证明,对孔洞发生器的形状作适当限制的假设下可以应用维数的公式 $D=\max(D_*,0)$(这些限制假设是内在的还是由于证明方法的问题是值得研究的)。

发生器的界限 因为孔洞结构的哲学目标是从局部的相互影响创建出总体的结构,所以很明显,它包括了孔洞是局部的,即有界的假设。而无界的孔洞会带来有趣的意外。一个更加广义的孔洞模型展现于图 31-1。

间隙的定义 一个间隙不再是孔洞的并,而是孔洞最大开单元的并。

非随机各向同性 因为发生器是各向同性的,我们必能选到原点,使发生器是那样一些点的集合,即从原点到该点的距离落在某些正的实直线的集合内(通常是规定区间的集合)。这种各向同性的情况是最简单的,而且大多数已被彻底研究。

然而,不包括各向异性的情形。特别,我们看到一个分形尘埃能够做成关于过去或未来是不对称的。

随机孔洞发生器 这是一个长度(面积或体积)等于 1 的,局部或完全的随机集。对 El Hélou 1978 理论适用性的仔细校核受到欢迎。

随机性的最低标准在于能从产生随机集的过程中挑选到一个单个的样本,以及把全部孔洞做成与该样本相同(直至位移和大小也相同)。再一个有用的随机性标准是增加一个为每个孔洞独立

选择的随机转动。甚至更为一般地,可用从产生随机集的过程中取独立的样本的方法得到孔洞。这个样本集不需要全部都有同样的体积,因为当改变大小时体积是不变的。然后这个改变了大小的样本被转动。可以想象有不独立的旋转或样本,但至今我还没有用到。

随机各向同性 在上面第一个选择中,各向同性要求样本是旋转不变量。在第二个选择中,旋转样本必须是均匀分布的。而在第三步中,仅要求过程是旋转不变量。

层状 前面的定义容许孔洞的长度(面积、体积)是分层的,即局限于 r^k 形的值。但是这要混淆了层状和没有层状的一般孔洞形状的不同效果。

通过一般孔洞分形的 D_{crit} 来控制细孔

第 34 章的一节表明,如果一个分形"几乎是"逾渗的,就是说,如果它属于已经定义好 D_{crit} 的族,而且如果它的 D 低于 D_{crit}"仅仅一点儿",则就期望有一个卷云形结构。换句话说,如果模型包含有 D 和 D_{crit} 作为参数,则 D 和卷云形结构的强度刚好相一致。

在孔洞分形里,参数是实数 D 和详细说明孔洞发生器的一个函数。让我证明,D_{crit} 是上述泛函参数的一个函数:它能任意地接近 E,而如果 $E>2$,就可使 D_{crit} 任意地接近 1。

D_{crit} 任意接近 E 的情形 把一个任意细针,或有固定形状及各向同性方位轴的平整的煎饼作为发生器就足够了(图 35-1,2)。为了证明在平面($E=2$)里这个论断,注意到,给定一个任意的 $D<2$,孔洞中心,大小和方向就都可由检查发生器的均匀性来选定。下一步研究一个边长为 L 的方块,并再把孔洞分为 3 个区域:面积低于 $\pi L^2/10$ 和超过 $\pi\eta^2$ 的中间区域,一个高区域和一个低区域。当 D 超过相对于圆盘状孔洞的 D_{crit} 很多以及孔洞仅仅是弄平的圆盘时,这种状况就像第 33 章中的一样:中间区域的孔洞大部分形成由一个高连通集围绕的离散的小孔。但是如果孔洞几乎弄

平成直线，那么它们几乎一定把我们的方块切为小的不连通的多边形。弄平低区域孔洞的附加效果仅仅是进一步切这些多边形。增加高区域孔洞能消去我们的方块，或者把它分割为片，或者单独保留它。当方块被单独留下时，它能不再逾渗。换句话说，已证明了弄平孔洞能迫使 D_{crit} 大于任何规定的 $D<2$。

对 $E>2$ 的推广很显然。

对 $E\geqslant 2$ 有同样的效果，也能推广到 $E=1$，只要把包含在一个半径适当地超过 1 的球（或球面）和一个适当地小的球（或球面）之间的区域取作孔洞发生器。

D_{crit} 任意接近 1 的情形　一个直觉的论据提出，当 $E\geqslant 3$ 以及孔洞几乎是针状时，D_{crit} 将任意地接近于 1 的。

通过一般孔洞分形的 L 来控制腔隙

第 34 章的一节阐明了我们如何控制孔洞长度是层状的腔隙。现在让我们插入一句话（不详述），即通过孔洞发生器可获得同样目的。我们集中注意力到腔隙的度量，这在第 34 章的最末提到过，并且包括了一个外界限 ω。

事实上，我们首先再深入一步，并且通过把孔洞的线性尺度强制位于 $\varepsilon>0$ 和 $\Lambda<\infty$ 之间而执行了双重界限。

容易看到，任意挑选一个点，一直进行到最后截留的孔洞分形具有概率 $(\varepsilon/\Lambda)^{E-D}$。下一步在该点集上以密度 ε^{D-E} 散布质量。我们发现第 34 章的前乘因子 $\beta=\alpha\omega^{D-E}$ 成为 Λ^{D-E}，执行途径 $\varepsilon\to 0$ 是合适的，表达式仍然对 $\varepsilon=0$ 成立，因此 $\omega=\Lambda\alpha^{1/(E-D)}$（如果 ω 是通过变异定义确定的，$\omega=\Lambda\alpha^{1/E-D}(D/E)^{1/E-D}$）。

余下的要求 α 的值。我们发现它依赖于孔洞发生器的整体形状。当发生器是一个区间（圆盘、球）时，α 取到最大值，并能取任意低的值。阈值 ω 也是相应地低的。

当孔洞包含在半径为 $\alpha>>1$ 和 $\beta>>1$ 的两个同心球之间时，结果就非常简单：$\omega\propto 1/\alpha$。

这样，安排$\langle M(R)\rangle$是可能的，因此，对质量分布的协方差来说，任意快地转到在渐近区域的行为，意味着在大于 ω 而分离出的两点上的密度实际上成为独立的。

这是奇怪的，通过 α 的减少而腔隙减少能够由扩展发生器来完成。我们宁愿期望不断地扩展的发生器导致前渐近区域大小的增加。这个事实再次指出$\langle M(R)\rangle$的性态，因而质量分布相对协方差的性态，给出了集合结构的偏视图。$M(R)$的高次矩带有大量的附加信息，但我们不能在此多停留了。

在从属于布朗轨道的尘埃里控制腔隙

一旦我们控制了一个线性尘埃的腔隙，就能通过第 32 章所确定的从属运算的过程，把这结果变换到空间。研究平方的情形并且把像图 25-3 中一样的一个布朗网用作从属运算，我们能够获得一个尘埃，它任意地接近在外表上本身成为类似于网，以及具有的分支无限阶分支。从 $E=2$ 开始，设被从属的是一个具有 $H>1/2$ 的分数布朗网，它的间隙小于 $H=\frac{1}{2}$时的间隙。另外，当从属运算器的维数满足 $D/H<E=2$，以及从属运算器具有低腔隙，就能使从属看上去任意地接近填满平面。当 $E=3$ 和 $H=1/2$，被从属的是一条填满空间曲线。当 $D/H<E$ 以及从属者具有低腔隙时，那么不管怎样的 D，从属运算的尘埃能做成填满空间为低腔隙度，就像我们所希望的一样。■

图 35-1 和图 35-2　孔洞发生器在孔洞分形腔隙上的效果

这两张插图应该给出了这样一种思想，即孔洞发生器的形状对腔隙有影响。当两个孔洞发生器是菱形状时，一张几乎是方块，另一张是尖针，孤立的小的黑色菱形在白色的背景中显示出来。

两个结构包含有同样的参数 D 及对最小和最大菱形有同样的面积。我们能够阐明：在这两种情形里白色的剩余部分有着同样的面积（除了统计变化率外）。然而，从图上显然可看出，一张白色的剩余部分扩展出的比另一张

要多得多。我引入的腔隙度量把系数值太低的腔隙归因于剩余部分扩展得较多。■

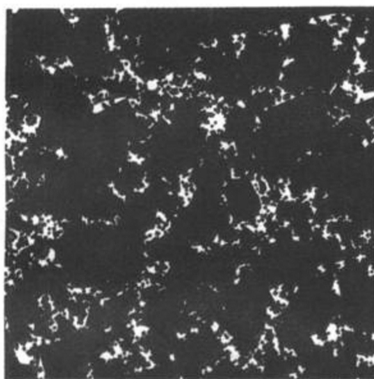


图 35-1

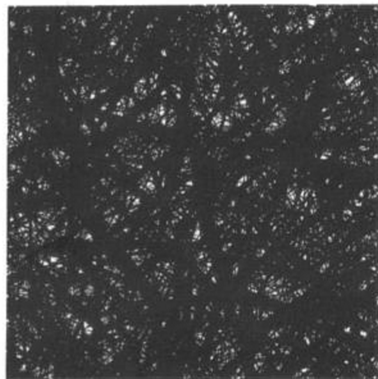


图 35-2

图 35-4　当孔洞是非球形时得到的分形尘埃：一个挂限在球形天空上的投影

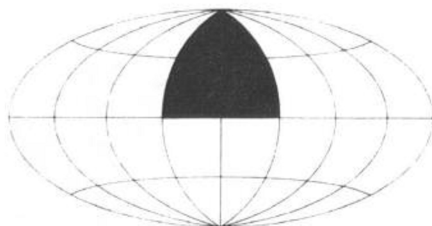


图 35-3

因为一个非常令人为难的原因，不仅没有打算使设黑点成为此插图，而且这个图的正确说明我也没注意到。的确，$D\approx1.23$ 的分形图例，以及正在变化并且被控制的腔隙和细孔的程度，已经由我们在 1979 年 1 月 1 日前后大量地产生了，但是包括了大量输出的文件被放错了地方（或丢失了），而极少的准备性资料因存放在其他贴着文不对题的标记的文件中才得以幸存下来。由于没有时间恢复这个程序，我只能说明什么是可行的。

我记起来，从周期模式开始计算，其周期是 600^3 个立方点阵。换句话说，计算在 600^3 点阵上执行，设点阵的对立面等同于创建一个环面。孔洞体积的分布被截断。孔洞正在被移动，其原点被移到一个不再移动的点，这个

点可以是任意选定的或者是从高密度区域中挑选出来的。

没有画出接近于原点的那些点，而其他的点都归入由 $R^2 < x^2 + y^2 + z^2 < R_2{}^2$(它相当于减少亮度的区域)所定义的球壳中。每个壳被投影到天球上。

目的是要处理有效的数据，以便提炼出最多的独立信息。对于小的 R_2，我们能映射整个天空，而对于大的 R_2，当超过原始周期模式中一个周期某适当分数(倍)时我们必须不去处理。当映射局限于天空的单个卦限内(例如 $x>0, y>0, z>0$ 的区域)时，最外层壳的 R_2 值是最大的。在球坐标下，我们可以定义这个卦限对应于纬度为正(北半球)且经度在 $-45°$ 至 $45°$ 之间的区域。这里用了哈默投影，该卦限映射在"哥特式的尖顶窗"上，如图 35-4。

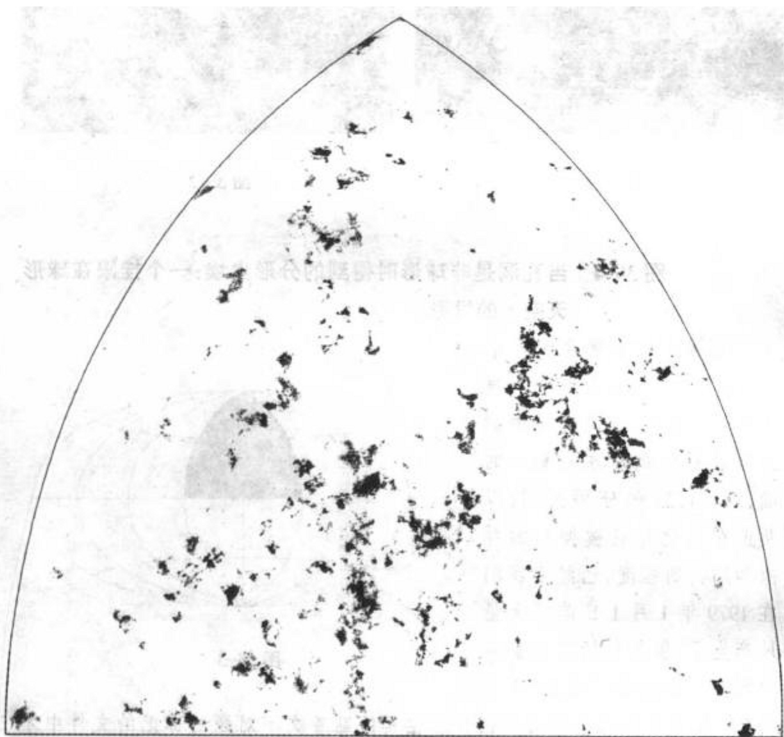


图 35-4

当 R_2 到达 600，三个竖直面邻域里的数据成为静态依赖的，而对垂直面底部邻近最好别管。在这种情况，大于 $R_2=600$ 的数据，以及接近于 $x=z=$

$0, y=600$ 和 $y=z=0, x=600$ 的数据为了避免由周期性引起的统计依赖性的任务而牺牲了。另一方面,为了绘制对极区 $x<0, y<0, z<0$,即南纬和经度 θ 满足 $|\theta-180°|<45°$,不必作新颖的计算,而其输出可以看出与被看作为提供附加信息是极其不同的。

在过程的最后一个阶段,意味着要消去原始立方点阵的迹,每个点沿着其坐标均布于[0,1]的向量移动。不幸的是,这个过程产生了具有各种黑色度的实心灰色区域,它曲解了在下面的分形:我们看到的是被弄平滑的很大不均匀性很大区域的过时版本。

现在的图 35-4, $R_2=600$, 而 $R_1=R_2/1.5$, 因此其大小位于宽为 $2.5\ \log_{10}(1.5)^2 \approx 0.88$ 的窄区域内。

Mandelbrot 1980 b 中之图 7,表明了另一个分形尘埃(也设完全标记),它是经过 f 孔洞的不同选择而获得的。

第十一篇　其他

第 36 章　统计点阵物理学中的分形逻辑

从分形观点看来，物理学中的大部分问题与其他领域提出的并没有什么两样，因此我们把对物理学的研究分散在本书的各部分，只有一小部分要放在本章讨论。

然而，有些读者可能从本章的内容开始阅读本书了，因为标题中包含了“物理学”一词。我要奉劝这些读者仔细阅读索引，但首先我要提醒他们注意到下列在物理学中广泛研究的情形并没有写入章的标题。

第 13 章和第 14 章包含对逾渗的研究。

第 18 章中的阿波罗尼“肥皂”是一种半晶状的液晶。

织物(第 34 章和第 35 章)在不远的将来必定会找到许多物理上的新应用。

最后，有一些参考文献很有意义。术语“分离分形”(*diffractals*)是在 Berry 1979 中创造的，它表示由分形曲面反射的波，或者由一片透明材料(它具有像分形那样波动的折射指数)所折射的波。分离分形是一种新的波动状态，用它测定的结构的精细程度是几何光学永远办不到的。贝利测算了它们的某些明显性质。

Berry 1978 计算了分形鼓(共振器，它的边界是一种分形)模型的分布。

论两类收敛性

现在进入本章的内容。围绕着分散在前面的标题，一个非常重要的问题被忽略了，或者被扫到地毯下去了。在许多物理领域里，构造数学分形的基本步骤在原则上都不可能。

作为一个前奏，我们回想起本书的大部分是致力于那些含有递归内插的分形，它们或者根据定义或者至少先有一个明显的构造方法。每一个构造阶段从几何上的标准形状开始(例如一条折线状的“奇怪折线”)，以后就对它作内插。该分形就是这些奇怪折线的极限，在此意义下此奇怪折线和此极限的距离(定义为把通常的点之间距离作适当推广)趋于 0。这种极限被数学家们称为“强”收敛。

与此相反，出现在统计范围里的其他极限称为“弱的”(或“模糊的”)。这两类极限之间的差别(就像通常所提到的)细如毫毛。但是弱收敛的理论渗透到各种情形(包括老的和新的)，其中随机分形进入了“点阵物理学”，它被认为是目前统计物理学中的一种实践。

这里的讨论要依赖于物理学中某些崭新分形例子和点阵水文学(它具有相同类型)的一个重要问题。

随机行走的分形极限

作为前奏，我们注意到弱收敛在布朗运动方面的作用。就像在第 25 章中简短地提到过的那样，在点阵上(例如，在其坐标是整数的点上)的一个随机行走可以是“下行的”(当在上行走时)，直至点阵的步长成为肉眼看不见，因此其可观测的效果可以忽略。

众所周知，这个过程就“生成”布朗运动，但是这里的术语“生成”有着新的含义。在第 6 章中用于生成科赫曲线的奇怪折线序列就像画一幅图，通过急剧的调焦不断地增加图上的细部。与此

相反，一个下行的随机行走序列在周围转来转去，起先似乎离某布朗运动的距离很小，以后又接近于不同的布朗运动，再后却接近于另一个，如此等等，……始终稳定不下来。对于数学家来说，有充分的理由以弱的或模糊的收敛性来描述这种过程。也有充分的理由把一个有限地下行的随机行走看作具有内界限等于点阵间隔的分形曲线。但是这是一类新颖的界限，在以前各章里，一个内界限被叠加（当定义了几何构造以后，而这种构造在理论上不包含内界限），而且能够内插到无穷小尺度而生成分形。相反，不存在内插随机行走的方法。

“点阵物理学”中的分形

前面的描述已经超出了布朗运动的范围。的确，统计物理有足够的理由，以模拟约束一个点阵来代替它所面对的许多实际问题。因此，我们可以把大量的统计物理学问题描述为由“点阵物理”的一部分所组成。

就像在我的早期版本中所指出的、许多作者已确认的那样，点阵物理中充满着分形或者准分形。前者是参数空间中的形状，例如在图 8-5 的说明中所讲到的魔鬼阶梯；而后者是实空间中的形状，它不是分形，因为可以想象它们不能细分到无限小，但在中间范围内是类似于分形的，而大尺度范围内的性质就是分形的。在第 13 章和第 14 章中，当我们处理伯努利逾渗时就遇到过一个著名例子。

不用说，我完全确信，这些形状的不断缩小就弱收敛于分形极限。第 13 章和第 14 章的论证就基于此。物理学家们发现这是很有说服力的，尽管就我所知只有布朗运动的情形，它适合于完全的数学证明。这样，我倾向于把这些具有假定的分形极限的非分形形状作为点阵分形。在本章的稍后，将讨论大量增加的例子。

一个有关但不同的推断是，真实问题，点阵物理学是不太大的简化包括有相同（或近于相同）分形。在马上要研究的聚合物情形

里，斯特普尔顿、爱伦、弗林、斯汀生和柯兹（Stinson & Kurtz 1980）支持这些推断。

局部相互作用/全局有序

点阵物理学有一个很有吸引力的发现应当广为传播，即在某些条件下，纯粹的局部相互作用能迅速增长而影响到全局效果。举个基础性的例子，在相邻旋转物之间的相互作用能产生在手中有感觉的磁力。

我们能够企望，我以分数布朗分形所描述的现象也将有一天会如此来阐述。

一个虚构的例子

我们来描述一个例子，它不同于有序物理机理中的基本方法，但它的优点是简单以及把我们带回到熟悉的分形谢尔宾斯基垫片（第 14 章）作为说明弱极限的例子。以具有整数值坐标的点来代替旋转，因此当为偶数次（相应地，奇数次）时，它们位于偶数（相应地，奇数）点上。其改变规则是，在时刻 t 和位置 n 的旋转 $S(t, n)$，当 $S(t-1, n-1)$ 与 $S(t-1, n+1)$ 相同时取为 -1，否则就取 $+1$。

用这样的方法以 -1 覆盖的均匀直线，旋转是左不变的。现在我们来看一下在 $n=0$ 和 $t=0$ 时引进“杂质” $+1$ 以后的效应。旋转 $S(1, n)$ 除了 $n=-1$ 和 $n=+1$ 以外都是 -1，以后的形状如下图（第 400 页）：

许多读者能认出，在奇数值二项式系数位置上由记号“+”所组成的是帕斯卡三角形，此完全的帕斯卡三角形的第 t 条线是由二项式 $(a+b)^t$ 展开的系数给出。

读过第 14 章后都知道，如果我们把每个记号“+”与它邻近的记号“+”相连接，我们就得到一幅与谢尔宾斯基垫片（Rose 1981）

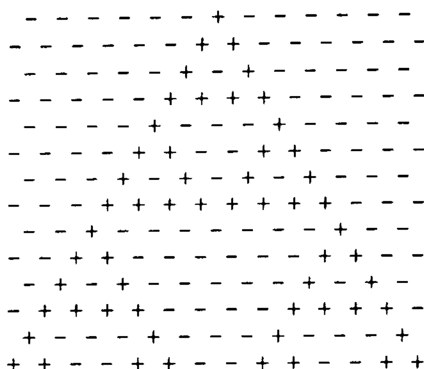


图 36-1

明显相似的图 36-1。事实上,缩小该图,我们就可使之收敛到谢尔宾斯基垫片。

自回避随机行走和线性聚合物几何

现在我们回到一个重要的专门问题。自回避随机行走(SARW)向前而不考虑它过去的位置(除了禁止多次通过一个点,以及进入一个区域后将发现不能再退出的情况外),所有可能的方向都是等概率的。

在直线上,这种运动是没有问题的:它必然在另外的方向继续,而永不回到自身。

相反,在平面和空间的情形,此问题引起我们兴趣但非常困难,而且迄今尚没有得到解析研究的成果。然而它在高分子(聚合物)研究中具有实际重要性,以致已成为谨慎的直观推断和精细的计算机模拟的对象。这个使我们极感兴趣的结果,由于东布(Domb)和在 Barber & Ninham 1970 中的描述,叙述如下:

在第 $n \gg 1$ 步以后,位移的均方根 R_n 具有 n 次幂的数量级,记作 $1/D$。

此结果极强地暗示，在围绕点阵上某格点的圆或球(半径为 R)的内部，其他格点的数目近似于 R^D。这是检验 D 是否为分维的好主意。

在直线上，它的值(平凡地)是 $D=1$。由弗洛里(Flory)的理论推断和计算机模拟，对 $E=2$ 和 3，符合于 $D=(E+2)/3$ (de Gennes 1979，第 1.3 节有很好的评述，它把 D 记作 $1/\nu$)。布朗运动的分维 $D_B=2$ 超过了对 $E=2$ 和 3 时的 D 值，但对 $E=4$ 是符合的。

仅在极限 $E\to\infty$，由凯斯滕(Kesten)作的极限论证建立起 $D\to 2$。然而，对 $E\geqslant 4$ 的值 $D=2$ 是由细致的物理学论证所提出的，但也可由简单的分形论述提出如下：当 $E\geqslant 4$ 时，布朗运动的余维是 2，因此它的双重点的余维数是 0，意味着布朗运动没有重点。因此这是自回避的，无需进一步论述。

D 值的发生对于基本假设的细节很敏感。如果三维空间中的一个聚合物是由两个不同类型的原子构成(这时该行走就不限制于一个点阵)，维华(Windwer)发现 $D=2/1.29$，他认为此 D 低于东布的值 $D=1.67\sim 2/1.2$，是有效的。在溶解于反应溶剂的聚合物中，嵌入空间甚至少于惰性的，特别，D 成为独立的相互作用，定义 Θ 一点为当 D 取布朗值 $D_B=2$ 的点。在好的溶剂里 $D<2$，D 值随溶剂的优质而减少：特别，一种理想的溶剂产生 $D=2/1.57$ (如 $E=2$)和 $D=2/1.37$(如 $E=3$)。甚至最差的溶剂在二维里能永不导致超出 $D=2$，但凝聚物和相分离的进入，非分支链不再是一种满意的模型。

在前几节中没有新的工作，只是把已知结果转译为分形术语，但我感到这些转译帮助阐明了它们的提法。然而，还必须用称为 D 的维数来作重述。我们假定重复缩小的 SARW 弱收敛到某个分形族，从经验考察到的 D 作为它们的维数。物理学家没有怀疑此陈述，但一位苛刻的数学家坚持，就像现在一样，这个论断仍然是一种猜想。下节草拟了一个可取的证明方法。

注意到逐步缩小的分形极限不能期望是自回避的，因为SARW

"反射"相隔的过去成为二重点，它们的维数的确是$(4-E)/3>0$。然而，能够期望不出现三重点，而且它们的维数的确是$\max(0,2-E)=0$。

对强收敛于分形的序列，在解析和计算两方面的研究都无可非议地要早于逐步缩小的SARW。因此(可以这么说)以具有通常(强)收敛的近似序列来"遮蔽"SARW是有用的。这一目标可用第25章中我的"弯折曲线"来达到。一个惊人的结果是，最少创造性而大多是各向同性的弯折线具有的维数极其接近$D=4/3$，它是平面SARW的特征。另一个"遮蔽"是自回避布朗运动，它在图25-3上定义为有限布朗轨迹外廓之边界。这使我们想起它也产生$D=4/3$。这一群值几乎不相符：这就必须告诉我们有关平面结构更深层的情况。

这是感兴趣的，先搁置这里，转而考察一个自回避随机行走是否满足宇宙学原理(第22章)，它的头几步不做，一个条件宇宙学的定常状态似乎必然常常发生(但我不知道它的证明)。

重整化辩

在点阵物理学系统里，标度的解析研究(追随一种与我不同的惯例)极大地依赖于这种称为(不很准确)"重整化群(RG)技术"的有效工具。威尔逊的书(Wilson 1979)是创始人写的综述，是很适用的。当本书的早期版本和早期的RG论文还是预印本形式时，卡伦(Callen)就把我的注意力吸引到它们之间显然的、概念上的类似。

为了研究这种类似，让我们仔细研究威尔逊书(Wilson 1975，第774页)中的如下摘录：(a)"统计的连续统极限的关键特性是缺少特征长度或能量或时间标度"。(b)"[RG]是用于研究统计连续统极限的工具，就像导数是研究通常的连续统极限的基本方法……[普适性，一种另外的假设]类似于通常导数的情形。正规地说，对于一个导数存在许多不同的有限差分近似"。(c)"离开

导数的简单性和显式性还很远。”(d)“一个发散的积分是典型的……缺少特征标度问题的征兆。”(e)[较早的]重整化理论……消去了量子电动力学的发散性……[它的]最差的特性……为了去掉积分的发散部分,这完全是纯粹的数学技巧。”(f)“基于 RG 方法的基本物理思想是……存在级联效应……级联图形的[第一个]主要特性是标度”。(g)[第二个主要特性]是放大或衰减。”

现在作些注释。摘录(a)说明 RG 和分形处于具体问题的同样级别的地位,而摘录(d)是它们遇到了同样的第一个困难。当应用到分形理论时,摘录(b)成为最准确的。在分形上下文里,由摘录(c)所提到的诉苦是不恰当的:现在已存在对导数的简单而显式的置换量,其首选要素就是分维。摘录(d)带回到本书读者熟悉的回忆中:在第5章开始的议论里,假设海岸线长度的积分是发散的。在别处,我们完成了处理无限方差,无限期望值,或无限概率[就像当我们处理分布 $Pr(U>u)=u^{-D}(0<u>\infty)$ 时,不管 $(0^{-D}=\infty)$]。摘录(e)给我们一种舒适的感觉:我们总是处理回避发散而不依赖于纯粹的数学技巧。摘录(f)也是全部熟知的。

简单地说,这是的确没问题的,即 RG 和分形吸收了同样的灵气,而导致同一个硬币的解析和几何两副面孔。但是分形没有对应的(g),所以这种比较是不完全的。

◁RG 的输出之一,是不动点哈密顿函数 $\mathscr{H}_0$。作为一名物理学家,相信一个物理系统的哈密顿函数 $\mathscr{H}$ 原则上蕴含着知道该系统结构的一切。如果是这样的话,我们应该也能够用哈密顿函数导出各种随机形状相连接的概率分布。有限地重整化的 $\mathscr{H}$ 应该产生逐步缩小形状的分布,而不动点 $\mathscr{H}_0$ 应该产生极限的分布——特别是它们的 $\mathscr{D}$。蕴含在本概述中的研究方案可能难以实现,但我完全确信将会有预期的结果。▶

自回避多边形

设在所有的 n 边自回避多边形(它们的边是由平面($E=2$)正

方形点阵连接的)中随机地选取一个多边形。有时它是近似正方形,其面积为$(n/4)^2$;而有时它是细长而膜状的,其面积约为$n/2$。如果我们对给定的每个多边形按同样的权作平均,数值模拟表明平均面积大约为$n^{2/D}$,其$D\approx4/3$(Hiley & Sykes 1961)。因此从分形的观点看来,一个多边形的行为就像是咬住尾巴的自回避随机行走。

回到海岸线模型

自回避多边形的维数是$D\approx4/3$,似乎把它们看作超过平均不规则性的海岸线模型。我们可为这个发现而高兴,但由于涉及到海岸线的形状(在第5章里提到的),因此问题并没有解决。

首先,存在岛屿的问题。维数的概念应该同时说明海岸线的不规则性,它们的支离破碎性,以及不规则性和支离破碎性之间的关系,但是自回避多边形没有近海的岛屿。

其次,我想没有一个D值,能够满足地球上的所有的海岸线。

最后,但并非最不重要,当一个非常大的自回避随机行走或多边形被逐步缩小时,点阵的步长从1减少到一个小的值η,则通常相距为1的两点收敛于同一极限点。此逐步缩小的行走或多边形的极限因此不再是自回避的:它并不自相交,却是自接触。我不希望看到海岸线模型上的这种点。例如,它们意味着存在半岛(准岛屿,它只在一点与大陆接触)语义的严格解释和存在准湖泊。

河流衰退到直线

第12章提到了哈克从经验上找到很典型的结果,河流长度的增加就像按其排水区面积的$D/2$次幂。这是真的,河流直线地绕排水区域流过,支流的长度应该正比于排水区面积的平方根,这样,D的值是$D=1$。实际上,D在1.2到1.3之间变化。相应的,第12章描述了基于一个填满平面的河流网络(其中的河流是分形

曲线)上的模型。

企图用非常不同的随机方法来解释哈克效应,列奥波德和朗拜因两人在他们 1992 年的著作中报道了用计算机模拟在均匀岩性学范围内排水区图形的拓展。此模型包括一个在平面点阵中的原始二维随机行走,这是物理学家感兴趣的。它假定源位置和传播方向都是随机选取的。第一条支流的源是随机选取的正方形,而水道是由相邻正方形的 SARW 所产生的,直至它离开面积的边界。然后随机地选取第 2 个源和另外的支流。常常有第 2 个支流,"密苏里河"要比它们连接处上面的密西西比部分更长。连接处可能出现在第 1 条支流的源。把同样的过程继续进行到全部正方形都被填满。除了这些一般性的法则之外,还有各种任意的约定,以避免打结、断流和不一致等。

计算机模拟表明,在随机行走的模型里,河流的长度像排水区面积的 0.64 次幂那样增长,因此 $D \approx 1.28$。此值与东布的 $D \approx 4/3$ 之间的误差可以是由于未充分扩展模拟而引起的统计变分。但我却企图把此误差作为真实的来考察:从其他支流积累的干扰似乎比从 SARW 的过去值的干扰更为重要,因此我们期望对列奥波德和朗拜因的模型有一个小的 D 值。

与实际的地图相比较,列奥波德和朗拜因的河流偏离极大,为了避免此缺点,提出了大量的其他模型。由 Howard 1971 年提出的模型假设朝源头增长,即按照各种完美的人为设计,从位于正方形边界上的河口通向位于内部的源头。这种方法产生的河流比列奥波德和朗拜因的方案要直得多,因此可推测它包含一个小的 D。

迄今为止,随机网络的研究,就像列奥波德和朗拜因以及哈华德等,都局限于很少的计算机模拟,这是很惭愧的,因此我希望这些非常有趣的问题引起数学家们的注意。由于 SARW 已经表明了与分析极端地相抗,这个事实足以警告那些想要大奖金而寻找容易问题的人远离,但是列奥波德和朗拜因的变更是很容易的。

重复一下:在 SARW 研究中遇到的数学困难,其根源就在于局部的变化可以引起全局效应。类似地,在列奥波德和朗拜因网络

的局部改变,可以引起一条大河流通过相邻区域的划分线而断流。我们要为能度量宏观上长期相互作用的强度而高兴。当然,我希望该参数是分维。 ■

第 37 章　经济学中的价格变动和标度

仅是半开玩笑地说，可以把股票和商品交换价格的变化说成是一个几何问题。因为报纸的金融版上充斥着那些自称是"图表专家"的广告，他们适当地用图表分析过去，并声称可以从那些图表几何中预测将来。

1900 年首先由露易斯·巴奇里亚提出了基本的反诉：这些图表是没有用的。最可以肯定的论述是连续的价格变化在统计上是独立的。另一种温和些的说法是每一价格都伴随着一个"输后加倍下注的"随机过程，就意味着市场是"完全的"：每一产品在它的过去都是不受欢迎的。一种更温和的说法是不完全产品只有在它们比交易价格低的时候存在：这种市场被称作"有效的"。巴奇里亚有关有效的概念被证明是异乎寻常的准确。

巴奇里亚的一个更特殊的断言是，根据最初的概算，任何竞争性价格伴随着一个"一维布朗运动"$B(t)$。这一事实是值得记住的，即对物理学而言是如此基本的过程被一个持有异见的数学家所证明，见第 40 章。可悲的是，一旦真正的数据可以得到，$B(t)$ 却很难代表它们。这一章描述另一种可供选择的观点，这是我在标度假设的基础上建立起来的（是在所有领域中最早被采用的方法之一），它被证明是惊人的准确。

价格的不连续性

我最简单的反布朗论点是基于一个实验观察，它是这样的简单与直接，以致人们对它能证明基本原理而惊奇。但在前几章里用来表述银河的 $D>2$ 和湍流的 $D>2$ 也是令人惊奇地明了与直接。简单的观察认为，一个连续过程不能解释那种相当明显的不

连续性现象。我们知道布朗运动的样本函数是◁几乎无疑，几乎处处▶连续的。但是竞争市场上的价格不需要连续性，它们明显是不连续的。假定连续的唯一原因是，许多科学有意或是无意地倾向于重复在牛顿的物理学里被成功地证明了的过程。对于进入经济学中的各种各样的“外来的”量与比率，连续性必须证明一个合理的假设，而且要以纯物理术语来定义。但是价格却不同：力学不包括可比性，而且在这方面也没有先例。

价格构成包括目前的知识和将来的期望，甚至当某种价格的外来物理决定因素连续变动时，期望也“即刻”剧烈地变动时；当可忽视其能量和持续时间的物理信号（“用笔一击”）轻易地激起期望的剧烈变化时；以及当没有规定来向复杂的事物注入惰性时，一个由期望决定的价格可以猛跌到0，也可增涨到超出范围，什么都可能。

过滤贸易的谬误（Mandelbrot 1963 b）

价格可以是不连续的思想本身几乎没有任何可预见的价值，但是它证明了“过滤”贸易方法（根据 Alexander 1961）的基础是落后的，并且要消亡的。原则上，一个 $p\%$ 过滤是用来监督价格连续性的一种方法，它记录所有局部的最大值与最小值，当价格第一次恰巧达到局部最小值加上 $p\%$ 时给出一个买的信号，以及当价格第一次恰巧达到局部最大值减去 $p\%$ 时给出一个卖的信号，因为连续的监督是不实际的，亚历山大监督每日高点和低点的序列，他理所当然把此价格的记录看作连续函数。这个算法是寻求高点首次超过前一天的低点加 $p\%$ 的天数。假如在 d 天的某一时刻，价格正好是低点加 $p\%$，就在这一点过滤器发出买的信号。对卖的信号同样如此。亚历山大（Alexander, S.）经验性的总结是过滤器的买或卖的信号，比“购买以及持有”带来更高的回报。

实际上，Mandelbrot 1963 b 的第 417 页上指出，过滤器给出买的信号（以 24 小时计算）的天数十分接近于所有强烈的上升价格

运动的天数。在许多这样的日子里,价格实际上是在跳动,或前一天晚上或在交易的初始当贸易被停止时。这样,当亚历山大过滤器应该发出买的信号时,它就像被关掉似的!一旦它再次打开,它就发出买的信号,但最终的买价经常大大超过亚历山大的估计值。

进一步的可能性:在许多日子里,价格变动被市场专家的故意行为造成适度的连续,这些专家执行他们指定的权利,如分配买者与卖者,以及通过他自己持有股份的买卖来"保证市场的连续性"。一旦这些专家不能保证连续性,他必须提出一份书面的解释,他通常倾向于人为地抹平那些不连续,显然,当大部分顾客不得不在较高价格购买时,最后的讨价还价总是在朋友之间进行的。

第三种可能性:某些日常价格的变化受到限价,并使日常限价几天内无贸易而移动,防止"终止限价"从被执行处移动。

理论和实验的研究(随时论述一下)使我确信以上的偏见是很有意义的,购买和持有这种过滤贸易的估计的优点是值得怀疑的。重新审查后,Alexander 1964 会发现我的预见是正确的。而过滤器方法并不比"购买并且持有"好。法默和布鲁恩 1966 年提出一项完全是"死后"的检查,以独立的价格体系替代了亚历山大的价格指数,过滤器这一方法现在被完全地抛弃了。这样的插曲强调了我所谓的"价格连续性的缺点"这一错误遗传的危险性。

赢得"输后加倍下注"的赌博类似于永动机。由于贝奇里亚有效市场假设的优点,预测了过滤器不可能起作用,但因为贝奇里亚对布朗运动模型的不明白之处,它不能解释为什么过滤器看似可以起作用。这样,我的特殊模型的优点是允许作分析,并指出形形色色的缺点。

统计学的"困境"

布朗运动作为价格变动模型的失败,引出两种截然不同的反映。一方面,存在着关于这"困境"的过剩,面对的是一项(拒绝价格变动是高斯的)布朗假设的统计试验,经济学家可以一次一次地

修正，直到试验被愚弄。

一个普通的困境是审查制度，伪善地标志为“拒绝统计上的门外汉”，人们可以区分普通的小的价格变动和打败亚历山大过滤器的大的价格变动。前者被认为是随机的和高斯的，就像大家关心的那样，天真这一财富被献给了他们。后者被单独认为“非随机的”再一个普通的困境是几个随机总体的混合：当 x 不是高斯时，可能它是两个、三个或更多个高斯变量的混合。另一个困境是非线性转换：当 x 是正的和大体上是非高斯的时，可能 $\log x$ 是高斯的，当 x 是对称的和非高斯的时候，可能 $\tan^{-1} x$ 会愚弄试验，而另一个过程（我认为它是来自统计学家的自杀）声称价格跟随着布朗运动，但运动的周长不受控制地变动。这最后一个困境从来不被弄错，结果哲学家卡尔·鲍伯声称它不能是一个科学的模型。

经济学的标度原理(Mandlbrot 1963 b)

这些困境的对立面是我自己的研究。它应用经济学的资料，但原理在价格这一概念上得到最好的解释。

价格变动的标度原理　当 $x(t)$ 是价格，$\log x(t)$ 有一个特性，就是 $\log x(t)$ 在任意时间滞后 d 的增量 $\log x(t+d)-\log x(t)$ 具有与 d 无关的分布（除了一个标度因子以外）。

在探究这一原理的结果前，让我们略微看一下一系列特性。

一个科学原理必须承认能被证据检验的预见，这一个就是这样，这一点我们即将看到，困境是非常好的。

科学原理能从他们各自领域里的其他理性想法所演绎出来，这一点是很妙的，价格变动的标度原理能以概率论的“中心极限”理论的一般形式（不必是标准的）为基础，但它并不是从标准经济学演绎出来的。仅有的“解释性”论点（Mandelbrot 1966 b, 1971 e）支持它作为外界物理变量方面的标度成果，这些论点不如他们声称正确的结果设立得好。

最后，甚至当没有实际的解释可以采用时，但如果一个科学理

论并不真正和前期的假定有所冲突，还是令人高兴的。目前的标度原理看似很缺乏，它所回答的问题先前并没有被提出，所以反面的意见也不能被提出。标度想要证实的是在竞争市场上，没有任何时间滞后是真正地比其他的更特殊，它证实天和星期（在农产品里还包括年）的明显的特征是赔偿和仲裁。因为所有布朗运动的“寻常”困境包括特别的时间标度，我的原理看似简单地证实了没有“足够的理由”来假设任何的时间标度比其他的更有特权。

无穷变量并发症

虽然，我们需要标度原理的实际实施来证实不同于布朗运动的结果，我采取了假设 $\log x(t+d)-\log x(t)$ 有无穷方差这激进的一步来完成这个目标。在我的论文以前，没有人会怀疑“用 V 来表示方差”。关于 V 是有限的这一假设还没有被这样提及，因为当人们列出每一个假设，而不顾已经建立的意义时，科学论文失败了。我采用相反见解的原因将在这一节的后半部分讨论。无论怎样说，假设 $V=\infty$ 的成功使我更容易地使曲线可以无限长、表面面积可以无限大。

被观察到的价格变动样本方差的不良行为 用于汇总数据的“典型值”是描述统计学最简单的层次。但是在价格变动的情况，通常的汇总原来是错综复杂和完全靠不住的，实际上，用样本平均来测量位置以及用样本均方根来测量偏差的动因停留在确信这些是最终集中在普遍的价值上这一“稳定的”特性之上，但 Mandelbrot 1967 b 的图形表明它们在价格这种情况下的行为是非常地模棱两可：

(A) 对应于不同长的子样本的均方值常有不同的数量级。

(B) 当样本大小增加时，均方不再稳定。它忽上忽下，但总的趋势是增加的。

(C) 均方倾向于被一些几个有贡献的平方极大地影响着。当这些所谓的分离物被取消时，色散的估计值常常按它的数量级变

化。

非平稳性的假设 把这些特性一起，甚至其中任何单独一个，每个人总相信这个过程是平稳的。我基本的反驳是这个过程实际上是稳定的，而未知的理论上的第二矩是非常巨大的，在巨大但有限矩的假设下，样本矩根据大数定律而收敛，但这样的非常缓慢，而且极限的值实际上很小。

无穷方差原理 我进一步的反驳是总体均方是无穷的。那些在本书中耕耘至今的人非常熟悉"非常巨大"和"无穷"之间的选择，但那些从这里开始的人可有不同的取向，我 1962 年版所有的读者就是这样。对那些在统计方面有一般知识的人，无穷差分看似最可怕和最奇怪的，实际上，人们可以从样本矩推出的结果看，"无穷"和"非常大"并没有什么不同。还有，一个变量 x 有无穷差分这个事实决不否认 x 肯定是无穷的（以概率为 1）。例如，密度为 $1/\pi(1+x^2)$ 的柯西变量几乎肯定是有限的，但有无穷差分和无穷期望值。这样，在非常巨大和无穷变化的变量之间的选择不是先验的，必须完全看哪一个问题更适于被掌握而定。我接受无穷差分是因为它使维持标度成为可能。

稳定的莱维模型（Mandelbrot 1963 b）

Mandelbrot 1963 b 可接受的见解溶合了标度原理，即认为连续不断的价格变化与不断消失的期望值是无关的，以及进一步允许价格变动的差分可以是无穷的。一种简要的数学论点引出了一种推测，认为价格变动被莱维稳定性分布（在第 32，33，39 章中也被提到）所控制。

这种推测证明具有广泛的确实性，第一个试验（Mandelbrot 1963 b，1967 b）适用于许多商品价格、一些利率和一些 19 世纪的债券价格。

后来，Fama 1963 研究了近期的债券价格，Roll 1979 研究了另外一些利率。这里我们肯定会满足于一个独特的例证，图 37-1。

模型的预言能力

价格变动的标度原理的预价值在于以下的发现。在五年时间对中间价格变动规律的，人们每日价格变动的分布开始研究，而且人们发现如果这种分布可以被推测到每月的价格变动，它的图表和从不同的后退和萧条等得来的资料是一致的，它叙述了近一个世纪以来非常重大又非常活跃的商品史上的全部重要事件。

特别地，图 37-1，控制棉花价格变化的过程经过研究在非常长的一段时间里近似地保持稳定。这个有趣的发现可以分两步被很好地表达出来。

第一个稳定性试验　图 37-1 的图释表明价格变动过程的分析形式，以及 D 值，两者都保持不变。对通货价值的多数变化没有什么争论，但所有的倾向与我们在这里讨论的波动相比是微不足道的。

第二个稳定性试验：对图 37-1 中一个错误的更正　一个侥幸引出了第二个稳定性试验，在图 37-1，曲线（a^+）和（b^+）[同样地，（a^-）和（b^-）]通过水平平移不相同的，因为在双对数坐标上的平移对应于普通坐标的尺度变化。这个矛盾导致 Mandelbrot 1963 b 与经济学家（认为 1900 年到 1950 年之间价格变动分布已有变化）的论点相一致。我认为分布保留了同样的形态，但它的尺度变小了。

然而，这种对论点的让步证明不再是必须的了，曲线（a^+）和（a^-）以后的数据被错误地输入了（Mandelbrot 1972 b），一旦这种错误被更正，人们将被导向和曲线（b^+）和（b^-）几乎同样的曲线。

人们不能否认，仅是偶然的一瞥，数据给出了大体上是非稳定的印象，但这仅是因为偶然的印象而产生的，是由基础的过程是高斯的背景。我对非平稳但高斯过程的替换是一个平稳但非高斯的稳定过程。

结　　论

在经济上，除此之外，我不知道任何可与之相比的成功的预见。

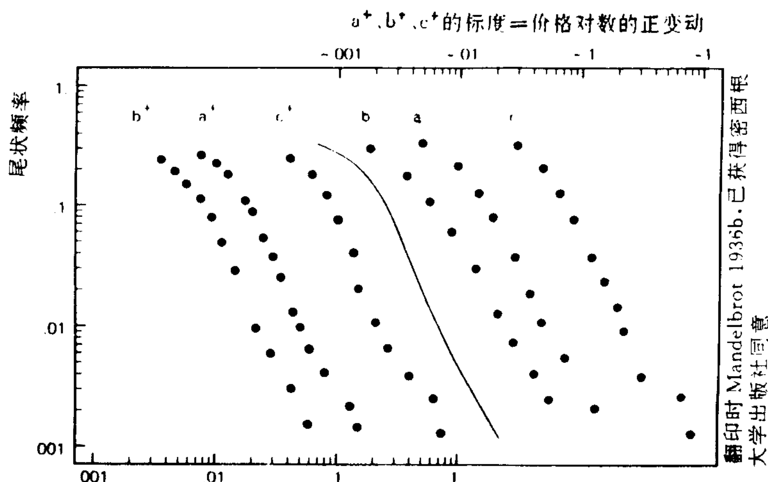


图 37-1　按比例绘制的经济学原始资料

这张从 Mandelbrot 1963 b 复制过来的旧的图表，是由我粘连在一起的(就像我后来粘连成图 28-11 相连一样)。它包括以正负标记(棉花价格对数记录下的变化)作出双对数图表以及指数 $D=1.7$(D 的价值稍微高估了一点)的对称性稳定分布的累积的密度函数。纵坐标给出了如下情况的相对频率，即量 x(由下面定义的量 x 之一)的变化超过在横坐标里的变化。

在透明纸上复制这张图，并水平移动，你会发现理论曲线以通常形状下的极小差别盖过了任何一个经验上的图表，这正是我的标度准则假设！

这种差别很大程度上是因为分布上的一点不对称，这是一个很重要的观察，需要对稳定分布作些不对称的变化。

以下一系列的数据组已经画在图上，x 的正值和负值以两种形式分别被考虑。

(a) $x = \log_e Z(t+1\text{ 日}) - \log_e Z(t)$，在这里，$Z$ 是 1900～1905 纽约棉花交易所的每日收盘价(数据由美国农业局传送)。

(b) $x = \log_e Z(t+1\text{ 日}) - \log_e Z(t)$，在这里，$Z$ 是 1944～1958 美国不同交易所的棉花每日收盘价的指数(由 Hendrik S. Hanthakker 传送)。

(c) $x = \log_e Z(t+1\text{ 月}) - \log_e Z(t)$，在这里，$Z$ 是 1880～1940 纽约棉花交易所每月 15 日的收盘价(由美国农业局传送)。

第 38 章　非几何学的标度律和指数律

假如分形的专著或教材被写成，在数学上优美的随机几何形状的讨论是放在较容易的随机函数标题之后，而且这些书将从随机变量开始。相反，本书直接跳到最复杂的标题，因为这是最有意义的，而且起到几何直观作用。

与分形最密切相关的是双曲概率分布。其使用的许多例子都已在前几章[从双曲函数 $Nr(U>u)$开始的]中遇到过。但是还有更多的话要说。本章是从一般性的闲谈开始，继续在语言学和经济学中的某些现象，在经验上(丰富和完整)很显然，用双曲规律来表达是很好的。两种情形的议题是同样的，而且要引起对标度和相似维的重视而完全用"非具体化"的形式。

语言学例子是我第一篇论文(第 42 章)的对象，它使我熟悉了某些巧妙的操作，这是直接具有广泛的可应用性。语言学的例子也有一副热力学的面孔(它包括与负温度相匹配，由我独立发现)。

再论双曲分布

由众所周知的定义：一个随机变量$(r.v.)U$ 称为双曲的，当 $P(u)=Pr(U>u)=Fu^{-D}$。这个定义很奇怪，在十分有限的范围内前置因子 σ 导致 $P(0)=\infty$，它似乎很荒谬，无疑表明必须特别小心——这是众所周知的。例如，在第 12 章里我们看到，当科赫发生器含有一个岛屿时，产生的曲线就含有无限个岛屿，它们的面积超过数 $Nr(A>a)=Fa^{-B}$。现在按面积减小对它们排列，对面积相等的岛屿其次序可任意。随机地选择一个具有均匀概率的岛屿，就应该随机地选择岛屿的秩，要达到这一目的，就要由 $Pr(A>a)$来认定 $Nr(A>a)$的位移。但事实上一个岛屿的秩是正整数，

而不可能随机地选择一个正整数。

另一个熟悉的事：双曲分布直接导致条件分布。例如，条件 $r.v.\{U$，已知 $U>u_0\}$ 可写作 $\{U|U>u_0\}$，满足

$$Pr\{U>u|U>u_0\}=\begin{cases}1, & \text{当 } u<u_0;\\ (u/u_0)^{-D}, & \text{当 } u>u_0。\end{cases}$$

期望值佯谬

当 $D>1$ 时，相应的期望值是

$$\{U|U>u_0\}=D(D-1)^{-1}u_0。$$

这一结果提出了无穷尽的、似是而非的故事，怂恿清醒的读者推波助澜。

林特效应　一位电视喜剧演员未来一生的期望值正比于他过去的曝光。来源于 1964 年 6 月 13 日的新共和国报。

为了解答，请看下面的故事。

青年诗人墓地的寓言　在墓地最悲哀的区域，即诗人和学者——他们都是在少年花季突然倒下的——的墓穴中间，每个墓碑的顶上都有一个破损的记号：半本书，半根柱子或者是半把工具。老守墓人，他年轻时也是一位学者和诗人，他极力要求扫墓的人们取走这些忧郁的记号，他几乎全是逐字地宣布："躺在这里的每一位，经考察，他们都已足够地完成了全部诺言，而某些墓碑的大小反映出他们隐蔽下来的成就。那么我们该如何来评价他们中断了的诺言呢？我的一部分责任就是活下来向欧拉或雨果挑战，是生存方面，虽然也许不是在才能方面，但是他们中的大多数，啊哟，正准备被他们的缪斯（希腊女神）所放弃。因为诺言和成就在青年生命中是精确地相等的，我们必须看成在突然死亡的时刻他们是相等的。"

解答。任何人，他在青年时期终止也就是终止在诺言生涯之中　"证明"按照洛加的理论，任何单个作者的科学论文、数学论文的分布是指数 $D=2$ 的双曲分布。此法则综合了定性的事实，即

大多数人是不写或写得很少，而少数人又写得太多太多。如果是这样的话，不论个人过去的论文集有多么长，平均起来它将保留在一个相等的附加总数内。当它最终停止时，它精确地断开在其诺言的一半处。

注解 避免出现失望的唯一方法是如此古老，即当计算未来的期望时，必需考虑年龄的修正。在林特效应里的比例系数无疑就是 1。

离开海岸的寓言 在很远很远以前，有一个称为万湖国的国家，把这些湖亲切地称为大的，第 2 最大的，……第 N 最大的，等等，直至第 1 万个最大的。大的是个未标明的海，不，是个很宽的洋，越过它至少要 1600 海里，而第 N 个最大的湖宽为 $1600N^{-0.8}$，所以最小的湖宽度为 1 海里。但是每个岛上总是蒙上一层薄薄的雾，使得不能看到宽度超过 1 海里的地方。因为土地被毁坏了，所以没有居民能帮助旅行者。作为一名旅行者，他用数学期望相信位于一个未知的海岸，他知道在他前面有期望值宽度为 5 海里的水域面。如果他航行了很少海里以后，他发现已不能到达他的目的地，然后计算出到达下一海岸的新的期望距离，他得到的值是 5m，是幽灵占领在这些湖上？实际上离海多远？

解答 上述湖宽分布再次说明了在第 12 章至第 30 章中遇到的柯尔恰克分布。

标度概率分布

现在我们回到正题。常说到标度随机变量，这术语标度必须不用非几何学定义的。因为与一个随机变量相联系的几何形状仅是一个不能再分割的点。换句话说，随机变量 x 是变换 $\mathcal{J}(x)$ 下的标度，如果 x 和 $\mathcal{J}(x)$ 的分布除了比例以外是恒等的。

这里要把变换理解为有更宽的意义：例如 x 的两个独立获得量之和被看作 x 的变换。称相应的变量为加法下的标度，而且称为莱维稳定的（见第 31、32 章和第 39 章）。第 39 章将继续讨论有

权加法的标度。

渐近标度、渐近的双曲随机变量 十分幸运，上述定义与其他类似情形相比很少有不确定的。对于许多变换来说，不变性原来是要求渐近双曲分布。这就意味着必须存在一个指数 $D>0$，使得

$$\lim_{u\to\infty} Pr(U<u)u^D \quad 和 \quad \lim_{u\to\infty} Pr(U>u)u^D$$

是确定的和有限的，而且极限之一是正的。

帕雷托分布 "渐近双曲的"能作为著名的经济统计学家命名的术语帕雷托的之同义语，帕雷托是一位意大利经济学家，他希望把力学平衡定律转换成经济学平衡的术语，而且这能更持久记住已发现的基本统计规则：他发现在某些社会里，私人收入 U 超过某一大的值 u 的个人的数目近似于双曲地分布的，即正比于 u^{-D}。（我们将在本章的后面转向收入的分布。）

"统计经济学的新方法"（Mandelbrot，1963 e）

类似于帕雷托的双曲律后来在经济学的许多领域都被发现，而许多的努力都是为了直接来阐明它们的流行。然而我们首先来揭述一下本问题的一种非正统方法。

就像经济学一类领域，永不能忘记它的"数据"是一个极度混杂的口袋。因此，数据的分布是把一个不变的基础"真分布"的效应与一个高度可变的"过滤器"的效应连接起来。曼德布罗特的论文（Mandelbrot 1963 e）考察了具有 $D<2$ 的渐近双曲分布在这方面是非常"鲁棒"的，意即离开多种多样的过滤器它们的渐近性质不变。另一方面，实际上所有其他的分布都是高度地非鲁棒的。因此，一个真正的双曲分布能看作具有相容性：不同的失真数据的集合提出具有相同 D 的同一个分布。然而把同样的处理应用到大多数其他的分布上就导致"混沌的"不相容结果。由于对混沌的结果有不发表或不重视的倾向，因此期望着对渐近双曲分布事实的十分广泛的传播，它告诉我们一点关于在自然界中实际的流行。

字频率的齐普夫定律

一个字就是一个适当字母的简单序列，它终止于称为空白的非字母。以个人的讲话作为样本，对正文中的字按减少的频率作排序，具有相同频率的字的次序是任意的。按这种分类，假定一个字的概率是 P，就记它的秩为 ρ，而把 ρ 和 P 之间的关系记为术语**字频率的分布**。

可以期望按照语言和讲话人得到的这种关系是非常杂乱无章的，但事实并非如此。由齐普夫（见第 40 章）于 1949 年发表的经验定律提出 ρ 和 P 之间的关系是"普适的"，即无参数的，其形式为

$$P \propto 1/\rho。$$

第二个近似是当我从理论上推导无参数定律 $P \propto 1/\rho$ 失败的过程中得到的，即在语言和主题之间的一切差别可简化为

$$P = F(\rho + V)^{-1/D}。$$

因为$\sum P = 1$，三个参数 D，F 和 V 之间的关系是 $F^{-1} = \sum(\rho + V)^{-1/D}$。

这些参数一起度量出用了多少主题词汇。

D 是主要的参数。这是可以感觉到的，当通过使用罕见字的相对频率来度量主题词汇的使用有多大时，例如，通过秩 $\rho = 1000$ 的字的频率与秩 $\rho = 10$ 的字的频率相比较。此相关频率随 D 而增加。

为什么上面的定律具有如此的普适性呢？因为它完美地接近双曲分布，以及我们迄今在本书中所学到的一切都用上了，由试验和叙述齐普夫定律，就会明显地感觉到某些基本的标度特性（在 1950 年当我第一次处理这个题目时，这个过程似乎并不十分明显）。就像注释所提出的，指数照例起着维数的作用，前因子 F（回想第 34 章）成为第二个重要的参数。

词典编纂树

词典编纂树，它是在目前的确存在的、可以作为标度的"对象"。我们首先给出定义，并在其上下文里描述标度意味着什么。然后证明当词典编纂树是标度时，字频率服从上面提到的2–参数定律。我们还要讨论这些阐述的有效性，然后指出，D 作为维数解释。

树 一棵词典编纂树有 $N+1$ 个支杆，从 0 到 N 编号。第一支杆对应于由不合适字母"空格"本身组成的"字"，而其余的每根支杆对应于 N 个合适字母中的一个，排除"空格"树干，而对其余的每一树杆上取出 $N+1$ 个叉头，对应于空格和 $N+1$ 合适的字母。下一代的空格叉头被排除，而其余的分支都再取出 $N+1$ 个头，如前所述，因此被排除的每个空格叉头的树尖就对应于跟随在空格之后的由合适字母组成的字。这样的构造一直继续到无穷。每个被排除的树尖标上相应字的概率，而在非排除分支的尖端标上字(即开始于由该分支所确定的字母序列的那些字)的总概率。

标度树 一棵树称为标度，那么如果从自身所取的每个分支是整树按某种方法减缩比例的重现，截断此树就是从它上面切去一个分支。因此我们的第一个结论是一棵标度树必需无界地向外长出分支。实际上，与未经训练的直觉相反，不同字的总数并不是一种度量词汇丰富的聪明办法(几乎每个人所"知道的"是如此之多，比用在词汇中的字更多，实际上是无限的)。进一步的议题(我们跳过它)。要确定其形式，就必需考察在第 k 级被排除分支(即 k 生存的顶部长出来的)概率 P。

最简单情形下广义齐普夫定律的推导 (Mandelbrot 1951, 1965 z, 1968 p) 最简单的标度树相应于统计独立字母序列组成的讲话，其每个合适字母的概率是 $r<1/N$，而非合适字母"空格"的概率是余下的$(1-Nr)$。这种情形下第 K 级就有如下性质

$$P=(1-Nr)r^{k}=P_0r^{k},$$

而 ρ 是在下面的两个界限之间变化：

$$1+N+N^2+\cdots+N^{k-1}=(N^k-1)/(N-1)$$

（不包含该边界本身），和

$$(N^{k+1}-1)/(N-1)$$

（包含该边界）。有

$$D=\log N/\log(1/r)<1 \text{ 和 } V=1/(N-1),$$

再在每个界限中插入

$$k=\log(P/P_0)/\log r,$$

于是得到

$$P^{-D}P_0{}^D-1<\rho/V\leqslant N(P^{-D}P_0{}^D)-1。$$

通过对其界限取平均而对 ρ 近似，就得到了所要的结果。

推广 稍稍复杂一点的标度树对应于由其他平稳随机过程（例如马尔可夫链）产生的字母序列，以及然后由空格回归插入字，这些议题更为复杂（Mandelbrot 1955 b），但最终结果是一样的。

交谈 相反，从齐普夫的数据能得出用普通字母的词典编纂树是标度吗？当然不是：因为许多短序列永不出现而许多长序列又非常普通，因此实际的词典编纂树决不是严格的标度，而这却不是特殊的感受，即上面的议论充分地阐明了推广的齐普夫定律为什么是正确的，还要提起，通常希望齐普夫定律应该对语言学的领域有贡献，但是我的阐述表明，该定律在语言学上是非常肤浅的。

◁ 广义齐普夫定律在某些严格的词汇里也是成立的。例如，神秘训练有其自身风格的圣人人类学，对人类中把名字“圣”用作姓的情况作调查（Maitre 1964），建立了用于这种姓的齐普夫定律。还有，泰尼埃（Tesniére 1975）寻求把它应用到家属的姓名，这就要问，相应的树是标度吗？▶

***D* 是分形维数** 在形式上 D 类似于维数，这一新的考察结果并不像我们所担心的那样肤浅。的确，如果在前面放一个小数点，作为我们所定义的一个字这没有影响，但成了用 $(N+1)$ 个计数基而且除了末位不包含 0 所写成的、在 0 到 1 之间的一个数。在区间 [0,1] 上记下这些数，并加上该数集的极限点。这种构造实际上

就相当于在[0,1]中去掉包括数字 0 在内的全部数字。我们发现,这余下的是康托尘埃,其分维精确地是 D。

说到标度词典编纂树(不是指最简单的情况,这已在提供齐普夫定律的广义证明时提到过了),他们对应于用同样的方法来推广维数为 D 的康托尘埃。在 Mandelbrot 1955 b 中,D 的方程是个矩阵,是通过 $Nr^D=1$ 把相似维定义推广。

进一步推广:$D>1$ 的情形　很奇怪,$D<1$ 的条件并不是普遍地实现的。有个例子,推广的齐普夫定律成立但估算的 D 却满足 $D>1$,虽然这是罕见的但确实是存在的。为了描述特殊值 $D=1$ 的作用,假定定律 $P=F(\rho+V)^{-1/D}$ 仅适合于 $\rho=\rho^*\leqslant\infty$。如果 $D<1$,从理论的论题提出无限词典是不困难的。但是无穷级数 $\sum(\rho+V)^{-1/D}$ 当 $D\geqslant1$ 时发散,因此 $\sum P=1$ 和 $F>0$ 要求 $\rho^*<\infty$:字典必需包含**有限**个字。

的确,结果证明 $D>1$ 只是在下面的情形遇到,即由于人为的外来因素(例如,在非拉丁语的文本中插入了拉丁文)使词汇非自然地受到限制。这些特殊情形已在我的论文(本主题词下)中讨论过了。因为局限于有限个点的结构永不导致分形,$D>1$ 不可能解释为分维。

谈话的温度

把上面的推导用于第 2 个,就有非常不同的解释(模仿统计热力学)。与物理学的能量和物理学的熵相对应的是编码和山诺*信息的损失。而 D 是谈话的“温度”,谈话“很热”就是使用罕见字的概率较高。

$D<1$ 的情形对应于标准的情形,对于其形式上的等价能量不存在上界。

另一方面,当字如此之“热”使得 $D>1$ 的时候,这种情形包含

* 山诺,缅甸土著人的语言。

着极少见的对能量给出有限上界。

在借助于语言统计学简短地描述了这尖锐的两种情况之后，物理学上独立地承认了。物理学温度的倒数 $1/\theta$ 是最小的——当温度最高时它趋于 0，而拉姆齐认为如果物体仍然是比较热的，$1/\theta$必需成为负的。见论文(Mandelbrot 1970 p)中与此对应的讨论。

热力学从微正则的等概率性推断出对象的大量性质。因为对分子从个性上讲还不了解，关于它们可能状态的假设引出少许的激情，但是我们对于字却有个别的知识，所以在语言的研究里，等概率的假设并非肤浅的。

◁上述的类似性实际上对热力学某些更一般的方法是很自然的。前面过多摘录术语的危险性对本书来说是很表面的，这些公式已在论文(Mandelbrot 1962 t，1964 t)中给出。▶

关于工资的帕雷托定律

另一个有标度的抽象树可在分级别的人类群体组织图中找到。我们来处理最简单的有标度的级别，设(a)它的成员按下法分布在各级中(除了最低级)，即每个成员拥有的相同的下级数目 N，(b) 他所有的下级都有相同的“权”U，它是直接上级之权的 $r<1$倍。而最简单的就是研究属于工资的权。

当对各种级别从收入不相等的观点作比较时，就可对他们的成员按照递减收入的次序(在一个级别里的次序可任意)作分类，对每个人以它的秩 ρ 为标记，而把收入减少的比率算作秩的函数，或者反过来也一样。当秩增加时，按收入减少得越迅速，其不相等性就越大。

用于齐普夫定律的公式无需改变就可应用：一个人收入为 U，它的秩 ρ 近似地为

$$\rho=-V+U^{-D}F^{D}。$$

这是由莱达尔(见 Lydall 1959)推导的。

不相等的程度大多数决定于

$$D = \log N / \log(1/r)。$$

它似乎没有任何分形注释要写下来。形式的 D 越大，r 的值越大而不相等的程度就越低。

用下面的方法把模型推广是可能的，即假定给定 k 级内 U 的值在各人之间变化，使 U 等于 r^k 与一个随机因子的乘积（该因子对每个人都同样的）。这种推广修改了参数 V 和 P_0，因此也包括 D，但它保留了基本关系不改变。

注意到根据经验，D 通常接近于 2。在 D 刚好为 2 的情形里，把收入的倒数画在一根轴上（尖头朝下）。我们就得到一个精确的锥体（底等于高的平方）。在这种情形里，上级的收入是他所有下级全部的收入和分别取每个下级的收入之几何平均。

短评　当 $D=2$ 时，最小的 $1/r$ 出现于 $N=2$ 而且就等于 $1/r=\sqrt{2}$。此值似乎脱离实际地高，这就提醒我们，莱达尔的模型仅对 $D>2$ 的级别成立。如果真是这样，那么在总人口里所有 D 大约是 2 这一事实就意味着，在所有级别范围内收入差与各级别之间差相比较，而在群体之内的（收入）差别不包含级别树。

其他收入的分布

对收入分布更广泛的研究见曼德布罗特的论文（Mandelbrot 1960 i，1961 e，1962 q），是受到第 37 章描述的工作的启发。▶ ▬

第39章　数学的后援和补充

本章把分散在各处的复杂数学公式、数学定义以及参考文献汇集在一起,还把几个数学和其他的补充也一起归入本章。

条　目　表

- 仿射性和自相似性(自-)
- 布朗分形集
- 维数和用球覆盖一个集(或者它的补集)
- 维数(傅立叶)和直觉法
- 分形(论分形的定义)
- 豪斯多夫维和豪斯多夫—伯西柯维奇维
- 指针/余指针函数
- 莱维稳定　随机变量和随机函数
- 列弗希茨—赫尔德直觉法
- 中间的和跳跃的多边形
- 音乐:标度的两个性质
- 无腔隙分形
- 皮亚诺曲线
- 位势和容量,弗罗斯特曼维
- 截断下的标度
- 相似维:它的陷阱
- 平稳性(平稳度)
- 用 R/S 作统计分析
- 外尔斯特拉斯函数及其族　紫外线和红外线突变

仿射性和自相似性(自-)

在正文中,术语自相似和自仿射(一个新义词)应用于有界集或无界集(我希望,没有引进二义性),关于湍流的许多讨论中,以及在我的早期论文中也用到自相似,其“一般的”意义是归入自仿射的,但本书中其一般的意义由标度完成。

1. 自相似性

在欧氏空间 $\mathbb{R}^E$,由一个实的比例数 r 确定的变换称为相似性的,它把点 $x=(x_1,\cdots,x_\delta,\cdots,x_E)$ 变换到点 $r(x)=(rx_1,\cdots,rx_\delta,\cdots,rx_E)$,因此把点集 $\mathcal{S}$ 变换到点集 $r(\mathcal{S})$(见文献 Hutchinson,1981)。

有界集 一个有界集 $\mathcal{S}$ 关于比例 r 和整数 N 是自相似的,当 $\mathcal{S}$ 是 N 个非重叠子集之并,而每个子集与 $r(\mathcal{S})$ 同余。同余的意思是除了位移以及(或者)旋转以外是恒等的。

一个有界集 $\mathcal{S}$ 关于一组比例 $r^{(1)},\cdots,r^{(N)}$ 是自相似的,当 $\mathcal{S}$ 是 N 个非重叠的子集(它们分别与 $r^{(n)}(\mathcal{S})$ 同余)之并。

一个有界的随机集 $\mathcal{S}$ 关于比例 r 和整数 N 是统计上自相似的,当 $\mathcal{S}$ 是 N 个非重叠的子集(每个子集都具有 $r(\mathcal{S}_n)$ 的形式,其中 N 个集 $\mathcal{S}_n$ 在分布上与 $\mathcal{S}$ 同余)之并。

无界集 一个无界集 $\mathcal{S}$ 关于比例 r 是自相似的,当集 $r(\mathcal{S})$ 与 $\mathcal{S}$ 同余。

2. 自仿射

在 E 维欧氏空间,一个正的实比例集合 $r=(r_1,\cdots,r_\delta,\cdots,r_E)$ 确定一个仿射变换,它把每个点 $x=(x_1,\cdots,x_\delta,\cdots,x_E)$ 变换到点

$$r(x)=r(x_1,\cdots,x_\delta,\cdots,x_E)=(x_1r_1,\cdots,x_\delta r_\delta,\cdots,x_Er_E),$$

因此把集 $\mathcal{S}$ 变换到 $r(\mathcal{S})$。

有界集 一个有界集 $\mathcal{S}$ 关于比例矢量 r 和整数 N 是自仿射的，当 $\mathcal{S}$ 是 N 个非重叠的子集(每个子集都是与 $r(\mathcal{S})$ 同余的)之并。

无界集 一个无界集 $\mathcal{S}$ 关于比例矢量 r 是自仿射的，当集 $r(\mathcal{S})$ 与 $\mathcal{S}$ 是同余的。

上述的定义常常在下列条件下应用：(a) $\mathcal{S}$ 是函数 $X(t)$(从标量时间 t 到 $E-1$ 维欧氏矢量)的图形；(b) $r_1=\cdots=r_b\cdots=r_{E-1}=r$；(c) $r_E\neq r$。这种情形可直接定义如下：一个时间-矢量函数 $X(t)$ 关于指数 α 和时刻 t_0 是自仿射的，如果存在一个指数 $\log r_E/\log r=\alpha>0$，使得对每一个 $h>0$，函数 $h^{-\alpha}X[h(t-t_0)]$ 与 h 无关。

兰佩蒂半稳定性 在文献 Lamperti 1962，1972 中，把随机无界自仿射集称为半稳定的。

异速生长 第 17 章考察过，当植物树的高度按 r 变化时，它的主干的直径按 $r^{3/2}$ 变化。事实上，这些表示点(其坐标为树的各种线性度量)相互间有仿射变换的关系。生物学家把这种图称为异速生长的。

布朗分形集

由于不同的布朗集激增，而专门名词必定要引经据典，有时就很难定下来。

1. 布朗线—线函数

此术语标记经典的普通布朗运动，也称为维纳函数，巴切里埃函数，或者巴切里埃—维纳—莱维函数。下列麻烦的定义允许各种推广而容易分类。

假定(a) 时间变量 t 是实数，(b) 空间变量 x 是实数，(c) 参数 H 是 $H=1/2$，(d) 概率 $Pr(X<x)$ 是由误差函数 $\mathrm{erf}(x)$ 给出的，而此误差函数是由约化高斯随机变量(带有 $\langle x\rangle=0$ 和 $\langle x^2\rangle=$

1)的分布。

定义　线—线布朗函数 $B(t)$是这样的随机函数，即对一切 t 和 Δt，有

$$Pr([B(t+\Delta t)-B(t)]/|\Delta t|^{H}<x)=\mathrm{er}\,f(x)。$$

高斯白噪声的表示　函数 $B(t)$是连续而不可微的，这就意味着 $B'(t)$在普通意义下是不存在的，而要作为广义函数（施瓦茨分布），就称 $B'(t)$为高斯白噪声，因此就能把 $B(t)$写作 $B'(t)$的积分。

自仿射　把概率分布的概念从随机变量推广到随机函数，令 $B(0)=0$，改变尺度的函数 $t^{-1/2}B(ht)$具有与 t 无关的概率分布。此标度性质是自仿射的一个例子。

谱　借助于谱分析或者调和分析，$B(t)$的谱密度正比于 f^{-1-2H}，也就是 f^{-2}。然而，谱密度 f^{-2}的意义需要专门讨论，因为函数 $B(t)$是非平稳的，而通常的维纳—Khinchin 协变理论和谱只与平稳函数有关。因此把此讨论延迟到条目**外尔斯特拉斯**之后。

不可微分性　函数 $B(t)$连续而不可微。再次，最好把此标题放在条目**外尔斯特拉斯**之后再分析。

参考文献　文献 Levy 1937～1954 和 1948～1965 中在高雅的气质和非凡的风度方面具有值得骄傲的声望（见第 40 章），然而在直观性和简单性方面并不相称。

把最新文献按照数学家、科学家和工程师们各种群体的需要再精心编辑而井井有条地列出来实在太多了，但是从最新文献 Knight 1981 看来很有前途。（很遗憾，它没有包括“有关豪斯多夫维或样本路径测度的结果，然而却很优美，因为似乎不需要知道任何应用[！]而且……似乎有关应用性内容的一般性知识在实际上也是不必要的。另一方面，……这些专题作为样本路径的处处不可微性……似乎评述了关于路径极端不规则性的定义”。）

2. 广义布朗函数

前节的每一个假定都有一个自然的推广，而且由推广一个或

更多假定得到的每一个过程都与原始的 $B(t)$ 有极大的不同和极大的应用。

(a) 实的(标量的)时间 t 可以由欧氏空间 $\mathbb{R}^E$ ($E>1$,即圆或球)中的一点代替。

(b) 实的(标量的) X 可以由欧氏空间 $\mathbb{R}^E$ ($E>1$) 中圆上或球上的一点 P 代替。

(c) 参数 H 可以取 1/2 以外的值,具有高斯分布的 $\mathrm{er}f$,允许 H 是范围 $0<H<1$ 中的任意值。

(d) 高斯分布的 $\mathrm{er}f$ 可以由条目**莱维稳定**里讨论的非高斯分布所代替。

此外,$B(t)$ 能推广到关于它的白噪声表示,此方法产生实质上不同的结果。

3. 非趋势部分

布朗线—线函数 $B(t)$ 在 $t=0$ 和 $t=2\pi$ 之间的变分可分解为两部分:(a) 由 $B^*(t)=B(0)+(t/2\pi)[B(2\pi)-B(0)]$ 定义的趋势部分,(b) 其余的振荡部分 $B_B(t)$。在布朗函数 $B(t)$ 的情形,这些项正巧是统计独立的。

趋势 趋势部分 $B^*(t)$ 的图形是带有随机高斯斜率的直线。

布朗桥 "非趋势的"振动项 $B_B(t)$ 在分布上等同于布朗桥,它定义为满足 $B(2\pi)=B(0)$ 的布朗线—线函数。

非趋势部分的弊端 面对不知起始点的样本,在经济学、气象学等部门工作的许多应用统计学家赶紧把它分解为一个趋势部分和一个振动项(以及加上周期项)。隐含地假定这些加数属于不同的生成机理而且统计独立。

上面的这个隐含假定相当没有根据,除非该样本是由 $B(H)$ 产生的。

4. 布朗圆—线函数

打圈的布朗桥 取 t 的周期函数,使其在时间间隔 $0<t\leqslant 2\pi$

上完全重合与布朗桥 $B_B(t)$，再在 $[0,2\pi]$ 上随机（均匀地）选取 Δt。函数 $B_B(t+\Delta t)$ 是统计平稳的（见条目**平稳的**……）并且能表示为随机的傅立叶—布朗—维纳级数，其系数是独立的高斯随机变量（具有随机相位而模数正比于 n^{-1}）。换句话说，此离散谱正比于 n^{-2}，也就是 f^{-2}，而在频率 f 上累积的谱能量是 $\approx f^{-1}$。

实际结论 $B(t)$ 的模拟必定要在一个有限时间间隔上实现。如果此间隔看作 $[0,2\pi]$，模拟就能利用离散的有限傅立叶方法。用快速傅立叶变换计算布朗桥，再加上所需的随机趋势部分。

参考文献 文献 Paley & Wiener 1934 由于其深奥的代数而获美名，然而其第Ⅸ和Ⅹ章中深奥的评注段落仍然值得一读；论文 Kahane 1968 仅推荐给数学家，在其简单的原始上下文中从不说明结果如何。

奇数圈布朗桥 函数 $Bo(t)=\frac{1}{2}[B_B(t)-B_B(t+\pi)]$ 和 $B_E(t)=\frac{1}{2}[B_B(t)+B_B(t+\pi)]$ 分别是桥函数 $B_B(t)$ 的奇的和偶的分量。其奇分量的优点是可直接借助于高斯白噪声 $B'(t)$ 沿圆积分而获得：

$$B_0(t)=\int_{-\pi}^{0}B'(t-s)\mathrm{d}s-\int_{0}^{\pi}B'(t-s)\mathrm{d}s。$$

布朗线—圆函数 从 $B(t)$ 出发，丢弃它的整数部分而将余下的分数乘以 2π。这样就在单位圆上确定了一个点。这里要提出警告，不要把此布朗线—圆函数与前述的两个函数中的任一个（是非常不同的）相混淆。

5. 分数的布朗线—线函数

为了定义此函数 $B_H(t)$，从普通布朗线—线函数出发，把指数从 $H=1/2$ 改为满足 $0<H<1$ 的任意实数，其中 $H\neq 1/2$ 的情形是完全分数的。

一切 $B_H(t)$ 都是连续而不可微的。我能确定最早涉及的是论文 Kolmogorov 1940。其他分散的参考文献和各种性质已列在论文

Mandelbrot & Van Ness 1968 中，也可参见论文 Lawrance & Kottegoda 1977。

相关和谱 显然，$\langle [B_H(t+\Delta t)-B_H(t)]^2\rangle = |\Delta t|^{2H}$，$B_H(t)$ 的谱密度正比于 f^{-2H-1}，其指数不是整数，这正是我提出的把 $B_H(t)$ 称作分数的的原因之一。

离散的分数高斯噪声 它定义为 $B_H(t)$ 在连续单位时间间隔上的增量序列。它的相关是

$$2^{-1}[|d+1|^{2H}-2|d|^{2H}+|d-1|^{2H}]。$$

长期相关。持久性和反持久性 令 $B_H(0)=0$，并且定义过去的增量为 $-B_H(-t)$，而未来增量为 $B_H(t)$，就有：

$$\begin{aligned}\langle -B_H(-t)B_H(t)\rangle &= 2^{-1}\{\langle [B_H(t)-B_H(-t)]^2\rangle - 2\langle [B_H(t)]^2\rangle\}\\ &= 2^{-1}(2t)^{2H}-t^{2H},\end{aligned}$$

除以 $\langle B_H(t)^2\rangle = t^{2H}$，我们就得到相关，我们发现它与 t（等于 $2^{2H-1}-1$）无关，在 $H=1/2$ 的经典情形里，相关消失，这正是所期望的。对于 $H>1/2$，相关是正的，表示持久性，而当 $H=1$ 时相关为 1；对于 $H<1/2$，相关是负的，它表示反持久性，而当 $H=0$ 时，相关是 $-1/2$。

以下事实是 $B_H(t)$ 自仿射性的明显推论，就是即使当相关不为 0 时，它也应该与 t 独立。然而，大多数学随机论的学生们开始时感到吃惊和不安，即过去和未来的相关可以与 t 独立而不下降为 0。

涉及模拟的实际结论 为了对在 $t=0$ 和 $t=T$ 之间的一切整数时间产生一个随机函数，在习惯上选择一种算法，它事先不考虑 T，然后让它连续运行一段时间 T。用于产生分数布朗函数的这种算法是十分不同的：它们必然依赖于 T。

对于 $B_H(t)$ 离散增量的快速发生器，已在论文 Mandelbrot 1971 f中描述（该论文由于有十分令人不安的印刷错误而受到损害：在第 545 页的第一个分数，分子要减去 1 而整个分数要加上 1）。

分维 对此图有 $D=2-H$。对零集和其他的水平集合有 D

$= 1 - H$。见文献 Abler 1981。

6. 分数的布朗圆或环—线函数

分数布朗圆—线函数比子条目 4 的函数远要减少内禀性。最简单的是分数傅立叶—布朗—维纳级数，它定义为具有独立的高斯系数，全部随机相位以及系数的模正比于 $n^{-H-1/2}$。分数布朗环—线函数是具有同样性质的双重傅立叶级数之和。

警告 一种表面上的类似性提出分数布朗圆—线函数可由下列方法得到(它也可应用于非分数的情形)：构造分数布朗线—线函数的趋势部分 $B_H^*(t)$，然后非趋势部分 $B_H(t)$ 以及重复构造周期函数。

很遗憾，用这种方法得到的周期函数与以 $n^{-H-1/2}$ 为系数的傅立叶级数是不同的随机函数。特别，傅立叶级数是平稳的，而重复的非趋势部分 $\dot{B}_H(t)$ 却不是。例如，在 $t = 0$ 两边的一个小区间，重复的非趋势桥加入到 $\dot{B}_H(t)$ 的两个非相邻子片一起了。包含在桥定义中的限制对于使组合的片连起来是充分的，但对于平稳却不充分。例如，对于在 $t = \pi$ 两边的相邻子片所组成的小片在分布上是不等同的。

关于模拟的注解 用有限的离散傅立叶方法来计算分数布朗线—线函数，在理论上是可能的而且在实际上也是可行的，但处理起来却非常困难。最直接的方法是：(a) 计算合适的圆—线函数；(b) 除了相应于周期为 2π 的有限个小区间外，全部丢弃。不妨记作 $0 < t < t^*$；(c) 加上一个分开算得的非常低的频率分量，当 $H \to 1$ 时，t^* 必趋于 0。

分维 对于整个图形有 $D = 2 - H$(见文献 Orey 1970)，当水平集非空时，$D = 1 - H$。此结果见文献 Marcus 1976 (文献 Kahane 1968, p.146, 增强定理 5)。

通过 $H = 1$ 的临界转移 带有与 $n^{-\frac{1}{2}-H}$ 成正比的独立高斯系数的分数傅立叶—布朗—维纳级数收敛于一个连续的和式，对一切 $H > 0$ 成立。当 H 通过值 $H = 1$ 时，该和式变得可微了，相反，

分数的布朗过程只定义 H 最多到 $H=1$，在 H 的允许值范围内的差别证实了这两个过程是相当不同的。它也说明了物理学中的临界转移现象可以模型化为线—线布朗函数，而不能是圆—线函数。

7. 分数的布朗线(或圆)—空间轨迹

在 $H<1$ 的圆—空间情况下，轨迹的维数是 $\min(E, 1/H)$，这是文献 Kahane 1968。第 143 页，定理 1 的一部分。

8. 不同形式的分数次微积分

把布朗线—线函数 $B(t)$ 转化为 $B_H(t)$ 的最简单写法是：

$$B_H(t)=[\Gamma(H+1/2)]^{-1}\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{H-1/2}\mathrm{d}B(s)。$$

这个积分是发散的，但类似于 $B_H(t)-B_H(0)$ 的增量是收敛的，这是核 $(t-s)^{H-1/2}$ 的移动平均。这是一个经典的、虽然还不著名的变换，纯数学家们称它为 $\left(H+\frac{1}{2}\right)$ 阶的黎曼—刘维尔分数次积分或微分。

直觉法 积分和(或)微分的阶不必是整数的思想在谱的概念中极易理解。实际上，一个周期函数的普通积分等价于将该函数的傅立叶系数乘以 $1/n$ 所得到的结果，而非周期函数的普通积分等价于将该函数的傅立叶变换(已有定义时)乘以 $1/f$ 所得到的结果，所以将函数的傅立叶变换乘以分数次幂 $(1/f)^{H+1/2}$ 的运算可以合理地称为分数次微积分。因此噪声的谱为 f^{-0}，$B_H(t)$ 的谱为 $(1/f)^{2(H+1/2)}=f^{-2H-1}$(如前所述)。

参考文献 黎曼—刘维尔变换还有一些零星的应用。(Zygmund 1959。Ⅱ, p. 133, Oldham & Spanier 1974, Ross 1975, Lavoie, Osler & Tremblay, 1976) 一些鲜为人知的对概率论的应用(回到文献 Kolmogorov, 1940) 见文献 Mamolelbrot 和 Van Ness, 1968。

光滑性效应 当黎曼—刘维尔变换的阶数 $H-1/2$ 是正的，

该变换就是一个分数型积分，因为它增加了一个函数的光滑性。光滑性等于局部持久性，但是光滑性是由扩大到函数的全局性质的积分得到的。当 $H-\frac{1}{2}<0$ 时，黎曼—刘维尔变换是分数型微分，因为它增强了依赖于局部性态的不规则性。

应用于布朗函数 对于一个分数的布朗圆—线函数，H 没有上界。对于阶 $H^{-1/2}>\frac{1}{2}$ 的分数积分应用于布朗圆—线函数产生一个可微函数。相反，布朗线—线函数中，$H-1/2$ 至多为 1/2，而 $B_H(t)$ 是不可微的。

对布朗圆—线和线—线函数，局部的不规则性禁止超过 $H=0$ 的微分，因此超出了 $(-1/2)$ 阶。

分数微—积分的双向扩展 经典的黎曼—刘维尔定义对于 t 是严格反对称的事实，当 t 作为时间参数是易被接受的，但是当坐标 t 向两个方向都可“运行”时就需要有个对称的定义。我建议：

$$B_H(t)=[\Gamma(H+1/2)]^{-1}\left[\int_{-\infty}^{t}(t-s)^{H-1/2}\mathrm{d}B(s)\right.$$
$$\left.-\int_{t}^{\infty}|t-s|^{H-1/2}\mathrm{d}B(s)\right]。$$

9. 布朗空间—线函数

文献 Lévy 1948, 1957, 1959, 1963, 1965 引进了从空间 Ω 到实线的布朗函数，这里 Ω 可以是具有通常距离 $|PP_0|$ 的 $\mathbb{R}^E$，也可以是在 $\mathbb{R}^{E+1}$ 空间具有沿短程线定义距离的球面，或是希尔伯特空间，对于其中任一个布朗函数 $B(P)-B(P_0)$ 是一高斯随机变量，其中值为 0 而方差为 $G(|PP_0|)$，且 $G(x)=x$。这方面的文献包括 Mckean 1963 和 Cartier 1971。

当 Ω 是球时的高斯白噪声表示 $B(P)$ 的结构如第 28 章所描述：在球面覆盖一个高斯白噪声区，认为 $B(P)$ 就是在以 P 为北极的半球的噪声区上的积分。实际上，我更喜欢这样的变量，即在该半球上积分的 1/2 减去在另半球上积分的 $\frac{1}{2}$。这就推广了上面

第 4 个子条目中的第二种方法。

当 Ω 是 $\mathbb{R}^E$ 时，高斯白噪声表示 （Chentsov 1957）根据琴佐夫这种情况包含更加复杂的算法，而当 Ω 是 $\mathbb{R}^2$；$B(0,0)=0$ 时最容易想象。作一个半径为 1 的辅助柱面，坐标为 u 和 θ，然后在上面覆盖一层白噪声区。正如文献 Mandelbrot 1975 b 所修正过的，算法开始先计算在矩形区域 θ 至 $d\theta$ 和 θ 至 u 上白噪声的积分，得到一个线—线布朗函数，当它 $u=0$ 时值为 0，把它记为 $B(u,\theta,d\theta)$。对于平面上每一点 (x,y)，这个线—线布朗分量 $B(x\cos\theta+y\sin\theta,\theta,d\theta)$ 是统计独立的，并且对 θ 的积分为 $B(x、y)$。

10. 分数的布朗空间—线函数

文献 Gangoli 1967 的某些部分在文献 Yaglom 1957 中，已预先考虑过了把 $B(P)$ 推广到上述子条目中 $G(x)=x^{2H}$ 的情形，但他未包括一种构造最终函数的简明算法，为了做到这一点，文献 Mandelbrot 1975 b 通过用一个双向定义的布朗分数线—线函数来代替每个 $B(u,\theta,d\theta)$，推广了琴佐夫的构造有关 D 的论述，见文献 Yoder 1974，1975。

关于通过 FFT 模拟，见文献 Voss 1982。

11. 分数高斯噪声的非线性变换

给定一个 $G(x)$（它不同于 $G(x)=x$），它由 $\sum_{t=1}^{T} G\{B_H(t)-B_H(t-1)\}$ 构成，并对非整数的 T 进行线性插值。把此结果记作 $B_G(T)-B_G(0)$，则它是渐近标度，如果存在一个函数 $A(T)$，使 $\lim_{T\to\infty} A(T)\{B_G(hT)-B_G(0)\}$ 对于任意 $h\varepsilon(0,1)$ 是不退化的。Marray Bosenblatt研究了 $G(x)=x^2-1$ 的情况，文献 Taqqn 1975 表明问题的关键是 G 的埃尔米特秩（定义为在 G^2 展开成埃尔米特级数的最低次项）。有关这方面更新的结果可见文献 Taqqn 1979 和Dobrushin 1979。

维数和用球覆盖一个集(或者它的补集)

我提出的分维或种种变形都非拓扑学的,而是度量概念,它们包括一个度量空间 Ω(即空间中的任意两点之间都定义有适当的距离)。一个以 ω 为球心、半径为 ρ 的闭(或开)的球[它是所有到 ω 的距离 $\leqslant\rho$(或 $<\rho$)的点的集合],球是实心的,而球面是指球的表面)。

给定 Ω 中的有界集 $\mathcal{S}$,那么有许多种用一组半径为 ρ 的球进行覆盖的方法,正如在本条目所考察的例子那样,这些方法实质上涉及到维数的概念,在讨论的基本情况中,这些定义产生相同的值,而在另外一些情形中则有不同的值。

1. 康托和闵可夫斯基

最原始的覆盖方法是由康托提出的,它以集合 $\mathcal{S}$ 上的每个点为心作球,把这些球的并作为 $\mathcal{S}$ 的光滑化模型,称为 $\mathcal{S}(\rho)$。

再假定 Ω 是 E 维欧氏空间,这样,体积(VOL)就被定义为:

$$\mathrm{VOL}(\text{半径为 } \rho \text{ 的球}) = \gamma(d)\rho^{p},$$

并且 $\gamma(d) = [\Gamma(1/2)]^{d}/\Gamma(1+d/2)$。

当 $\mathcal{S}$ 是一个体积远大于 ρ^3 的立方体时,

$$\mathrm{VOL}[\mathcal{S}(\rho)] \approx \mathrm{VOL}[\mathcal{S}]。$$

当 $\mathcal{S}$ 是一个面积远大于 ρ^2 的正方形时,

$$\mathrm{VOL}[\mathcal{S}(\rho)] \approx \partial\rho \cdot \mathcal{S} \text{ 的面积}。$$

当 $\mathcal{S}$ 为一个长度远大于 ρ 的区间时,

$$\mathrm{VOL}[\mathcal{S}(\rho)] \approx \rho^{2} \cdot \mathcal{S} \text{ 的长度}。$$

更确切地说,如果用“容量”一词代表体积,面积,长度或其他任一个适当的概念,d 是标准维,再设 V 为表达式

$$V = \mathrm{VOL}[\mathcal{S}(\rho)]/\gamma(E-d)\rho^{E-d},$$

那么立方体,正方形,线段都可以满足:

$$\text{“容量”}[\mathcal{S}] = \lim_{\rho\to 0} V。$$

也许可以看出，这个公式并不是两个等同的乏味概念之间过分的分析。根据施瓦茨在 1882 年提出的例子表明，如果把一个圆柱划分成三角形，并且把三角形越分越小，则三角形的面积之和不一定收敛为圆柱的面积。为了避免这一矛盾，文献 Minkowski 1901 通过上述用小球覆盖 $\mathcal{S}$ 的方法设法把长度和面积约化到完整而简单的体积概念。

但是，从一开始就遇到了小小的麻烦：当 $\rho \to 0$ 时 V 的表达式可能没有极限。

出于这个原因，极限的概念就由一对概念 lim sup(上极限)和 lim inf(下极限)代替，对于在开区间上极限，下极限中的任何实数 A，总对应于至少一序列 $\rho_m \to 0$，使得

$$\lim_{m \to \infty} \mathrm{VOL}\{[S(\rho_m)]/\gamma(E-d)\rho_m{}^{E-d}\} = A。$$

不过，当 $A <$ 下极限，或 $A >$ 上极限时，序列不存在，下面的定义已被承认，文献 Minkowskt 1901 称

$$\lim_{\rho \to 0} \sup \mathrm{VOL}[S(\rho)]/\gamma(E-d)\rho^{E-d}$$

和

$$\lim_{\rho \to 0} \inf \mathrm{VOL}[S(\rho)]/\gamma(E-d)\rho^{E-d}$$

为 $\mathcal{S}$ 的上与下 d-容量，当它们相等时，它们的值就是 $\mathcal{S}$ 的 d-容量。闵可夫斯基观察到对于标准的欧几里得形状，总存在一个 D，如果 $d > D$，$\mathcal{S}$ 的上容量就为 0，当 $d < D$，$\mathcal{S}$ 的下容量为无穷。

2. 布利高*(Bouligand)

文献 Bouligand 1928，1929 的工作把闵可夫斯基的定义推广到非整数 d。尤其是上述的下极限(有可能是一个分数)被称为闵可夫斯基—布利高维 D_{MB}。

布利高认识到 D_{MB} 有时是非直观的，一般比豪斯多夫—伯西柯维奇维 D 更难描述，但它常常与 D 相等且更易计算，因此是有

---

* 布利高，数学家。——译者注

用的。$E=1$ 的情况已在文献 Kahane & Salem 1963，第 29 页中讨论过，它证实了 D_{MB} 常等于 D，不能比它小，但能大于它。

3. 庞特里亚金(Pontrjagin)和许尼莱尔蒙(Schnirelman)；柯尔莫哥罗夫(Kolmogorov)和蒂荷米洛夫(Tihomirov)

在度量空间 Ω，用以覆盖集 $\mathcal{S}$ 的、半径为 ρ 的球的全部集合中，最经济的是要求以最小球数来定义。当 $\mathcal{S}$ 有界时，该最小数是有限的，记作 $N(\rho)$。文献 Pontrjagin & Schnirelman 1932 提出把表达式

$$\liminf_{\rho\to 0}[\log N(\rho)/\log(1/\rho)]$$

作为维数的另一种定义。

该方法是由文献 Kolmogorov & Tihomirov 1959 发展起来的，该文作者受到了商诺信息论的启发，其中把 $\mathcal{S}$ 的 ρ–熵记作 $\log N(\rho)$。文献 Hawkes 1974 称此相应的维数为**低熵维**，而把以 lim sup 代替 lim inf 而得到的变种称为**高熵维**。霍克斯证明了豪斯多夫—伯西柯维奇维最大只能等于低熵维；它们经常是相同的，但也可能不一致。

文献 Kolmogorov & Tihomirov 还研究了 $M(\rho)$，它的定义是在 $\mathcal{S}$ 中满足相互距离超过 2ρ 的最大点数。对于直线上的集，$N(\rho)=M(\rho)$，而对于其他集，

$$\liminf_{\rho\to 0}\log M(\rho)/\log(1/\rho)$$

就是另一维数了。

◁文献 Kolmogorov & Tihomirov 1959 称 $\log M(\rho)$ 为**容量**，但很遗憾，该术语已在位势理论中作为完全不同意义的、沿用已久的而且意义很合适的名词，特别，我们要避免在维数称呼上的混淆，因为前节已定义过容量维。见子条目**位势和容量，3**。▶

4. 伯西柯维奇和泰勒；博伊德

当 Ω 是[0,1]或实轴时，我们已在第 8 章中看到，尘埃 $\mathcal{S}$ 完全

由它的补集所确定，该补集就是开区间的并以及间隙(在某些结构里，每个间隙都是空洞)。

在[0,1]中的三元康托尘埃 C 间隙长度的总和为1，而且服从双曲分布 $Pr(U>u)=Fu^{-D}$。因此，随着增大构造的步数，第 n 个间隙的长度 λ_n 具有 $n^{-1/D}$ 的数量级。

零勒贝格测度的一般线性集 文献 Besicovitch & Taylor 1954 研究了当 $n\to\infty$ 时 λ_n 的行为。这时存在实指数 D_{BT}，使得级数 $\sum\lambda_n{}^d$ 当 $d>D_{BT}$ 时收敛(特别，当 $d=1$ 时收敛于1)。该 D_{BT} 是满足 $\sum\lambda_n{}^d<\infty$ 的所有 d 的下确界。可以证明 $D_{BT}\geqslant D$。文献 Hawkes 1974(第707页)证明了 D_{BT} 与高熵维相一致，但更易于计算。

警告 当 $\mathcal{S}$ 不是零测度时，D_{BT} 不是维数，它与第15章中的指数和第17章中的 Δ 有关。

阿波罗尼的包指数 在阿波罗尼包(第18章)的情形里，D_{BT} 有它的对应值。这是 Melzak 在1966年引入的，而文献 Boyd 1973 b 证明了它就是剩余集的豪斯多夫—伯西柯维奇维。

维数(傅立叶)和直觉法

设 $\mu(x)$ 是 $x\in[0,1]$ 的非退化函数。如果当 μ 是常数时最大开区间的总和是闭集 $\mathcal{S}$ 的补集，就称 $d\mu(x)$ 是 $\mathcal{S}$ 的支撑，而 μ 的傅立叶-斯蒂尔吉斯变换是

$$\hat{\mu}(f)=\int\exp(ifx)d\mu(x)。$$

在 μ 最光滑处，可能产生 $\hat{\mu}$ 的最快速率减少。设 D_F 是这样的最大实数，它使得至少有一个 $\mathcal{S}$ 支撑的函数 $\mu(x)$ 满足

$\hat{\mu}(f)=o(|f|^{-D_F/2+\epsilon})$，当 $f\to\infty$，对一切 $\epsilon>0$ 成立，

但没有 $\mu(x)$ 满足

$\hat{\mu}(f)=o(|f|^{-D_F/2-\epsilon})$，当 $f\to\infty$，对某些 $\epsilon>0$ 成立。

这里所讲的"$a=o(b)$，当 $f\to\infty$"意味着 $\lim_{f\to\infty}(a/b)=0$，而当 $\mathcal{S}$ 是全区间[0,1]时 D_F 是有限的，相反，当 $\mathcal{S}$ 是单点时 $D_F=0$。更

有兴趣的是，每当 $\mathcal{S}$ 是零勒贝格测度时，D_F 是有限的而且至多等于 $\mathcal{S}$ 的豪斯道夫—伯西柯维奇维数。不等式 $D_F \leqslant D$ 表明，分形与分形的调和性质相关，但不一定恒等。

为了证明这些维数能够不等，假定 $\mathcal{S}$ 是直线上的集，且 $D = D_F$。当把 $\mathcal{S}$ 看成是平面上的集合时，D 不改变但 D_F 却变为 0。

定义 把 D_F 称为 $\mathcal{S}$ 的**傅立叶维**，这是概括 $\mathcal{S}$ 的某些调和性质的方便方法。

萨利姆集 把以等式 $D_F = D$ 为特征的一类集合称为单一集或萨利姆集（见文献 Kahane & Salem 1963，Kahane 1968）。

经验法则和直觉法 在研究的情形里感兴趣的分形是萨利姆集，因为 D_F 很容易从数据中算得，它能作为 D 的估算值。

非随机萨利姆集 只有当 r 满足一定的理论性质时，非随机康托集才是萨利姆集。

随机萨利姆集 当随机性足以破坏计算规则性时，随机康托集才是萨利姆集。

最初的例子是由萨利姆提出的，它非常复杂。第 2 个例子是列维尘埃：记作 $L(x)$ 的莱维阶梯（见图 31-2，图 31-3）。文献 Kahane & Mandelbrot 1965 表明，$dL(x)$ 的谱与分数布朗线—线函数的谱平均几乎相一致，而且就是高斯—外尔斯特拉斯函数谱的光滑化形式。

◁文献 Kahane 1968（第 165 页的定理 1 和第 173 页的定理 5）表明，指数 H 的分数布朗线—线函数映到 δ 维紧集 $\mathcal{S}$ 上的象是萨利姆集，且 $D = \min(1, \delta/H)$。

康托集不是萨利姆集 最早出现三元康托尘埃是由于康托要寻求单一性的集（见文献 Zygmund 1959，I，第 196 页），但是他没有找到。（然后康托放弃了调和分析而——退而求其次——创建了集合论。）例如，记作 $C(x)$ 的康托阶梯（图 8-5），$dC(x)$ 的谱与 $dL(x)$ 的谱的总体形状相同，但它偶然包含有不衰减大小的尖峰，这就意味着 $D_F = 0$。见文献 Hille & Tamarkin 1929。

这些峰造成了单一性集合理论中的所有不同之处，但是实际

上不受重视。大都在计算谱密度时都倾向于忽略这些波而考虑 D 控制的背景。

分形(论分形的定义)

虽然术语分形已在第 3 章中定义过了,但我仍然相信没有定义会更好(我的 1975 年版就没有定义)。

其直接的原因是现在的定义排除了某些我们希望包含在内的集合。

更基本的原因是,我的定义中包括了 D 和 D_T,但似乎分形构造的概念比 D 和 D_T 更为基本。更深入一步,维数概念重要性是由于其不可预期的新应用而大为增长!

换句话说,能把分形构造定义为在某些合理的光滑变换集合下的不变式。但这个任务不容易完成,可用个例子来说明困难性,我们还记得复数的一些定义还不能包括实数!在目前阶段主要需要把基本的分形从欧氏的标准集合中区分出来。

由于我的积极性不高,致使许多杰出的数学家未能注意到我 1977 年版本中的定义。不过,还是来详细说明它吧。

1. 定义

分形集的定义首次出现在 1977 年版本的引言中。它作为度量空间中的集,而且满足

豪斯多夫—伯西柯维奇维 $D>$ 拓扑维 D_T。

本书中的分形是 $E(<\infty)$维欧氏空间中的集,可称为欧氏分形。但有一个例外,即在第 28 章中:球面上的布朗海岸线可看作黎曼分形。

2. 评论部分算术对纯分维的比较

上面的数学定义是严格的和临时性的,应该作更好的改进。但几个看来很自然的改变,将导致病态。

很久以前，当我为一些特性(后来就称为分形)寻找测度时，就决定用豪斯多夫—伯西柯维奇维 D，因为它已被仔细研究过。许多论文(例如文献 Federer 1969)发现后就引进无数的变种，它仅在细节上与 D 有所不同，这真使人感到不安。不过，现在有很多理由来推迟考察这些细节。

此外，如果给出几种可能的维数要在其中选择的话，必须避免选明显包括有外加特性的那种。最重要的是，D 不包括算术的任一面，这与傅立叶维 D_F(第 456 页)或伯西柯维—泰勒指数(第 455 页及文献 Kahame 1971，第 89 页)相比都有所不同。

3. 豪斯多夫边缘情形

边缘情形总是一个麻烦问题。从先验上讲，一条 $D=1$ 的不可求长曲线既可是分形也可不是分形，这对于满足 $D=D_T$ 的任何集也是同样的，但用于测试函数 $h(\rho)=\gamma(D)\rho^D$ 的豪斯多夫测度是无限的(它不能为 0)。更不能接受的是，康托魔鬼阶梯(图 8-5)在直观上就是分形，因为它以明显的样式展示了许多种长度标度，因此虽然有 $D=1=D_T$ 我们仍不愿称它为非分形。参见第 473~474 页。由于缺乏其他准则，我用这种方法来处理边缘情形以获得简洁的定义。如果以及当出现更充分的理由，就应该改变此定义。见子条目**豪斯多夫**,**8**。

4. 重述的定义

“容量维”(见子条目**位势**,**4**)满足上面子条目 2 中的准则集，只是因为它的值恒等于 D。因此分形也能另外定义为满足

弗罗斯特曼容量维 > 拓扑维

的集。

5. 内禀的和局部的分形时间

在 1977 年的《分形》一书的第 12 章中，可找到该标题下某些原始材料。

豪斯多夫维和豪斯多夫—伯西柯维奇维

关于此标题下简便通用的参考文献有：Hurewicz & Wallman，1941，Billingsley 1967，Rogers 1970 以及 Adler 1981。

1. 卡拉泰奥多里测度

关于"在研究连续集的维数时，体积或类似数量的一般概念是不可缺少的"的思想是康托顺便得出的。面对问题的困难性，勒贝格怀疑康托能找到任何有意义的结果。该思想由于文献 Carathéodory 1914 而向前推进，并由文献 Hausdorff 1919 完成。

计算平面图形面积的经典方法是，先用一组很小的正方形来近似 $\mathcal{S}$，然后把这些正方形边长作 $D=2$ 次幂之后加起来。文献 Caratheodory 1914 推广了这种传统的方法。它用圆盘来代替正方形以避免对坐标轴的依赖性，而且努力做到不事先使用有关 $\mathcal{S}$ 在嵌入空间$\mathbb{R}^E$(已知)中的已知维数(即标准欧氏图形的维数)。

因此，当嵌入于三维空间的一个平面图形被圆盘覆盖时，当然它也被以这些圆盘为赤道的小球所覆盖。所以为了避免预知 $\mathcal{S}$ 是平面的，只要以小球代替圆盘作覆盖就足够了。当 $\mathcal{S}$ 的确是个曲面时，我们把对应于所有覆盖小球的形如 $\pi\rho^2$ 的表达式相加就得到 $\mathcal{S}$ 的近似面积。更一般地，对一个 d 维的标准形状，只要把形如 $h(\rho)=\gamma(d)\rho^d$ 的表达式相加，其中函数 $\gamma(d)=[\Gamma(1/2)]^d/\Gamma(1+d/2)$是本章前面定义过的、单位半径小球的容量。在此基础上，文献 Caratheodory 1914 把"长度"或"面积"的思想拓广到某些非标准形状。

2. 豪斯多夫测度

文献 Hausdorff 1919 超越了卡拉泰奥多里的工作，因为它容许 d 是一个分数(这时函数 $\gamma(d)$的写法继续有意义)。这样，我们就可用任意正的测试函数 $h(\rho)$(只要它随 ρ 一起趋于 0)代替 $h(\rho)$

仅为 ρ 的幂函数的局限性。

此外，当 Ω 是非欧氏空间时，只要定义了距离，小球仍可继续定义为从中心 ω 到不超过规定半径 ρ 为距离的点的全体。就像已经提到的，这样的空间称为度量空间，因此豪斯多夫测度是度量的概念。

给定一个测试（或"标准的"）函数 $h(\rho)$ 和以半径为 ρ_m 的小球组成的对集 $\mathcal{S}$ 的有限覆盖，就称 $\mathcal{S}$ 有了测度 $\sum h(\rho_m)$。为了达到覆盖得节约，考虑所有半径小于 ρ 的覆盖并构造其下界

$$\inf_{\rho_m<\rho}\sum h(\rho_m),$$

当 $\rho\to0$ 时，约束 $\rho_m<\rho$ 变得越来越严格，因此表达式 $\inf\sum h(\rho_m)$ 只能增加，就存在极限

$$\lim_{\rho\to0}\ \inf_{\rho_m\to\rho}\sum h(\rho_m)。$$

此极限既可以是有限且为正，也可以是无限的，或者为 0。这就定义了集 $\mathcal{S}$ 的 h – 测度。

当 $h(\rho)=\gamma(d)\rho^d$ 时，就称 h – 测度为 d 维的。更精确地说，根据前因子 $\gamma(d)$，这是标准的 d 维测度。

当 $h(\rho)=1/\log|\rho|$，就称 h – 测度是对数的。

3. 集合的内在测试函数

可把函数 $h(\rho)$ 称为对 $\mathcal{S}$ 内在的而且记作 $h_S(\rho)$，如果 $\mathcal{S}$ 的 h_S – 测度是正且有限的。这样的测度可称为 $\mathcal{S}$ 的分形测度。

对于欧几里德的标准形状，其内在测试函数的形式总是 $h_S(\rho)=\gamma(D)\rho^D$，其中 D 是某个整数值。而豪斯多夫表明了，带有非整数 D 的表达式 $h_S(\rho)=\gamma(D)\rho^D$ 对康托尘埃和科赫曲线是内在的。

另一方面，在典型的随机分形的情形里，即使它们是统计自相似的，内在的 $h_S(\rho)$ 也存在但更为复杂，例如形式 $h_S(\rho)=\rho^D|\log\rho|$。如果这样，$\mathcal{S}$ 关于 $h(\rho)=\gamma(D)\rho^D$ 的 h–测度为 0，因此该形状比 D–维时的要少些"物质"，而比 $(D-\varepsilon)$ 维时的有更多

的物质。平面布朗运动是个例子，莱维找到了它的 $h_S(\rho)=\rho^2\log\log(1/\rho)$。见文献 Taylor 1964。

平面上任何有界集的2-维测度都是有限的，形如 $\rho^2/\log(1/\rho)$ 的测试函数对任何平面集都不是内在的。

泰勒撰写或合作撰写了有关对随机集确定 $h_S(\rho)$ 的大量著作；有关参考文献可见 Pruitt 和 Taylor 1969。

4. 豪斯多夫—伯西柯维奇维：定义

如果已知 $\mathcal{S}$ 是2-维的，只要取 $h(\rho)=\pi\rho^2$ 计算豪斯多夫 h-测度就足够了。然而，在定义豪斯多夫测度的分式中不需要保证预先知道 D。如果要处理一个预先不知道维数的标准形状，就对所有测试函数 $h(\rho)=\gamma(d)\rho^d$（其中 d 是整数）计算测度：如果其长度是无穷而体积是0，则此形状就只能是2-维的。

伯西柯维奇把上述结论的核心推广到 d 不是整数而且 $\mathcal{S}$ 不是标准形状的情形。他表明，对每一个集 $\mathcal{S}$ 总存在一个实值 D，使得 d-测度满足：当 $d<D$ 时 d-测度是无穷，而当 $d>D$ 时 d-测度为0。

这样的 D 就称为 $\mathcal{S}$ 的豪斯多夫—伯西柯维奇维。

对物理学家说来，此定义就意味着 D 是临界维数。

D 维集的 D-维豪斯多夫测度可以是0，也可以是无穷，或者是正且有限的。豪斯多夫只有研究了第3种和最简单的类型，还显示出包含有康托集和科赫曲线。另外，如果集 $\mathcal{S}$ 是自相似的，容易看出它的相似维必须等于 D。另一方面，已经知道典型的随机集在其内在维数中具有零测度。

在一段长时间里，伯西柯维奇几乎是每篇这一主题文章的作者或合作者。当豪斯多夫是非标准维之父时，伯西柯维奇就使他自己成为非标准维之母了。

余维　当 Ω 是 $\mathbb{R}^E$ 空间，$D\leq E$，则称 $E-D$ 为余维。

5. 集合的直接积(维数加法)

设 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 分别属于 E_1-空间和 E_2-空间，现把由 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 相乘得到的集记作 $\mathcal{S}$，$\mathcal{S}$ 在 E-空间，就有 $E = E_1 + E_2$。(如 $E_1 = E_2 = 1$，$\mathcal{S}$ 是平面上点(x, y)组成的集，其中 $x \in \mathcal{S}_1, y \in \mathcal{S}_2$。)

经验法则是这样的，如 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 是"独立的"，$\mathcal{S}$ 的维数就是 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 的维数之和。

在此法则中放入了"独立性"的概念，这就证明了非常难于阐明和证明了是一般性的。见文献 Marstrand 1954 a, 1954 b; Hawkes 1974; Mattila 1975。很幸运，直观性常常是在这种情形里作了研究的指南，就像本书中所处理的那样。

6. 集合的相交(余维加法)

经验法则如下：当 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 是 E-空间的独立集合，而

$$\text{余维}(\mathcal{S}_1) + \text{余维}(\mathcal{S}_2) < E,$$

左端项几乎一定等于

$$\text{余维}(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)。$$

而当余维之和 $> E$ 时，可特别地发现其交集几乎必定是零维的。

特别，如果 $D \leqslant E/2$，两个相同维数的集合就不相交。所以把维数 $E = 2D$ 称为**临界的**。

最值得注意的是，对于给定的具有维数 $D = 2$ 的布朗轨迹，当 $E < 4$ 时两个布朗轨迹相交，而当 $E \geqslant 4$ 时不相交。

此法则显然可推广到多于两个集合相交的情形。

自相交 $\mathcal{S}$ 的 k-重点集可看成 k 个 $\mathcal{S}$ 的复制品相交。现在要试验这样的假设，即从相交维数的观点看来，k 个复制品可看成独立的。至少有一个例子，这个猜测是正确的。文献 Taylor 1966 (由德沃列茨基，厄尔多斯和角谷推广了上面的结果)研究在 $\mathbb{R}^1$和 $\mathbb{R}^2$ 中的布朗轨迹和莱维运动。轨迹的维数是 D，而其 k-重点集具有维数为 $\max[0, E - k(E - D)]$。泰勒的猜测是此结果在 $\mathbb{R}^E$空

间中对一切 k 直至 $k=\infty$ 都成立。

7. 集合的投影

经验法则是这样的，把维数为 D 的分形 $\mathcal{S}$ 沿着与 $\mathcal{S}$ 相独立的方向投影到维数为 E_0 的欧氏子空间，其投影 $\mathcal{S}^*$ 满足

$$\mathcal{S} \text{ 的维数} = \min(E_0, D)。$$

应用　设 $x_1 \in \mathcal{S}_1$ 和 $x_2 \in \mathcal{S}_2$，其中 $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathcal{S}_2$ 是 $\mathbb{R}^E$ 中的两个分形，其维数分别为 D_1 和 D_2。设 a_1 和 a_2 是非负实数，定义集合 $\mathcal{S}$ 由形为 $x = a_1x_1 + a_2x_2$ 的点组成。集 $\mathcal{S}$ 有一 D，满足

$$\max(D_1, D_2) \leqslant D \leqslant \min(E, D_1 + D_2)。$$

只要作 $\mathbb{R}^E$ 与 $\mathbb{R}^E$ 的直接积，然后投影就可得到证明。

在独立的情形，上界趋于适用。当 $D = E = 1$，$\mathcal{S}$ 既可以是分形也可以是包括区间的集合。

8. 集合的从属运算（相乘集合的维数）

见第 32 章。

9. 子维序列

当 $\mathcal{S}$ 的内在试验函数是 $h_S(\rho) = \gamma(D)\rho^D$ 时，分形特性完全由它的 D 所描述。当

$$h_S(\rho) = \rho^D[\log(1/\rho)]^{\Delta_1}[\log\log(1/\rho)]^{\Delta_2},$$

$\mathcal{S}$ 分形性质的描述更麻烦，它需要序列 D, Δ_1, Δ_2。可称 Δ_m 为从属维数，或称为子维。

子维可以影响到这样的问题：边缘集（在子条目**分形，3** 里讨论过的）是不是可称为分形。这是很有用的，包括在分形之中的，所有使 $D = D_T$ 但至少有一个 Δ 不为零的 $\mathcal{S}$ 可能会有用。

指针/余指针函数

给定集 $\mathcal{S}$，指针函数 $J(x)$ 的经典定义如下：当 $x \in \mathcal{S}$ 时 $J(x)$

$=1$，而当 $x \notin \mathcal{S}$ 时 $J(x)=0$。但当 $\mathcal{S}$ 是康托集，谢尔宾斯基点阵（垫片或地毯），分形网，或是几个另外分形类中的任一个时，$J(x)$ 是不合适的。我找到了一个不同的函数 $C(x)$，它更为方便，可以代替 $J(x)$，现在我引进它，并建议称它为余指针。

$C(x)$是 $\mathcal{S}$ 间隙指针函数的随机加权平均。换句话说，$C(x)$ 在每个间隙中是常数，而它的值在不同间隙中是恒等分布的独立随机变量。

在古老的（而且容易使人误解的）术语下，核心函数 $C(x)$在文献 Mandelbrot 1965 c，1967 b 和 1967 i 中引进和研究。

莱维稳定 随机变量和随机函数

双曲分布具有无可争议的形式上的简单性和在截断下的不变性（见条目**截断下的标度**）。而其他变换的不变性是不重要的。更重要的是在加法下的分布不变性，它们只是渐近双曲的，而莱维给它们加了个可怕的、有点过分的专门名词："稳定分布"。他还引进了稳定过程，其中双曲和稳定分布都起了重要作用。

在我的工作以前，稳定变量一直被认为是"病理学的"或者甚至是"畸形的"，而唯一的例外是霍尔茨马克随机向量（在子条目 9 中讨论）。我的主要应用在第 31、32 章和第 37 章中讨论，而对遗传学的应用将在以下的子条目 4 中涉及。

参考文献 有大量的文献，但没有令人满意的。在文献 Feller 1966（卷Ⅱ），稳定性方面的材料是完全的但很分散，当需要的时候很难查到。文献 Lamperti 1966 是本好的入门书。文献 Gnedenko & Kolmogorov 1954 仍然要推荐的。文献 Lukacs 1970 收集了许多有用的细节。原始的大专著，文献 Lévy 1925，1937 ~ 1954 并不适合每个人的胃口，因为它们展示了作者风格的不同特征（见第 40 章）。

1. 高斯随机变量是加法下的标度

众所周知，高斯分布有下面的性质。设 G_1 和 G_2 是两个独立

的高斯随机变量,且

$$\langle G_1\rangle=\langle G_2\rangle=0;\quad \langle G_1^2\rangle=\sigma_1^2,\ \langle G_2^2\rangle=\sigma_2^2。$$

它们的和满足

$$\langle G_1+G_2\rangle=0;\quad \langle(G_1+G_2)^2\rangle=\sigma_1^2+\sigma_2^2。$$

更重要的,G_1+G_2 自己也是高斯随机变量,因此高斯随机变量的性质是在独立随机变量加法下有不变性。换句话说,泛函方程

$$(L)\qquad s_1X_1+s_2X_2=sX$$

与辅助关系式

$$(A:2)\qquad s_1^2+s_2^2=s^2$$

的联立方程以高斯随机变量作为一个可能解。事实上,除了比例因子外,高斯随机变量是同时满足(L)和(A:2)的唯一分布。

此外,如果(L)与另一个辅助关系式$\langle X^2\rangle<\infty$相联立,高斯随机变量仍是唯一解。

在文献 Lévy 1925 中,(L)是深奥的研究对象,被称为**稳定性**。每当可能出现模糊不清时,我就使用麻烦的**莱维稳定性**。

2. 柯西随机变量

因为有实用头脑的科学家们倾向于认为$\langle X^2\rangle<\infty$是理所当然的,而高斯随机变量只是在稳定分布时才被广泛地承认。但在文献 Cauchy 1853, p.206 中首次承认的确不是这种情形。柯西的例子是个随机变量,它最初由泊松所研究而现在称为"简化的柯西变量"。它满足

$$Pr(X>-x)=Pr(X<x)=1/2+\pi^{-1}\tan^{-1}x,$$

因此

$$\text{柯西密度}=1/[\pi(1+x^2)]$$

柯西表明此变量是(L)与另一辅助关系式

$$(A:1)\qquad s_1+s_2=s$$

联立方程的解。对于柯西变量有$\langle X^2\rangle=\infty$,实际上有$\langle X\rangle=\infty$。因此,为了表达清楚这样的概念,即 X 与非随机量 s 乘积的标度等于 X 标度的 s 倍,我们必须用某个量(除均方根外)来测量标度,有

一个可供选用的量，即量 Q 与 Q' 之间的距离，其中 $Pr(X<Q')=Pr(X>Q)=1/4$。

柯西变量最常用于反例，例如在文献 Bíenaymé 1853，PP. 321～323 页，也见于文献 Heyde & Seneta 1977。

几何的生成模型 上面的公式 $Pr(X<x)=1/2+\pi^{-1}\tan^{-1}x$ 是从几何上得出的，即把点 W 赋予圆 $u^2+v^2=1$ 上的均匀概率分布，再把由 O 至 W 的连线与直线 $v=1$ 的相交点的横坐标记为 X。同样的做法，变量 Y（它是从 O 至 W 的连线与直线 $u=1$ 的相交点的坐标）具有与 X 相同的分布。因为 $Y=1/X$，就找到了柯西（变量）之逆仍是柯西（变量）。

此外，每当 $OW=(X,Y)$ 是平面上的各向同性分布的随机向量，Y/X 就是柯西变量。特别，两个独立高斯变量之比是柯西变量。

3. 布朗运动的递归

现在把方程（L）与

$$(A:0.5) \qquad s_1^{0.5}+s_2^{0.5}=s^{0.5}$$

相联立。它的解是个随机变量，其密度当 $x<0$ 时为 0，而在其他情形则等于

$$p(x)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-1/2x)x^{-3/2}。$$

而量 $p(x)\mathrm{d}x$ 就是满足下述条件的布朗函数所寻求的概率，此条件是：满足 $B(0)=0$ 和对 $[x,x+\mathrm{d}x]$ 中的某些 t 满足 $B(t)=0$。

4. 一般的莱维稳定变量

柯西也考察了一般的辅助关系式

$$(A:D) \qquad s_1^D+s_2^D=s^D。$$

对称解 柯西断言，在形式计算的基础上，对每个 D，（L）与（$A:D$）的联立式有一个解，即密度为

$$\pi^{-2}\int_0^\infty \exp(-u^D)\cos(ux)\mathrm{d}u$$

的随机变量。

波里亚和莱维表明，当 $0 \leqslant D \leqslant 2$ 时，柯西的断言的确已被证实，高斯和柯西分布是两种特殊情形。但当 $D>2$，柯西的断言是无效的，因为上面写出的形式密度要取负值，这是荒谬的。

极不对称解 莱维还表明，(L)和(A:D)的组合中已考虑到不对称解。对于大多数极不对称的解，生成函数(拉普拉斯变换)被确定且等于 $\exp(g^D)$。

其他的不对称解 (L)和(A:D)组合的一般解是两个独立且恒等分布的极不对称解之加权差分。习惯上把权记为 $1/2(1+\beta)$ 和 $1/2(1-\beta)$。

(L)的最后推广 保持(A:D)不变，将条件(L)替代为

$$(L^*) \qquad s_1 X_1 + s_2 X_2 = sX + \text{常数}。$$

当 $D \neq 1$ 时这种变化没有造成什么差别，但当 $D=1$ 时就要考虑到另外的解，称为不对称的柯西变量。

细菌突变株体 文献 Mandelbrot 1974 d 表明，在老的细菌培殖(即卢里亚—德尔布吕克问题)中，突变株体的总数是具有极不对称性的莱维稳定变量。

5. 莱维稳定密度的形状

除了三种例外(即具有 $\beta=0$ 的 $D=2$，具有 $\beta=0$ 的 $D=1$ 以及具有 $\beta=1$ 的 $D=1/2$)，莱维稳定分布的封闭解析形式是未知的，而这三种简单例外的性质推广到其他的情形。

在所有极不对称且 $0<D<1$ 的情形里，对 $x<0$，其密度为 0。

把高斯密度为 $\exp(-1/2x^2)$ 推广到具有 $0<D<2$ 的所有极不对称情形的短轨迹。其密度正比于 $\exp(-c|x|^{D/(D-1)})$。

对 $x \to \infty$，柯西密度正比于 $(\pi)^{-1}x^{-D-1}$，而布朗递归密度正比于 $(2\pi)^{-1/2}x^{-D-1}$。更一般化，对一切 $D \neq 2$，在长轨迹中的密度正比于 x^{-D-1}。

此外，$p(u)$ 的行为必须从数值上求得。下列文献给出了数值图形：对 $1<D<2$，文献 Mandelbrot 1960 e 关于极不对称的情形，在

文献 Mandelbrot 1962 p 中有关 D 十分接近 2 的情况还加了注释，而文献 Mandelbrot 1963 b 是关于对称的情形。用快速傅立叶变换技术来完成此任务十分漂亮，见文献 Dumouchel 1973，1975。

6. 加数之间的不等性和合成聚集

设 X_1 和 X_2 是具有相同概率密度 $p(u)$ 的两个独立随机变量，$X = X_1 + X_2$ 的概率密度就是

$$p_2(u) = \int_{-\infty}^{\infty} p(u)p(u-y)\mathrm{d}y。$$

如果和式 u 已知，不论哪一个加数 y 的条件密度是 $p(y)p(u-y)/p_2(u)$。让我们详细地考察该密度的形状。

例子　当 $p(u)$ 是单位方差的高斯（概率密度）时，因此是单峰函数（= 它有单个极大值），其条件分布是集中于 $1/2u$ 的高斯且有独立于 u 的方差 1/2（见条目**布朗分形集**）。当 $u \to \infty$，加数就成为越来越接近到等于相对值。

当 $p(u)$ 是约化柯西密度时（它再次是单峰的）必需区分两种非常不同的情形。当 $|u| \leqslant 2$（它发生于一半时间），条件分布再次是单峰的，大多可能值也是 $1/2u$。相反，当 $|u| > 2$，值 $1/2u$ 成为最小可能的（局部地）。对 $(u) = 2$，条件分布分岔为两个分开的“尖形区”，它们分别集中于靠近 $y = 0$ 和 $y = u$。当 $u \to \pm\infty$，这些尖形区越来越难于与集中于 0 和 u 的尖形区相区别了。

当 $p(u)$ 是布朗递归密度时，其位置就像柯西情形里一样而且更加极端，其条件密度是双峰的，具有概率 $> 1/2$。

系　考虑随机行走的 3 个连续的相交零点 T_{k-1}，T_k 和 T_{k+1}。如果 $T_{k+1} - T_{k-1}$ 很大，中间的交点最大的可能是聚集在极端地靠近 T_{k-1} 或者 T_{k+1}，而以最小的可能落在该两点的中间。◁此结果与概率论中的一个著名的反直观结果——莱维的反正弦律——有关。▶

下面来考虑 U 的条件分布，设 M 个变量 U_g 的和取一个非常大的值 u，在高斯的情形里，最大的可能结果是每个加数很接近

u/M。而在柯西的情形和布朗的情形里却相反，最大的可能结果是除 1 以外的所有加数都是略小的。

在"恒等地"贡献于一个和的思想里隐藏着陷阱 在具有同样分布的意义下，加数是先验地恒等的，这就容许它们的经验值或者是接近于相等（就像在高斯的情形），或者是不同程度地不等（就像在稳定莱维的情形里，当和非常大）。

7. 非标准的中心极限，双曲变量法则

给定独立的无限序列 X_0 和恒等分布的随机变量，其中心极限问题就要问是否可以选到权 a_n 和 b_n，使得和 $a_N \sum_1^N X_n - b_N$ 当 $N \to \infty$ 时存在非平凡的极限。

在标准情形 $\langle X_n{}^2 \rangle < \infty$，回答是标准和肯定的：$a_N = 1/\sqrt{N}$ 和 $b_N \sim \langle X_n \rangle \sqrt{N}$，而极限是高斯的。

非标准情形 $\langle X_n{}^2 \rangle = \infty$ 更要复杂得多：(a) 并非总能选到 a_N 和 b_N。(b) 即使可选到，极限是稳定的非高斯。(c) 为使极限的指数是 D，对 X_n 的充分条件为分布是指数 D 的渐近双曲（第 38 章）。(d) 充要条件可在本条目开头的参考文献中找到。

8. 莱维稳定线—线函数

这些随机变量具有平稳的独立增量而且使得增量的随机变量 $X(t) - X(0)$ 是莱维稳定的。标度因子 $a(t)$，为了使 $[X(t) - X(0)]a(t)$ 独立于 t，就必须取形式 $a(t) = t^{-1/D}$。此方法把普通布朗运动推广到 $D \neq 2$。

$X(t)$ 最惊人的性质就是它的不连续性和包括有跳跃。

$D<1$ 的情形 这时，$X(t)$ 只包括跳跃。这些出现在时间 t 和 $t+\Delta t$ 之间而且有一个绝对值超过 u 的数是泊松随机变量，且其期望等于 $|\Delta t| u^{-D}$。

正的和负的跳跃的相关数是 $1/2(1+\beta)$ 和 $1/2(1-\beta)$。极不对称情形 $\beta = 1$ 仅包含正的跳跃；这就称为稳定的从属过程，并用

以定义在图 31-2 至图 31-4 中的莱维阶梯。

悖论 因为当 $u \to 0$ 时 $u^{-D} \to \infty$，无论 Δt 的长度怎样小，跳跃的总期望数是无限的。相伴的概率是无限的，这一事实似乎是个悖论。但当我们注意到跳跃（对它 $u < 1$）加到有限的累计总和上时这种矛盾的感觉就没有了。当注意到小的跳跃的期望长度是有限的以后这个结论也就很自然了。它是正比于

$$\int_0^1 Du^{-D-1} u \mathrm{d}u = D \int_0^1 u^{-D} \mathrm{d}u < \infty。$$

$1 < D < 2$ 的情形 现在，上面写出的积分式成为发散的，因此小的跳跃的总分布是无限的。结果，$X(t)$ 包含一个连续项和一个跳跃项；这两项都是无限的但它们的和是有限的。

9. 稳定的莱维向量和函数

设稳定性定义中的泛函方程（L）改变为把 X 作为随机向量 $\boldsymbol{X}$。给出单位向量 V，显然方程（L）和（$A:D$）的联立有一个基本解，即向量 V 与标量（稳定变量）相乘。

文献 Lévy 1937 ~ 1954 表明，一般解仅是如下基本解之和，即对应于空间的所有方向以及在单位球面上的分布作为加权。这些分布可以是离散的（有限的或者可列无限的），或者是无限小的。为了向量 X 是各向同性的，基本分布就必需是在所有方向都是均匀地分布的。

稳定的莱维时间向量函数 这些函数容许把分解成相同的类（就像稳定的标量函数）加入到服从双曲分布的跳跃之和中去。跳跃的大小和方向由在单位球面上的分布所控制。

霍尔兹马克分布 霍尔兹马克在频谱学方面的工作曾借助于牛顿引力理论而重新阐述（文献 Chandrasekhar 1943）；在我的工作之前，仅包含莱维稳定分布的具体事件。假定在 O 点存在一颗星，而其余单位质量的星分布在整个空间，它们相互间独立而且带有期望密度 δ。这些星作用在 O 点的总引力有多大？在牛顿发现 r^{-2}引力定律以后不久，本特利写到这方面时指出（实际上），这

些星在以 O 为顶点的细长铅笔 $d\Omega'$ 内的引力有无限的期望，所以这些星在铅笔 $d\Omega''$（与 $d\Omega'$ 关于 O 点对称）的引力也是一样的。本特利就推断这些无限性之间的差别是不确定的。

霍尔兹马克问题（通常指重述过的）避开了涉及实际引力超过其期望的困难。我们从界于上述的角度为 $d\Omega$ 的角束和半径为 r 和 $r+dr$ 的球面中的区域开始。每颗星都受到引力 $u=r^{-2}$ 而它们的数是泊松变量（它的期望是 $\delta|d\Omega|d(r^3)=\delta|d\Omega|\cdot|d(u^{-3/2})|$）。因此超过期望的引力有特征函数

$$\exp\{\delta|d\Omega|\int_0^{\infty}[\exp(i\zeta u)-1-i\zeta u]|d(u^{-3/2})|\}。$$

这原来是对应于指数为 $D=3/2$ 和 $\beta=1$ 的莱维稳定变量。由上面的子条目 6，一个大的正值是非常可能的，因为现在的情形是只有靠近 O 点的单星而不考虑别处星的密度；U 分布对于大的 u 其行为就像最靠近星的分布一样。

因此全部过剩引力是各向同性的莱维稳定向量，其 $D=3/2$。

稳定性的意义是这样的，如果有两种均匀分布的红星群和蓝星群，由红星单独作用，或者由蓝星单独作用，或者由红星和蓝星一起作用，它们在 O 点作用力的不同仅仅相差一个标度因子，而在它们分布的解析形式上却没有差别。

10. 稳定的空间—线随机函数

由文献 Chentsov 1957 给出的空间—线布朗函数，在文献 Mandelbrot 1975 b 中推广到稳定的情形。

11. 维数

对非高斯的情形，最早计算稳定过程维数的是文献 McKean 1955 和 Blumenthal & Getoor 1960 c。在文献 Pruitt & Taylor 1969 中，有大量的文献目录。

12. 在有权加法下的标度（文献 Mandelbrot 1974c，f）

就像在本章子条目无腔隙分形 4 中所讨论的，文献 Mandelbrot

1974c,f 提出了一族推广的莱维稳定变量。它们包含有莱维稳定性条件(L)的推广,其中的权 s,μ 成为随机的。

列弗希茨—赫尔德(Lipschitz-Hölder)直觉法

最初,分维是一种局部性质,尽管本书中局部性质是反映出全局性质的。因此,对于一张其他的任意连续函数 $X(t)$的图形,D 必然与其他的局部性质有关,而最有用的就是列弗希茨—赫尔德(LH)指数 α,在 $t+$ 的 LH 条件可表示为

$$X(t)-X(t_0)\approx|t-t_0|^{\alpha},\text{对 } 0<t-t_0<\varepsilon;$$

而对于 $t-$也是类似的。在$[t',t'']$中的全局 LH 指数是$\lambda[t',t'']=\inf_{t'\leqslant t\leqslant t''}\alpha$,除非 $X(t)$是常数,$\lambda\leqslant 1$。

LH* 直觉法和 *D 给定 α,为覆盖 X 在时间 t 和 $t+r$ 之间的图形所必需的、边长为 r 的正方形数目,取等于 $r^{\alpha-1}$就足够了。用这种方式,对 X 在 $t\in[0,1]$的图形取 N 个正方形就能覆盖,再经大致的量纲分析就产生出 $D=\log N/\log(1/r)$。这种猜测 D 的方法在这里就记为**列弗希茨—赫尔德直觉法**,这是鲁棒且有效的方法。

例子 当 X 对 0 和 1 之间的每个 t 都可微时,略去使 $X'(t)=0$ 的那些点,就到处有 $\alpha=1$,而覆盖图形所需要的正方形数目是 $N\approx r^{\alpha-1}(1/r)=r^{-1}$。然后就是 $D=1$,当然正是这种情况。

当 $X(t)$是普通的或分数的布朗函数时,能够表明 $\alpha\equiv\lambda=H$。直觉法的 N 是 $N\approx r^{H-1-1}$,因此 $D=2-H$,再次与已知的 D 相符合。

◁对于在条目**外尔斯特拉斯**……中的函数,文献 Hardy 1916 表明 $\alpha\equiv H$。因此可猜测豪斯多夫—伯西柯维奇维是 $2-H$。▶

康托阶梯的情形就相当不同。这里的 X 仅随 t 变化,而 t 属于分维 $\delta<1$ 的分形尘埃,α 依靠于 t。把$[0,1]$划分为 $1/r$ 个长为 r 的时间跨度。在 $r^{-\delta}$跨度里 $\alpha=\delta$,而在其他跨度里 α 是不确定的。但如果把坐标轴转过一点,就发现 $\alpha=1$。因此由直觉法所需覆盖正方形数目是 $r^{-1}+r^{\delta-1}r^{-\delta}=2r^{-1}$,以及由直觉法维数是 D

$=1$。的确是这种情形，就像在第119页的图形说明中所表明的。

此外，一个布朗函数和一个康托阶梯($\delta < H$)的和产生 $D=2-H$ 和 $\lambda=\delta$，因此 $1<D<2-\lambda$。

总结　由直觉法不等式 $1\leqslant D\leqslant 2-\lambda$，此猜测已由文献 Love & Young 1937 和 Besicovitch & Ursell 1937 所证实。也可见文献 Kahane & Salem 1963 第27页。

论分形的定义　条目**分形**……涉及希望把术语分形的范围拓广到包含康托阶梯。难道我们能说一条曲线当 $\lambda<1$ 而对“充分多的 t”α 靠近 λ 时是分形吗？我更喜欢不走这条路，因为这样的拓广很麻烦，还要区别 $D_T=0$ 和 $D_T>0$ 的不同。

线—面函数　设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是连续函数，其 LH 指数是 λ_1 和 λ_2。由直觉法提出，覆盖坐标为 $X(t)$ 和 $Y(t)$($t\in[0,1]$)的向量函数的图形最多需要 $r^{\lambda_1+\lambda_2-3}$ 个边长为 r 的立方块，因此 $1\leqslant D\leqslant 3-(\lambda_1+\lambda_2)$。对于普通布朗线—面轨迹，就得到正确的 $D=2$。

投影　现在，由在(x,y)平面上的投影$\{X(t),Y(t)\}$形成一条连续轨迹。当 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$ 时，由直觉法提出需要至多 $1/r$ 个边长为 r^λ 的正方形，因此 $1\leqslant D\leqslant \min(2,1/\lambda)$。类似地，考虑函数 $\{X(t),Y(t),Z(t)\}$(它的坐标有相等的 LH 指数 λ)的连续轨迹。由直觉法提出 $1\leqslant D\leqslant \min(3,1/\lambda)$。当 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 时，$\{X(t),Y(t)\}$ 的连续轨迹必须由边长为 $r^{\max\lambda}$ 的正方形覆盖，因此

$$1\leqslant D\leqslant 2-\max\{0,(\lambda_1+\lambda_2-1)/\max(\lambda_1,\lambda_2)\}。$$

所有这些都被文献 Love & Young 1937 所证实。

中间的和跳跃的多边形

此标题(与皮亚诺曲线有关)下的材料可在1977年版的《分形》一书的第12章中找到。

音乐:标度的两个性质

音乐至少有两个标度性质值得提到:

平均律的音乐音阶以及与修正的外尔斯特拉斯函数的频谱之间的关系　拉丁字根 *scala* = 阶梯,是最普遍应用的。当然,在本书中一直遇到的术语标度(*scaling*)里找不到的。但在音乐的音阶概念里,它就隐含着由频率相乘所维持的离散谱。在平均律音阶里频率按对数律传播。例如,12-调音阶相应于基 $b=2^{1/12}$。结果,每种乐器的基本旋律就是在它的全频带内造成低频的高段,以及高频的低段。

外推到无声的高频和低频,如此的一个频谱成为具有同样 b 值的外尔斯特拉斯(修正)函数是相同的。因此,为了在一支乐曲中增加低频,只要增加能发出所期望的低调的新乐器设备就足够了。

欧拉—傅立叶定理把最一般的周期函数表为线性的空间调和级数。代表最一般乐曲里的基本旋律序列的函数是非常受限制的函数。

乐曲作为标度的($1/f$)噪声(沃斯)　乐曲的第二标度方面涉及到音频信号各种测量时间的变分,音频信号例如有功率(测量它强度的平方),或者它的瞬时频率(测量音频信号的零交点比率)。文献 Voss & Clarke 1975 和 Voss 1978(也可见文献 Gardner 1978)从两方面考察了多位作曲家如巴赫,贝多芬和皮特尔斯的作品,即上述的测量及音频信号是标度噪声,$1/f$ 噪声,就像在第 311 页上所描述的。

相反,如果由外部的物理噪声源(具 $1/f^B$ 谱和变化的标度指数)触发起随机乐曲,文献 Voss & Clarhe 1975 和 Voss 1978 找到其合成音是最接近于"类乐曲"(当触发是 $1/f$ 噪声)。

这完全不是期望的发现,但就像本书中许多重要的发现一样,在事实面前它成为"自然的"。我所赞成的论点是,音乐作品(就像

它们的名字所标明的)由如下组成:首先,以大体上不同的节拍和(或)吵闹声的级别为特征划分为乐章,用同样方式再把乐章进一步划分。而教师们坚持每一支乐曲(直至最短的有意义的小节)都是组成的,结果必定是标度!

然而,此标度范围没有拓展到一个音符的时间跨度以下,较高的频率受到完全不同的机理(包括肺、小提琴琴身和木管乐器的管子的共振)所支配,因此高能量谱更像是 f^{-2} 而不是 f^{-1}。

无腔隙分形

按第 34 章中腔隙的定义,在空间 $\mathbb{R}^E$ 中的一个无腔隙集应与该空间中的每一个立方块或球面相交。用数学术语说,它是处处稠密的,因此是非闭的。(处处稠密的闭集只有 $\mathbb{R}^E$ 本身!)此条目表明,这样的分形是存在的,但是从本书中相近的分形中非常难以"感觉到"。一个关键的征兆是豪斯多夫—伯西柯维奇维仍是可用的,但是相似性维和闵可夫斯基—波利高维都等于 E 而不是豪斯多夫—伯西柯维奇维 D。

1. 相对间歇性

此现象(无腔隙分形由此现象而得名)分散在本书的各处,在这种意义下,我研究自然界分形的许多情形忽略了某些关于大自然的确切知识。

我们忘掉第 8 章中关于引起分形误差的噪声使得误差之间变弱了但没有停止。

我们略去第 9 章中关于存在星际物质的知识。它的分布无疑至少像星一样无规则的。事实上,不可能定义密度的观念对于星际物质要比对星球物质更强和更易接受。从文献 de Vaucouleurs 1970 中摘出:"这似乎是难以相信的,虽然可见物质是特别大的块而且丛生在一切标度上,而不可见的星群间的气体是均匀和齐次的……[它的]分布必定密切相关于……银河系的分布"。其他的

天文学家写下了星群间的小物质和蜘蛛网。

而第 10 章中湍流耗散像点心状的纸片显然是对现实过分简化的观点。

在第 9 章的末尾十分简短地涉及用分形观点讨论矿物的分布。这里利用闭分形就可推出,在哪些能够开采出铜矿的区域之间不再有铜矿集中的地方。事实上,在大多数地方都是非常稀少的,但不能认为到处都没有。

在每一种情形里,某些不很感兴趣的区域被人为地挖空使之可以应用闭的分形集,但是最后必须填满这些区域。用新奇的混血儿即无腔隙分形就可做到。举个例子,在宇宙中的无腔隙分布将是这样的:没有一部分空间是空的,但是对于每一个小阈值 θ 和 λ 的集,质量比至少 $1-\lambda$ 集中在相对体积至多 θ 的一部分空间。

2. 从德魏斯的摘录和注释

在文献 de Wijs 1951 中描述的基本直观环境就是无腔隙分形,文献作出了“工作假设”,这是有价值的总结。

考虑一个吨位为 W 和平均等级为 M 的矿物体。现在设想对其猛砍一刀分为两半,各有相等的吨位 $1/2W$ 及不同的平均等级。认为那较丰富一半矿物的等级为 $(1+d)M$,则那较贫乏一半的等级必需是 $(1-d)M$ 以满足两半加在一起的平均(等级)仍为 M……其次设想把矿物体切为四部分,都有相同的吨位 $1/4W$ 而平均等级分别为 $(1+d)^2M$,$(1+d)(1-d)M$,$(1+d)(1-d)M$ 和 $(1-d)^2M$。第 3 次则切为 $2^3=8$ 块,即 1 块的平均等级为 $(1+d)^3M$,3 块为 $(1+d)^2(1-d)M$,另 3 块为 $(1+d)\cdot(1-d)^2M$,还有一块是 $(1-d)^3$。能够想象,继续划分成越来越小的块……

“作为对可变性的度量以系数 d 来代替笼统的不可捉摸的量(说心里话,感到矿物的估算是一门艺术而不是科学)是很合适的,而且基于这种度量的统计推论能够废除那些经验法则和指点直观方法的迷津。”

注释 德魏斯甚至没有从探索该模型的几何形状开始，以及既不是他也不是他的杰出的继承者（包括马西森）对分形有先知。然而，如果假定密度对等级是独立的，使吨位等价于体积，同样的方案已由纯数学家伯西柯维奇和他的合作者为了完全不同的目标而精确地研究过。

提前用下个子条目，如果德魏斯的（重述过的）方案继续下去直至无穷，矿物就凝结进无腔隙分形，把它的维数用通常形式写出来是 $D=\log N^*/\log 2$，必须把 $\log N^*$ 定义为

$$\log N^* = -\sum \pi_i \log \pi_i,$$

其中 $\pi_1=(1+d)^3$，$\pi_8=(1-d)^3$，$\pi_2=\pi_3=\pi_4=(1+d)^2(1-d)$ 以及 $\pi_5=\pi_6=\pi_7=(1+d)(1-d)^2$。

结论 德魏斯的大块文章极受鼓舞，但系数 d 是不合适的度量，因为它仅仅应用于一个模型。矿物可变性的合适度量是 D。

3. 伯西柯维奇加权凝结

为了评价伯西柯维奇的成果，最好的办法是把它们在[0,1]上以 $b=3$ 重新阐述。

假定 从[0,1]上密度等于1的质量分布开始，而且把它们分配在通过三个权因子 W_0, W_1, W_2 的随机相乘而得到的3个"一段"上，其中的三个权因子要满足下列条件：

(A) $1/3W_0+1/3W_1+1/3W_2=1$。这表示质量是守恒的，而且推出每个 W_i 以 b 为界。量 $1/3\ W_i$ 是在第 i 个"三分之一段"上的质量，记它为 π_i。

(B) 排除均匀分布 $W_i \equiv 1/3$。

(C) $W_0W_1W_2>0$。特别，要排除康托结构——相应于 $W_0=1/2$，$W_1=0$ 和 $W_2=1/2$。

以后的级联过程的阶段是类似的；例如，在子涡上的密度是 $W_0^2, W_0W_1, W_0W_2, W_1W_0, W_1^2, W_1W_2, W_2W_0, W_2W_1, W_2^2$。

结论 如上迭代直至无穷，就得到如下的结果，它大部分来自伯西柯维奇和埃格雷斯顿（Eggleston）的工作。（文献 Billingsley

1965是宝贵的注释。)

(A) 奇异性,伯西柯维奇分形　几乎每点的密度渐近于零。由那些渐近密度不为零(在那里是无穷)的点构成的集合就称为伯西柯维奇分形,记作 $\mathcal{B}$。它是[0,1]中的点集,它的三重进制设计是使得比率

$$k^{-1}(\text{头 } k \text{ 位“数字”里 } i \text{ 的个数})$$

收敛于 π_i。这些点构成一个开集:上述点的序列的极限可不在该集。

(B) 无腔隙性　质量的极限分布是处处稠密的:甚至渐近地没有完全空的开区间(无论怎么小)。在0与 t 之间的质量随 t 严格增长。在 ΠW 中未能收敛于0的那些点在实际数目中是非常稀少的,它们的绝对数目确保在任何区间 $[t', t'']$ 里的质量当 $k \to \infty$ 时有非零的极限。

(C) $\mathcal{B}$ 的豪斯多夫—伯西柯维奇维　它是

$$D = -(\pi_1 \log \pi_1 + \pi_2 \log \pi_2 + \pi_3 \log \pi_3)。$$

在形式上,D 是在热力学中定义的“熵”,否则就是由山农定义的“信息”(见文献 Billingsley 1965)。

(D) $\mathcal{B}$ 的相似维　它是1。的确,$\mathcal{B}$ 是自相似的且 $N = 3$ 和 $r = 1/3$,因此 $D_S = \log 3/\log 3 = 1$;要附加下标 S 的原因马上就会明白出来。类似地,三维变量有维数3。在这种情况不会有大量实际的意义:首先,它不依赖于各个 W_i,只要满足此条件就强加上去;第二,如果把 $\mathcal{B}$ 以它的康托尘埃极限代替,它就从1跳到 $\log 2/\log 3$。

此外,在自相似性上已不再能找到分形分布。的确,如果在所有长为 3^{-k} 的各段上配置相等的权重,最后的分布就在[0,1]上均匀的。它与 W_i 的值无关,它不同于这种度量——由此度量就可产生集合本身。还有,通过康托尘埃极限,均匀分布连续地变化得非常不均匀。

(E) $\mathcal{B}$ 的“凝聚集”的相似维　这是 D。问题在于,伯西柯维奇测度十分近似分形齐次测度于这样的度量,即它的相似维等于

豪斯多夫—伯西柯维奇维 D。更精确地讲，当级联步骤次数 k 很大以后，原始均匀质量的覆盖块变成凝聚在 3^{kD} 个长为 3^{-k} 的三元区间上。这些区间在[0,1]上不是均匀分布的，而且它的最大间隙当 $k\to\infty$ 时趋于 0。

注释　必须区别两种集，“充满集”必定包含总质量，而“部分集”里质量块是凝聚的。这两种集都是自相似的，但是它们的自相似维 D_s 和 D 是不同的。见以下的条目 5。

4. 随机加权凝固(Mandelbrot 1974 f, c)

在文献 Mandelbrot 1974 f, c 中介绍了对伯西柯维奇方案自然而丰富的推广，而在文献 Kahane & Peyriere 1976 中又有发展。

每个级联阶段的效果是在每个涡的 b^3 涡里的密度乘以恒等分布的统计独立的随机权重 W_i。

在加权凝固级联的 k 阶段以后，质量的覆盖块成为由大量的数量级为 b^{kD^*}（超出了总数 b^{3k}），其中

$$D^* = -\langle W\log_b(r^3W)\rangle = 3-(W\log_b W)。$$

特别，如果 W 是离散的而且它的可能值 W_i 分别具有概率 p_i，就有

$$D^* = 3-\sum p_iW_i\log_b W_i。$$

$D^*>0, D=D^*$ 的情形　由加权凝固产生的测度近似于维数为 $D=D^*$ 的分形齐次测度，就像在第 23 章中所得到的。

$D^*<0, D=0$ 的情形　非空胞的数目渐近地趋于 0，因此其极限几乎必定是空集。

概括起来，质量的载体由 $D=\max(0, D^*)$ 的闭集所逼近。

截面　类似地，在平面或线性截面上的质量集聚在相对少的涡数，分别为 $b^{(D^*-1)}$（总数 b^2 之外）和 $b^{(D^*-2)}$（总数 b 之外）。因此，截面是非退化的，只要分别有 $D^*>1$ 或 $D^*>2$，以及它们分别由维数为 D^*-1 或 D^*-2 的分形所逼近，这样，截面的维数服从像对腔隙分形同样的法则。

新随机变量，在有权加法下的不变性 记 X 为这样的随机变量，它支配任意一个 k 阶涡里的质量，或者支配维数为 Δ 的直线或平面的截面。我表明，该 X 满足泛函方程

$$(1/C)\sum_{g=0}^{C-1} X_g W_g = X,$$

其中 $C = b^{\Delta}$，随机变量 W_g 和 X_g 均独立，而等式表示分布是恒等的。此方程推广了在子条目**莱维稳定变量**……里讨论的方程(L)；它们在曼德布罗特以及 Kahane & peyriere 的著作引文中有讨论。

5. 极限对数正态随机凝结和函数(Mandelbrot 1972 j)

文献 Mandelbrot 1972 j 放弃了涡格，其绝对的和加权的凝固都是从康托处借用的概念。没有预先描述涡，但就像质量分布一样用同样的统计机理产生出涡。此外离散的涡层合并进连续统。

有目标的极限对数正态函数 我们继续逐次修正对(为简单起见)单变量函数 $L(t)$实施的加权凝固。

在第 n 个阶段后，加权凝固的密度是函数 $Y_n(t)$，它使 $\Delta\log Y_n(t) = \log Y_{n+1}(t) - \log Y_n(t)$是阶梯函数；当 t 是 $b^{-n} = r^n$ 的整数倍时它就改变，而在这些时刻之间的值是形为 $\log W$ 的独立随机变量。现在设 $\Delta\log W$ 是均值为 $-1/2(\log b)$和方差为 $\mu\log b$ 的对数正态。我们发现在 $\Delta\log Y_n(t)$和 $\Delta\log Y_n(t+\tau)$之间的协方差在区间$|\tau| < r^n$ 内取值 $\mu(\log b)(1-|\tau|/r^n)$，而在此区间外为 0。$\Delta\log Y_n(t)$不是高斯的，因为其值的联合分布(对 2 个或更多的 t)不是多维高斯随机变量。

第 1 次修正 以 $\Delta\log Y_n^*(t)$ [它是定义为带有极少不同协方差 $\mu(\log b)\exp(-|\tau|/r^n)$的高斯随机函数]代替 $\Delta\log Y_n(t)$。此结果保持与原始同样的“依赖范围”，但它使 r^n 期间涡之间的离散边界分裂了。

第 2 次修正 以连续参量 λ 代替离散参量 $n\log b$。有限差分 $\Delta\log Y_n^*(t)$之和变为无限小微分 $d\log L_\lambda(t)$(其均值为 $-1/2\mu d\lambda$，

方差为 $\mu d\lambda$)的积分,而涡成为连续的。

$L(t)$的定义　考察极限

$$L(t)=L_{\infty}(t)=\lim_{\lambda\to\infty}L_{\lambda}(t)。$$

随机变量 $\log L_{\lambda}(t)$是高斯的(其均值为$\langle\log_{\lambda}(t)\rangle=-1/2\lambda\mu$,方差为 $\sigma^2\log L_{\lambda}(t)=\lambda\mu$)。这就保证$\langle L_{\lambda}(t)\rangle=1$对一切 λ 成立。但是,$L_{\lambda}(t)$的极限不是非退化的就几乎必然为0。此问题在数学上还没有解决,但如下的直觉法论证无疑可严格地做到。现对更有兴趣的三维变量的函数 $L(x)$加以阐明。

极限对数正态测度的凝聚集　为了得到一种集(其中的$L_{\lambda}(t)$不是小的而是极大)的想法,最方便的就是应用边为 r^n 的参考正方形。没有外加的子涡,而仅仅是一种测量方法。当 $n>>1$ 和 X 固定时,对数正态 $L_{n\log b}(x)$就有极接近于0的极高概率,因此在绝大多数区域里是极小的。

因为 $L_{n\log b}(x)$是连续的,它在边为 r^n 的胞上变化很小,因此对于(具有对数正态 W 的加权凝固的)凝聚集的导数也可应用到现在的模型。略去对数项,大多数贡献 $L_{n\log b}(x)$积分的胞数目有期望 $Q=(r^{-n})^{D^*}$,而 $D^*=3-\mu/2$。

当 $\mu>6$,因此 $D^*<0$,当 $\lambda\to\infty$时 $Q\to0$,$L(x)$几乎必然退化。

当$4<\mu<6$,因此$0<D^*<1$,$L(x)$是非退化的且 $D=D^*$,但它在平面和直线上的迹几乎必然退化。

当$2<\mu<4$,因此$1<D^*<2$,$L(x)$和它在平面上的迹是非退化的,具有维数 D^*和 D^*-1,但它在直线上的迹几乎必然退化。

当$0<\mu<2$,因此$2<D^*<3$,$L(x)$和它在平面及直线上的迹都非退化的,其维数是 D^*,D^*-1 和 D^*-2。

6. 测度的凝聚的维数

关于间歇现象的研究,也提出了另外的维数定义。代替度量空间中的集,改为考虑测度 $\mu(\mathcal{S})$,它定义在有界子空间 Ω(在包

含小球的适当的 σ-域),而且有下面的性质:(A) 当 $\mathscr{S}$ 是个小球, $\mu(\mathscr{S})>0$ 以及 $\mu(\Omega)=1$,因此"使 $\mu>0$ 的集"恒等于 Ω。(B) 然而直观上认为,μ 凝聚在 Ω 中非常小的部分。我们要寻找把 (B) 定量化的新方法。

给出 $\rho>0$ 和 $0<\lambda<1$,考虑集合 $\sum\lambda$,它满足 $\mu(\Omega-\sum\lambda)<\lambda$。设 $N(\rho,\sum\lambda)$为覆盖 λ 所需要的、半径为 ρ 的小球数目的下确界。定义

$$N(\rho,\lambda)=\inf N(\rho,\textstyle\sum_{\lambda})。$$

类似维数的表达式

$$\lim\inf_{\alpha\downarrow 0}\log N(\alpha,\alpha)/\log(1/\alpha),$$

$$\lim\inf_{\rho\downarrow 0}\log N(\rho,\lambda)/\log(1/\rho),$$

$$\lim\inf_{\lambda\downarrow 0}\lim\inf_{\rho\downarrow 0}\log N(\rho,\lambda)/\log(1/\rho)。$$

我发现潜伏在后的某些直觉法估算很有用,但应该欢迎严格的探索。当然,试探估算以相对于某些观察到的覆盖 $\sum\lambda$ 以实际的 $N(\delta,\sum\lambda)$代替 $\lim\inf N(\delta,\lambda)$。

皮亚诺曲线

关于本标题和不完整的计算基础方面的附加材料,可在 1977 年版《分形》的第 12 章中找到。

位势和容量,弗罗斯特曼维

豪斯多夫—伯西柯维奇维 D 在经典位势和广义(Marcel Riesz)位势(其核为 $|u|^{-F}$,而 $F\neq E-2$)的现代理论中起着核心作用。在新近的对位势理论的非基础性研究之中,我支持文献 du Plessis 1970,第 3 章,而更详细的可见文献 Landkof 1966 ~ 1972。

1. 猜想

应该注意到特殊值 $D=1$ 与 $\mathbb{R}^3$ 中的牛顿势直接相连。这种

连接构成了第 10 章中有关各种宇宙学理论（它预测 $D=1$），例如富尼耶和琼斯—霍伊尔理论。

如果改变这些理论的措辞而作为牛顿引力论的系，应该也是可能的。

这样，离开观察值 $D\approx 1.23$ 而从 1 出发，也应追踪到非牛顿（相对论的）效应。

2. 维数和位势：直觉法

就像在第 10 章所提到的，本特利和牛顿知道开普勒的明亮天空效应（“奥尔勃斯佯谬”）借助于引力势也有相对应的结果。假定 $E=3$，在距原点 ω 半径为 R 的球面上的质量 $M(R)$ 正比于 R^D 而 $D=3$，因此在 ω 的总位势 $\left(\text{它正比于} \int R^{-F}R^{D-1}\mathrm{d}R=\int R\mathrm{d}R\right)$ 在无穷远处发散。当 $D=3$ 而 $F>3$ 时就不会在无穷远处发散。这就推出非牛顿势。同样的结果也在 $F=1$ 和 $D<1$ 的富尼耶—沙利耶模型中得到。

对一般积分 $\int R^{D-1-F}\mathrm{d}R$ 在无穷远处收敛的条件显然是 $D<F$，而在原点收敛的条件是 $D>F$。这论证建立了在 D 与 F 之间的 1－1 连接，特别把 $D=1$ 与 $F=1$ 相联系。

3. 位势和容量

这种连接由于波利耶和赛戈的工作而更紧密了，而文献 Frostman 1935 提出了最终形式。最大优点是这种论证超出单一原点 ω 而是（紧）集 $\mathscr{S}$ 上的所有点。考虑分布在 $\mathscr{S}$ 上的单位质量，因此区域 $\mathrm{d}u$ 包括质量 $\mathrm{d}\mu(u)$。在点 t，核 $|u|^{-F}$ 产生势函数

$$\Pi(t)=\int |u-t|^{-F}\mathrm{d}\mu(u)。$$

把静电容量的物理概念用到测量集合的“容量”。这思想是这样的，如果 $\mathscr{S}$ 有高容量 $C(\mathscr{S})$，总质量 μ 被逐渐移动，以保证最大位势尽可能小。

定义：取位势在所有点 t 上的上确界，然后将此结果关于 $\mathscr{S}$ 上单位质量的所有分布取下确界，最后置

$$C(\mathscr{S})=\{\inf[\sup_t \Pi(t)]\}^{-1}。$$

如果使用 $1/r$ 核，最小位势实际上由于导通集上的电荷而被达到。

等价定义：$[C(\mathscr{S})]^{-1}$是由 $\mathscr{S}$ 支撑的所有的质量分布和由重积分

$$\iint |t-u|^{-F}\mathrm{d}\mu(\mathscr{S})\mathrm{d}\mu(t)$$

所定义的能量分布之中的下确界。

4. 把 D 作为弗罗斯特曼维

在 $C(\mathscr{S})$和 F 之间存在简单的关系式。当用作定义 $C(\mathscr{S})$的指数 F 大于豪斯多夫—伯西柯维奇维 D 时，$C(\mathscr{S})$的容量为 0，这意味着甚至“最有效的”在 $\mathscr{S}$ 上的分布要导致一个在某些地方为无穷的势能。另一方面，当 F 小于 D 时 $\mathscr{S}$ 的容量是正的。因此在波利耶和赛戈的意义下，豪斯多夫—伯西柯维奇维也就是容量维。文献 Frostman 1937 以最一般的情况证明了此恒等式。在容量测度和豪斯多夫测度之间详细的关系式已在讨论维数 D 时涉及过；见文献 Taylor 1961。

5. “非规则的”维

在物理学家的头脑里核 $|u|^{-F}$而 $F\neq E-2$ 与有着“非规则的欧氏”维 $2-F$ 的嵌入空间联系在一起的(我不信此习惯就意味着隐含任何实际的把 E 推广到正实数而非整数)。给定(a) D 和 F 之间的连接(弗罗斯特曼)，(b) 在描述银河簇时 D 的作用(已在本书的第 10 章中建立)，术语非规则维导致如下的陈述。对银河系，分维 $D=1$ 不是非规则的，而观察到的分维 $D\approx1.23$ 似乎包含有非规则维的嵌入空间。

截断下的标度

以与标度的连接为基础,双曲分布仅仅是这样的分布,即重新标度的截断变量“U/u_0,已知 $U/u_0>1$”有独立于 u_0 的分布。

证明　假定存在一个基本分布 $P(u)$,带有重新标度的截断随机变量 $W=U/u_0$ 以及通常的条件分布 $P(wu_0)/P(u_0)$。要求此条件分布对 $u_0=h'$ 和 $u_0=h''$是相同的。记 $v'=\log h'$ 和 $v''=\log h''$并考察 $R=\log P(u)$作为 $v=\log u$ 的函数。所希望的恒等式 $P(uh')/P(h')=P(uh'')/P(h'')$要求 $R(v'+v)-R(v')=R(v''+v)-R(v'')$对一切选择的 v,v' 和 v''成立。这就要求 R 是 v 的线性函数。

相似维:它的陷阱

某些开集(不包括它们的极限点)包含着维数间的重要差别。

康托尘埃集的孔洞端点所组成的集是自相似的,它与总的康托集有相同的 N 和 r,因此它有同样的相似维。但它不可数,因此它的豪斯多夫—伯西柯维奇维是 0。把此尘埃的极限点增加到康托尘埃则差别消失而相似维“得益”,对于该集说来相似维是更为重要的特征。

第 2 个最简单的例子,我称它为伯西柯维奇集,在条目**无腔隙分形,3** 中研究。

平稳性(平稳度)

用在科学谈话中的普通词汇由两方面组合而成:(a) 依赖于使用者的各种直观意义,(b) 有正式定义的,它们中的每一个都选定一个专门的意义然后在数学上珍藏它。术语平稳的和遍历的是很幸运的,得到数学家们的同意。但是我的经验表明,许多工程

师、物理学家和实际的统计学家仅仅在口头上承认数学定义而且掌握较窄的观点，而我更喜欢甚为广泛的观点。这些误解或者偏爱正在显现出来。

数学定义 一个过程 $X(t)$ 是平稳的，如果 $X(t)$ 的分布关于 t 独立，$X(t_1+\tau)$ 和 $X(t_2+\tau)$ 的联合分布关于 τ 独立，而且对一切 k，$X(t_1+\tau),\cdots,X(t_k+\tau)$ 的联合分布也关于 τ 独立。

第1个误解（哲学） 这是老生常谈，那里除了要遵守无变化的规则之类现象外没有科学，平稳性常常是被误解：许多想法仅仅要求支配过程的法则关于 t 是不变的。但是这样的归纳是错误的。例如，布朗运动的增量 $B(t_1+\tau)-B(t_2+\tau)$ 是高斯的，且均值和方差关于 τ 独立。此法则，以及布朗运动的零集法则都是独立于 τ 的。然而，平稳性特别地指支配过程本身值的法则。对于布朗运动，这些法则**不是**时间不变的。

第2个误解（实际的统计学家） 大量技术（以及录制的计算机程序）被告知就像"平稳时间序列的**这种**分析"在其辖域里远比这标题所标记的要狭窄。但这是不可避免的，因为数学的平稳性对于任何单个技术应用于一切情形都是太一般化的概念。结果，统计学家们在他们的客户中鼓励这样的意见，即"平稳时间序列"的概念等同于由最新技术控制的如此狭窄的概念。甚至当他们正校核其技术是"鲁棒"而遇到麻烦时，他们指望从最简单的假设离开最小的一点，而不是平稳性容许下的大步地离开。

第3个误解（工程师和物理学家们） 许多研究者（部分原因是前面的误解）相信，平稳性坚持"可以上上下下动，但这种支撑物在统计上是相同的"。此摘要应用到较早的非正式阶段，但现在它也是无效的。数学定义特别提到了产生规则而没有提到产生的对象。当数学家们首先遇到的平稳过程具有极端地反复无常的样本时他们惊奇了，平稳性能包含如此丰富的未期望的行为。很遗憾，许多实践者坚持这类行为**不是**平稳的。

一个灰色区域 这是没有问题的，即在平稳和非平稳过程之间的边界位于高斯白噪声和布朗运动之间的某处，但精确位置还

在争论之中。

作为基准的标度噪声 第 27 章的高斯标度噪声对于精确化边界是很方便的基准，它们的谱密度具有形式 f^{-B} 而 $B \geq 0$。对白噪声 $B = 0$；对布朗运动 $B = 2$；而对于不同的目标，平稳和不平稳过程的边界就落在不同的 B 值上。

数学家们设法避开"红外线突变"的地方，在 $B = 1$ 的边界上，因为 $\int_0^1 f^{-B} df < \infty$ 就等价于 $B < 1$。

但是标度噪声样本的行为在 $B = 1$ 是连续变化的。事实上，在 $B = 0$ 和 $B > 0$ 之间存在更多可见的变化，是如此之多，因此实践者们面对着的任一个样本，当 $B > 0$ 就倾向于称它为不平稳的。而且他们一致主张，看来像有 $B > 0$ 的样本数据要以不平稳的模型来表示。

另一方面，我发现排除 $B > 1$ 使得不平稳的定义在许多研究的情况里使之不适当地一般化了。

条件的平稳阵发过程 例如，分形噪声理论(第 8 章)提出，布朗零集过程在变弱的形式里是平稳的。的确，假定在 $t = 0$ 和 $t = T$ 之间的任何地方至少存在一个零点。结果是依赖于 T(作为一个另外的非固有参量)的随机过程。我考察了值 $X(\tau + t_m)$ 的联立分布是与 t 独立的，只要时刻 $\tau + t_m$ 都位于 0 和 T 之间。这样，非平稳的布朗零集过程潜伏地合并为一整类随机过程，其每个都满足条件的平稳性形式(这种平稳性常常是满足的)。

此类过程如此密切地相互联系，文献 Mandelbrot 1976 b 指出，必需把它们看作广义的随机过程，可称为阵发过程。与标准的随机过程相比，其新颖性在于全样本空间 Ω 的测度 $\mu(\Omega) = \infty$。因此它不能标准化为 $\mu(\Omega) = 1$。对随机变量承认 $\mu(\Omega) = \infty$ 至少要追溯到文献 Rényi 1955。要防止从 $\mu(\Omega) = \infty$ 导致突变，广义变量理论假定决不直接考察它们，而仅仅作为条件，即某些事件 C 使得 $0 < \mu(C) < \infty$。

虽然瑞奈随机变量具有特别重要性，阵发函数是重要的：特

别，他们承认文献 Mandelbrot 1967 b 驱走某些红外线突变的实例，因此解释了某些 $B\in[1,2]$ 的标度噪声。

遍历性，混合 有不同解释的第 2 个概念是遍历性。在数学文献中遍历性分成多重的混合形式。某些过程混合很强，而另一些则混合很弱。正像数学家的著作中指出的，这种区别几乎不像会对性质的研究有影响。而事实上就是这样出乎意料！特别，对 $0<B<1$ 的标度噪声是弱的而不是强的混合。

第 4 个误解（涉及收敛到 $B(t)$ 的极限的有效性） 深信，说 $X(t)$ 是平稳的就与说它的作用和 $X^{*}(t)=\sum_{S=0}^{t}X(s)$ 能够标准化以便收敛于布朗运动是同样的。数学家们早就知道这种相信是无根据的（文献 Grenander & Rosenblatt 1957）。而本书所研究的许多情形里所含有的 $X(t)$ 是与这种相信矛盾的，因为不是诺厄效应（$\langle X^2(t)\rangle=\infty$）就是约瑟效应（无限依赖性，就像在 f^{-B} 噪声而 $B>0$）。然而，几乎在我研究的所有情形，至少在某些阶段已先验地被消除了（由于一个"输出"保持基本现象显然是不平稳的），因此我的平稳模型事先就毁灭了。这样的论证是错误的，但它在心理学上有意义。

结论 数学上平稳和不平稳过程的边界促进了在语义学上的争论。实际上，此边界由于这些过程不同于直观的平稳过程而被搁置，不过仍能作为科学的对象。它们也在本书中偶然发生而我的研究工作可以停止了。

词汇问题："拉普拉斯的"，"亲切的"，或者"固定的"与"流浪者"的比较 新术语再次成为不可缺少的，因此我推荐**固定的**(*settled*)作为 (a) 数学家们称"平稳的而且使 $X^{*}(t)$ 收敛于 $B(t)$"的同义词，(b) 有直观想法的一个术语，某些实践者倾向于称为"平稳的"。另外的同义词是非固定的和流浪的。

在较早的论文(Mandelbrot 1973 t)里，用（代替固定的）术语拉普拉斯的和亲切的。后者就意味着"无损害的，容易控制的"；它应用了，因为这类机遇能够信任而不产生任何猛烈的和多变的构形，

它使变化无常的机遇有更多困难和更感兴趣。

用 *R/S* 作统计分析

有关时间序列的两个假设在实际的统计学中是当然成立的：$\langle X^2 \rangle < \infty$ 和 X 是短暂相依的。然而我指出(第 37 章)，长轨迹的实验记录是接受 $\langle X^2 \rangle = \infty$ 的最好解释。首先面对的问题是那个记录是弱的(短暂的)还是强的(长时期的)相关，我引入长时期相依来解释赫斯特现象(第 27 章)。

长轨迹的混合和非常长时期相依在统计上无法处理，因为标准的二阶技术适合于趋向相关的(相关性，谱)不变量(假定 $\langle X^2 \rangle < \infty$)。但是存在另一种代替的方法。

我们可以不管 $X(t)$ 的分布而处理它的长时期相依，只要利用改变标度范围的分析，也称为 R/S 分析。该统计方法(由文献 Mandelbrot & Wallis 1969 c 引入，又在文献 Mandelbrot 1975 w 中给出数学基础)涉及到短暂的和非常长时间之间的区别。其引入的常数记作 J，称为**赫斯特系数**或 R/S 指数，它位于 0 与 1 之间。

就连前面定义的 J，也能描述它的意义。特殊值 $J = 1/2$ 是马尔可夫和其他短暂相关的随机函数独立的特征。因此，在实验记录或样本函数里缺少非常长时期的非周期统计相依时可以这样来研究，即**试验**假设 $J = 1/2$ 在统计上是否可接受。如果不能，非常长时期相关的强度以 $J - 1/2$ 测量，此值可从数据中估算。

此方法的主要优点是，指数 J 关于边缘分布是**鲁棒**的。即不仅当基本数据或随机函数靠近高斯时是有效的，而且当 $X(t)$ 远离高斯使 $\langle X^2(t) \rangle$ 发散时它还继续有效，在这种情形里所有的二阶技术都是无效的。

统计的 R/S 之定义　对连续的时间 t，定义 $X^*(t) = \int_0^t X(u)\mathrm{d}u$，$X^{2*}(t) = \int_0^t X^2(u)\mathrm{d}u$ 和 $X^{*2} = (X^*)^2$。对离散的时间 i，定义 $X^*(0) = 0$，$X^*(t) = \sum_{i=1}^{[t]} X(i)$，其中用 $[t]$ 表示 t 的整数

部分。对每个 d,定义 $X^*(t)$在时间区间0到 d 中的调节范围(称为滞后)为

$$R(d)=\max_{0\leqslant u\leqslant d}\{X^*(u)-(u/d)X^*(d)\}-\min_{0\leqslant u\leqslant d}\{X^*(u)-(u/d)X^*(d)\}。$$

然后计算 $X(t)$的样本标准导数,

$$S^2(d)=X^{2*}(d)/d-X^{*2}(d)/d^2。$$

表达式 $Q(d)=R(d)/S(d)$是 R/S 统计的或 $X(t)$的自-重标度的、自-调节的范围。

R/S 指数 J 的定义 假定存在实数 J 使得当 $d\to\infty$ 时,$(1/d^J)[R(d)/S(d)]$在分布上收敛于非退化的极限随机变量。文献 Mandelbrot 1975 w 证明了可以推出 $0\leqslant J\leqslant 1$,然后可称函数 X 有 R/S 指数 J 及常数 R/S 前因子。

更一般性,假定比率式$[1/d^JL(d)][R(d)/S(d)]$,其中 $L(d)$ 记为在无穷远处的一个慢变函数,即此函数满足 $L(td)/L(d)\to 1$ 当 $d\to\infty$ 对一切 $t>0$ 成立。最简单的例子就是 $L(d)=\log d$。然后称函数 X 有 R/S 指数 J 以及 R/S 前因子 $L(d)$。

主要结果(文献 Mandelbrot 1975 w) 当 $X(t)$是高斯白噪声时,发现 $J=1/2$ 带有常数前因子。更精确地说,$e^{-\delta J}R(e^\delta)/S(e^\delta)$是 $\delta=\log d$ 的平稳随机函数。

更一般地,每当 $S(d)\to\langle X^2\rangle$ 时 $J=1/2$,而重新标度的 $a^{-1/2}X^*(at)$当 $a\to\infty$ 时弱收敛于 $B(t)$。

当 $X(t)$是离散的分数高斯噪声(就是 $B_H(t)$的增量序列时,就发现 $J=H$,而 $H\in]0,1[$。

更加一般性,为了得到 $J=H\neq 1/2$ 及一个常数前因子,只要 $S(d)\to\langle X^2\rangle$和 $X^2(t)$收敛于 $B_H(t)$,而$\langle X^*(t)\rangle\approx t^{2H}$。

仍然是更加一般性的,$J=H\neq 1/2$ 而前因子 $L(d)$有效,如果 $S(d)\to\langle X^2\rangle$,而 $X^*(t)$被吸引到 $B_H(t)$以及满足$\langle X^*(t)^2\rangle\approx t^{2H}L(t)$。

最后,当 $S(d)\to\langle X^2\rangle$时 $J\neq 1/2$,而 $X^*(t)$被吸引到指数 $H=$

J 的非高斯标度随机函数。文献 Taqqu 1975, 1979 a, b 给出了例子。

另一方面，当 X 是莱维稳定的白噪声，因此 $\langle X^2 \rangle = \infty$，我们就得到 $J = 1/2$。

当 X 成为平稳的，当求差分（或求微分）时就找到 $J = 1$。

外尔斯特拉斯函数及其族
紫外线和红外线突变

复杂的外尔斯特拉斯函数是下列级数之和：

$$W_0(t) = (1 - w^2)^{-1/2} \sum_0^\infty w^n \exp(2\pi i b^n t),$$

其中 b 是实数且 >1，而 w 写为 $w = b^H$ 且 $0 < H < 1$，或写成 $w = b^{D-2}$ 而 $1 < D < 2$。$W_0(t)$ 的实部和虚部就称为外尔斯特拉斯余弦和正弦函数。

函数 $W_0(t)$ 是连续而处处不可微的。但它对 $D < 1$ 的形式延拓是连续和可微的。

除了 $\dot{W}_0(t)$ 以外，在此条目里还要讨论几个变量，我发现必须引进它们，由于 $W_0(t)$ 已经当上了分形理论的新角色。

$W_0(t)$ 的频谱　术语"谱"由于多种意义而负担过重了，**频谱**表示频率 f（而不管相应项的振幅）的容许值所组成的集合。

一个周期函数的频谱是正整数的序列，一个布朗函数的频谱是 $\mathbb{R}^+$。而外尔斯特拉斯函数的频谱是离散序列 b^n，从 $n = 1$ 到 $n = \infty$。

$W_0(t)$ 的能量谱　**能量谱**表示由 f 的容许值与相应的能量（振幅的平方）一起所组成的集合。对于形为 $f = b^n$ 的频率，$W_0(t)$ 有一条能量为 $(1 - w^2)^{-1} w^{2n}$ 的谱线。因此在频率 $f \geq b^n$ 的积累能量是收敛的，而且正比于 $w^{2n} = b^{-2nH} = f^{-2H}$。

与分数布朗运动的比较　在前面遇到的几个情形里，累积能量也是 f^{-2H}。(A) 分数的傅立叶—布朗—维纳周期随机函数，其

可接受频率具有形式 $f=n$ 而相应的傅立叶系数是 $n^{H-1/2}$。(B) 这种随机过程具有连续的总体谱密度正比于 $2Hf^{-2H-1}$。它们就是第 27 章的分数布朗函数 $B_H(t)$。如 $H=1/2$，外尔斯特拉斯累积谱正比于 f^{-1}。对通常的布朗运动 $B(t)$就会遇到，它的谱密度是 f^{-2}。其本质差别在于布朗谱是绝对连续的，而傅立叶—布朗—维纳和外尔斯特拉斯谱是离散的。

不可微性 为了证明对任意的 t 值 $W_0(t)$没有有限的导数，外尔斯特拉斯(函数)必须增加 2 个条件：(a) b 是奇数，因此 $W_0(t)$是傅立叶级数，(b) $\log_b(1+3\pi/2)<D<2$。充分必要条件 $b>1$ 和 $1<D<2$ 来自文献 Hardy 1916。

能量的发散 作为一位习惯于谱的物理学家，哈迪的条件在直观上是显然的。应用拇指法则，函数的导数由它的第 k 个傅立叶系数乘以 k 而得到，物理学家发现对于 $W_0(t)$(它的傅立叶系数为 $k=b^n$)的形式导数，其振幅的平方等于 $(1-w^2)^{-1}w^{2n}b^{2n}$。在频率 $\geq b^n$ 里累积能量是无穷的，物理学家们同意不能定义 $W_0'(t)$。

这是饶有趣味的，黎曼为了研究可微性的反例，他转向函数 $R(t)=\sum_1^\infty n^{-2}\sin(2\pi n^2 t)$，它的能量(当频率 $\geq f=n^2$)是正比于 $n^{-3}=f^{-2H}$ 而 $H=3/4$。因此，同样的直觉法论证提出 $R'(t)$是不可定义的，因此 $R(t)$是不可微分的，这个结论“几乎”是正确的，但是 $R'(t)$对某些 t 不存在(文献 Gerver 1970, Smith 1972)。

紫外线发散/突变 术语“突变”首次进入物理学在 1900 年左右，此后瑞利和琼斯设计出一种黑体辐射理论，预测出在 f 点附近宽度 df 的频带中包含有正比于 f^{-4} 的能量。总的高频能量是无穷，它的本质是(对于该理论)突变的。因为从频率超过紫外线就引来了怀疑，这就称为紫外线(UV)突变。

众所周知，普朗克把量子理论建筑在由辐射的紫外线突变所创建的废墟上。

历史的一侧 注意到(这点必定已有其他人做过，但我并未参

考)同样的发散杀死了老的物理学(1900),而老的数学(1875)相信连续函数必需是可微的。物理学家们的反应是改变游戏的规则,而数学家们的反应是学习与不可微函数及其形式微分一起生活。(后者仅是在物理学中常用的施瓦兹分布的例子。)

探索标度离散谱,红外线发散 当布朗函数的频谱是连续,是标度的而且扩展到 $f=0$ 时,适合于同样 H 的外尔斯特拉斯函数的频谱是离散的且界于 $f=1$ 之下。出现此下界完全是由于外尔斯特拉斯的原始的 b 是整数而且函数是周期的。现在我们能希望消去此特性,显而易见的方法就是容许 n 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$。把标度特性扩展到能量谱,这只要把频率 b^n 的成分归属于振幅 w^n 就足够了。

很遗憾,合成级数由于低频成分而发散,这个缺陷就称为红外(IR)发散(或"突变")。然而必须面对此发散,因为下界 $f=1$ 与自相似性相冲突,否则就包括在能量谱 f^{-2H} 之内。

外尔斯特拉斯函数,修改为关于焦点时间 $t=0$ 是自仿射的

要把外尔斯特拉斯频谱向下扩展到 $f=0$ 而不引起可怕的后果,最简单方法是首先建立表达式 $W_0(0)-W_0(t)$,然后让 n 从 $-\infty$ 变到 $+\infty$。相应于 $n<0$ 所增加的项,只要 $0<H<1$ 就收敛,而它们的和是连续和可微的,因此函数修改为

$$W_1(t)-W_1(0)=(1-W^2)^{-1/2}\sum_{-\infty}^{+\infty}W^n[\exp(2\pi i b^n t)-1],$$

它仍是连续的但无处可微。此外,它在下面意义下是标度:

$$W_1(tb^m)-W_1(0)=(1-W^2)^{-1/2}\sum_{-\infty}^{\infty}W^{-m}W^{n+m}[\exp(2\pi i b^{m+n}t-1]$$
$$=W^{-m}[W_1(t)-W_1(0)]。$$

于是,函数 $W^m[W_1(b^m t)-W_1(0)]$ 关于 m 独立。换言之,只要 $r=b^m$,$r^{-H}[W_1(rt)-W_1(0)]$ 关于 h 独立。这样,$W_1(r)-W_1(0)$ 以及它的实部和虚部关于 b^{-m} 形式的 r 和焦点时间 $t=0$ 是自仿射的。

对外尔斯特拉斯(修改的)函数 $W_1(t)$ 进一步的研究以及带有

启发性的图形,可以在文献 Berry & Lewis 1980 中找到。

带有广义外尔斯特拉斯谱的高斯随机函数 当广义的外尔斯特拉斯函数随机化后,下一步要迈向现实性和可应用性。最简单和最本质的方法在于用它的傅立叶系数乘以零均值和单位方差的独立复高斯因子。此结果的实部和虚部值得称为外尔斯特拉斯(修改的)–高斯函数。在多种方法里,它们都是近似的分数布朗函数。当 H 值匹配时,它们的谱非常接近,就像容许一个是离散的而其他是连续的一样。此外,文献 Orey 1970 和 Marcus 1976 的结果保持了可用性,并且表明他们的水平集合有相同的分维。

分形性质 由文献 Love & Young 1937 和 Besicovitch & Ursell 1937 (见 Lipschitz…)中的定理,一个函数,它满足指数为 H 的列弗希茨条件(对一切 x 成立),此函数图形的分维在 1 和 $2-H$ 之间。对于具有相同累积谱 f^{-2H} 的分数布朗函数,已知其维数取最大可能值 $2-H=D$。我猜测这对外尔斯特拉斯曲线也同样成立,但其零集的维数为 $1-H$。

相关函数的零集 拉德马赫函数是形如 $\sin(2\pi b^n t)$(其中 $b=2$)的正弦函数的方形状变量。当正弦分别是正的,负的或零时,拉德马赫函数分别等于 1,−1 或 0(文献 Zygmund 1959 I,第 202 页)。外尔斯特拉斯函数的自然推广是一个级数,其第 n 项是 w^n 与第 n 个拉德马赫函数的乘积。该函数不连续,但它的谱指数延续到 $2H$。在直观上,分数布朗运动的先例提出外尔斯特拉斯–拉德马赫函数具有维数 $1-H$。这已由文献 Beyer 1962 所证实(但仅在 $1/H$ 为整数的限制条件下)。

文献 Singh 1935 涉及到大量外尔斯特拉斯函数的其他变量。在某些情形里,零集的 D 很容易计算。这个专题值得鲜为一阅。

第十二篇　人物与思想

第40章　小传

在专门用于作传的这一章的开头，我们注意到，那些为人们所津津乐道的生活故事很少能够成为对那些投入科学主流的人们的报偿(或者是惩罚?)。以瑞利男爵约翰·威廉·斯特拉特(John William Strutt, Baron Rayleigh Ⅲ)为例，一连串稳定的成就使他几乎在科学的每一个领域都为人所知。他的生活看来只是平凡地从属于他作为一个科学家的成长历程。然而有一个例外，就是当他作为一个地主的长子而有权进入三一学院时，他决定成为一名学者。

科学家有时候的确很富于传奇色彩。埃瓦里斯特·伽罗华(Evariste Galois)的故事合乎法国宫廷悲剧的典范，在同一天里，他作为一名科学家闪现而又在决斗中死去。然而大多数科学家的故事像瑞利一样(伯西柯维奇即是明证)：即便是寻根究底也难以令人感动，他们的生活是极端刻板的，只有在偶尔出现的吸引人的环境中才显示出他们的天赋，另外与众不同的就是他们汇入了科学的主流之中。三岁的高斯(Gauss, C.F.)纠正了他父亲的计算错误。少年的拉玛努衍(Ramanujan, S.)重新发明了数学。而当沙普利(Shapley, H.)发现他必须等待一个学期才能在一所新闻学校注册时，他就按字母顺序选择了一个系。他跳过了考古学，因为他不知道这个词是什么意思。接下去的是天文学，这就决定了他的命运。更不同寻常的是豪斯多夫。在35岁以前，他把大部分时间花

费到哲学、诗歌、写作、导演、戏剧等等类似的事情上。然后他定下心来研究数学,很快他的杰作 Hausdorff 1914 就问世了。

和这种典型模式一致的故事多得数不胜数,但是本章中所选取的故事完全不同。他们汇入科学主流的时间大大拖后了,有很多甚至是在去世以后。给人的一种强烈而持久的感受是他们属于另一个时代。主角们都是孤独者。他们像一些画家那样,会被称为半路出家的或者是个幻想家,不过在美国英语中有一个更好的词:独行其是者(*maverick*)。当他的生活故事的序幕落下时,不管是出于自己的选择还是出于机遇,他仍然未被打上任何烙印。

独行其是者的工作经常显示出一种独特的新鲜感。即使是那些未能达到最高境界的人也与那些科学巨人一样有着鲜明的个人风格。在这一点上花点时间似乎是值得的。用达西·汤普森的女儿谈论他的著作《生长与形体》(Thompson 1917)的话来说,"要是[作者]早年没有在荒野中度过三十年的话,能否写出[这样一本著作]是值得深思的。"事实上,他出版这本书时已经 57 岁。其他一些独行其是者的最佳成果也出现得相当晚:那种科学在很大程度上是年轻人的游戏的陈词滥调对他们绝对不适用。

我发现这样的故事很感人,在此愿与大家分享其中一部分故事所激起的情感。

作为独行其是者们,我们的主角彼此极为不同。莱维(Paul Levy)活到了他的名声在他所从事的领域中牢牢树立的年岁,但是他的崇拜者(我是其中之一),认为他应该得到更多,也就是他真正的名誉。汤普森也是一样,他不该在科学史上没有一席之地。不过,他的生平在他的著作的缩写本 Thompson 1962 中有完整的记述。理查森也勉勉强强地出了名。但是巴舍利埃的故事却更加凄凉:没有人通读他的著作和文章,他常年都是一个不成功的求职者,直到有人重复他的工作。赫斯特(Hurst, H. E.)的运气好一些,他的故事很有意思。傅尼埃·达尔博和齐普夫则应该加上长长的注释。从而,本章中的每个故事都将给研究一种独特的健全思想的心理学带来一些启发。

如果有标准的传记，本章中若无必要就不再重复。内容庞大的《科学传记辞典》(Gillispie 1970～1976)中包括了参考书目，我们没有必要再重复。但是它们省略的东西也很重要。

路易·巴舍利埃(Louis Bachelier, 1870～1946)

布朗运动理论的开端是一个值得了解的故事，这将在下一章中涉及。但是，物理学似乎让数学走到了前头，走在前面的同时还有(由于一系列非常不寻常的事件)经济学。

事实是这样的，布朗运动的数学理论大部分真正了不起的结果早在爱因斯坦之前五年就已经得出了。这个先驱者就是路易·巴舍利埃(《科学传记辞典》，卷一，第366～367页)。

我们的故事讲的是1900年3月19日在巴黎举行的一场数学博士论文答辩。60年以后，这篇论文的带有大量注释的英译本受到了少有的赞誉。但是，一开头却糟透了：答辩委员会对它的印象很一般，给的评语是不寻常而且近乎侮辱的"良"(*mention honorable*)，在当时，除非人们预见了一个学术职位的空缺并确信可以得到必需的"优"(*mention tres honorable*)，他绝不会当一个法国博士。

于是，一点儿也不奇怪，这篇论文没对任何别人的工作起到直接的影响，同样的，巴舍利埃也没受到本世纪的任何东西的影响。即便如此，他仍然很活跃，并(在最好的期刊上)发表了几篇充斥着无边无尽的代数推导的论文。此外，他的科普书Bachelier 1914重印了多次，直至今日还颇值一读。我在这里提到它并非是为了向每个人推荐，因为它的主题内容已经有了深刻的变化，另外还因为不清楚这些话是在总结已有的知识还是在勾勒值得探索的问题。这种模糊不清累计起来的后果是相当使人难堪的。巴舍利埃只能在好几次失败以后才最终在小小的贝桑松大学得到了一份教授职位。

与他迟缓和平庸的职业生涯和他所留下的微不足道的个人踪

迹（我尽管进行了细致的考察，也仅仅能发现一些由他的学生和同事收集的片段，甚至连一张照片也没有）来看，他的论文在他死后的声望使他几乎成了一个传奇人物。这么鲜明的对比是为什么呢？

开头是这样的：要不是因为一个数学错误，他的一生本该更光明一些。这个故事记录在 Lévy 1970（第 97~98 页）。莱维 1964 年 1 月 25 日写给我的信中描述得更详细。

"我最早听说他，是在我的《概率演算》出版后的几年，也就是 1928 年左右，相差不超过一年。他是第戎大学教授职位的候选人。杰弗雷当时在那里任教，他来询问我对巴舍利埃发表于 1913 年的一篇文章（《师范学校年鉴》，*Annales del' Ecole Normale*）的看法。在文中，他以下述方式（先于维纳）定义了维纳函数；在每个区间 $[n\tau,(n+1)\tau]$ 中，他考虑函数 $X(t/\tau)$，其微分以等概率为常数 $+V$ 或 $-V$。然后他取极限（V 为常数，$\tau \to 0$），尔后宣布他得到了一个特征函数 $X(t)$！杰弗雷对这个错误很反感。我同意他的观点，并在他给其在第戎的同事的一封信中确认了这一点。巴舍利埃吃了闭门羹。他得知我起的作用，要我给出解释。我这样做了，不过并没有说服他承认错误。我对这件事的直接后果没有什么可以说的。"

"当 1931 年我读柯尔莫哥罗夫的奠基性论文时，碰到了这个'巴舍利埃错误'，这时我已经把它忘了。我翻出巴舍利埃的文章，看到了这个遍地都在开花的错误并没有妨碍他得到了那些本该正确的结果，只要把 V 为常数改为 $V=C\tau^{-1/2}$ 就可以了。他早于爱因斯坦，也早于维纳，恰巧发现了所谓的维纳函数或维纳-莱维函数的一些重要性质，也就是扩散方程和 $\max\limits_{0\le\tau\le t} X(t)$ 的分布。"

"我们和解了。我写信给他致歉，很遗憾由于一个开头出的错误而带来的印象使我没有继续阅读一篇充满了有益思想的文章。他在一封长长的回信中表达了他对研究工作的热爱。"

莱维所扮演的角色是悲剧性的，因为，正如我们很快就要看到的，莱维自己的学术生涯差点儿由于他的论文缺乏严格性而葬送。

我们现在谈到巴舍利埃的职业问题的第二个也是更深刻的原因。这原因可以从他的学位论文标题中看到，在前面我（故意）没有提到它：《猜测的数学理论》（*Mathematical Theory of Speculation*）。这个题目所指的绝不是关于机遇本质的（哲学）思辩，而是指国家联合证券市场涨落的（控钱的）投机（"国债"）。莱维提到的函数 $X(t)$ 代表证券在时刻 t 的价格。

巴舍利埃要遭遇的职业困境是庞加莱得体而保守的评价的结果，这个人负责撰写这篇论文的官方报告。报告中写道："这个题目距离我们的申请者们所习惯于处理的那些内容多少有些遥远。"有人会说巴舍利埃不应该去找那些会做出令人不快的判断的数学家（当时的法国教授们还不习惯指定论文内容的做法），但他别无选择；他的初级学位是数学，而尽管庞加莱几乎不研究概率，他却负责教这门课。

巴舍利埃的悲剧是成为一个不合时宜的人，他应该属于过去或者未来，而不属于现在。他属于过去是因为他研究概率论的历史渊源：赌博。他引入连续时间随机过程来处理连续形式的赌博：证券交易（*La Bourse*）。他属于未来[在数学（上文莱维的信即为明证）和经济学两方面]，他被认为是"Martingale"（这个词是公平博弈或有效市场的正式表达，见第 37 章）的概率概念的创立者，他对经济学中不确定性的许多方面的理解大大超前于他的时代。他的价格变化遵循布朗运动过程的思想为他赢得了他的最高名望。然而，不幸的是，在他的那个时代，没有一个合适的科学团体能够理解和接受他。为使他的思想得到承认，他需要具备那些他显然不具备的高超的政治手腕。

为了在这种环境下生存并继续得到新的研究结果，巴舍利埃不得不对自己工作的重要性抱有强烈的自信。特别是他清楚地知道自己是概率扩散理论的创始人。在他 1921 年（申请尚不确定的某个学术职位时）写的一份未发表的《备注》（*Notice*）中写道，他的主要学术贡献是提供了"从自然现象而来的图景。比如概率放射理论，它把一种抽象同能量联系起来——一种奇怪而出人意料的

联系，也是伟大进步的一个开端。正是考虑到这个观点，庞加莱才写道：'巴舍利埃先生证明了他具有独创而精确的思想。'"

上面这句话摘自前面已经提到过的学位论文报告，我们应该从中多摘录一些。"候选人得到高斯定律的方法是极为独创的，而出于同一原因的更加有意思的是只要稍加改动就可以推广到误差理论。在乍看起来很古怪的一章中，他发展了这个理论，他把这一章称为'概率放射'。在具体分析上，作者求助于同热传导的解析理论的比较。不难看出，这种类比是确实的，这种比较是合理的。傅立叶的推理可以几乎不加改动地用在这个问题上，这和该问题的产生方式极为不同。很遗憾，作者没有进一步讨论论文中的这一部分。"

因此，庞加莱看到巴舍利埃已经来到了关于扩散的一般理论的边缘。但是，庞加莱的记性不好是出了名的。几年以后，当他积极地参与有关布朗扩散的讨论时，已经忘记了巴舍利埃 1900 年的学位论文。

巴舍利埃在《备注》中的其他一些话也值得我们简要地记述一下："1906：连续概率理论。该理论与范围狭窄的几何概率理论没有任何关系。与概率演算相比，它的难度和广泛程度都不是一个层次上的。概念、分析、方法，任何东西都是新的。1913：动态概率。这些力学中应用的概率绝对是作者自己的。他没有从任何别人那里得到这个独创的思想；还没有人做过同类的工作。概念、方法、结果，任何东西都是新的。"

没有人要求这些学术性备注的不幸的作者必须是谦虚的，而路易·巴舍利埃也确实有些夸大其辞。而且，他没有什么证据能告诉人们他曾经读过任何 20 世纪所写的东西。不幸的是，他的同时代人对他说的任何东西都打折扣，还拒绝给他所谋求的职位！

有什么人对他更了解吗？

庞加莱的话是我经过允许从皮埃尔和玛丽·居里大学（巴黎六大）的档案馆中保存的一份报告中摘录的。该档案馆继承了原来巴黎科学院保存的档案。这份用庞加莱科普作品那种流畅文笔写

出来的引人入胜的文件暗示了更多的庞加莱的信函以及他写给大学和科学院的保密报告应该公诸于众。直至今日，他的人格中许多很吸引人的方面并未在他的书和他的《选集》中表现出来。

爱德蒙·爱德华·傅尼埃·达尔博
(Edmund Edward Fournier D'Albe, 1868～1933)

傅尼埃·达尔博选择了当一名自由的科学记者和发明家(《科学名人录》,第593页):他做了一个使盲人能“听到”字母的感觉代偿器,他还是从伦敦传送电视信号的第一人。

他的姓是胡格诺(Huguenot)祖先的遗迹。他受过部分的德国教育,最后定居在伦敦,他在那儿通过上夜大学得到了学士学位。尽管如此,在都柏林的时光把他变成了一个爱尔兰爱国者和泛凯尔特运动的一个民兵。他信仰唯灵论,是个宗教上的神秘主义者。

他因其著作《两个新世界》(*Two New World*)而载入史册。这本书在《自然》杂志上得到了相当好的评价,评价称书中的论证“简单而有道理”,《泰晤士报》称其中的思辨“古怪而吸引人”。但是在《自然》和《泰晤士报》上发表的傅尼埃·达尔博的讣告都不知为什么没有提到这本书。我们几乎不可能再找到这本书,提到它的时候很少有人不带讥讽地评价它。

确实,这是那种物理学家会因为发现某种具有永久性技术价值的东西而感到惊奇的工作。事实上,有人劝我不要对它发生兴趣,以免以严肃的眼光看待这一大堆有争议的材料。可是我们难道应该把一个人们不会考虑用来反对开普勒的论断用来反对傅尼埃吗?我并不是说傅尼埃是一个开普勒式的人,他很难达到本章中提到的其他人所取得的成就的水平。不过一个批评家所说的“从科学的观点看,这种自称为‘灵魂的牛顿’的工作毫无用处”也太不认真了。

事实上,傅尼埃是第一个以足够精确的语言重述关于银河系形成的一个古老直觉的人(这个直觉可以追溯到康德以及和康德

同时代的朗伯),他的重述使我们今天可以推出银河系必定满足 $D=1$。因而,我们要把某些具有持久价值的东西归功于他。

哈罗德·埃得温·赫斯特
(Harold Edwin Hurst, 1880~1978)

人们认为赫斯特可能是自古以来所有尼罗学者中最重要的一个,他被称为"阿布·尼罗"意即尼罗河之父。他漫长的职业生涯是在开罗度过的,开始是大英帝国的文职人员,后来则成为埃及的。(《名人录》第 1973,1625 页及《英国科学家名人录》1969/1970,第 417~418 页。)

他和他的夫人玛格丽特·布莱纳尔·赫斯特(Marguerite Brunel Hurst)向我描述了他的值得一提的早期训练。他是个普通的乡村建筑师的儿子,他的家族在莱斯特(Leicester)附近住了近三个世纪。他离开学校的时候 15 岁。他受到的训练大多是化学方面的,同时他父亲也教他做木工活。他在莱斯特的一所学校中当小学教师,同时上夜校继续自己的学业。

20 岁时,他获得了一份奖学金,这使他能够以一个不注册学生的身分去牛津读书。一年以后,他成为刚刚成立的哈福德(Hertford)学院的本科生,很快,他就转去学习物理,并在克拉伦登(Clarendon)实验室工作。

缺乏数学基础是他的弱点,但是由于格雷兹布鲁克(Glazebrook)教授对这样一个极其擅长实际工作的非同寻常的学生的兴趣,他出人意料地赢得了头等荣誉学位,而且被邀请做了三年的讲师和示教员。

1906 年,赫斯特去了埃及,他本来只是要做短暂的旅行,结果呆了 62 年。这些年中最富有成果的则是在他 65 岁以后。他的第一项工作是要把天文台的标准时间转换成开罗要塞时间,要塞在每天正午要鸣炮。然而,他越来越多地对尼罗河着迷,他对尼罗河盆地的研究和考察使他成了国际名人。他沿水路和旱路做了大量

的旅行。在陆地上，他曾与脚夫一起步行，骑自行车，后来乘汽车，还乘飞机。下阿斯旺水坝于1903年建成，但他意识到对于埃及来说重要的不仅仅是为某个干旱的年头蓄水，而是还要为连续的干旱年头蓄水，灌溉积累应该能够应付任何情况，就像《旧约》中约瑟为欠收的年份积累谷物一样。他是最早认识到有必要建设"苏德·埃尔·阿里"即上水坝和阿斯旺水库的人之一。

赫斯特还因为提出并应用一种统计方法而留名。他用这种方法发现了地球物理学中长期依赖关系的一个主要的经验法则。这种结果会出于一个数学如此糟糕而且其工作远离主要的学术中心的作者之手，初看起来很令人惊讶。不过接下来想一想，或许这样的环境对于这种思想的产生和继续存在都是必不可少的。他用一种自己发明的特殊方法研究尼罗河。这种方法可能会被称为狭隘的和专门的，但是事实上它是特别本质的。他不受时间限制，又拥有异乎寻常的大量数据，他要做的是把这些数据与随机变化的标准模型(白噪声)进行比较，比较它们各自对建设上水坝的影响。这使他使用了第28章和第39章中的表达式 $R(d)/S(d)$。

人们可以想象在计算机出现之前为完成这样的研究所需的艰苦工作——但是尼罗河对于埃及来说太重要了。因而有充分的理由进行这样规模的工作(以及阻止赫斯特退休)。

赫斯特满怀热情地坚信他的发现是重要的，尽管当时没有任何事实能够客观地证明这种重要性。最终，在71岁和75岁时，他读到了两篇关于他的发现的长篇论文，他的发现的重要性得到了认可。

用劳埃德(Lloyd, E. H.)的话(但是用我的表达)来说，赫斯特将我们置于"这样的情况下，这种情况对理论家来说是有利的，因为经验发现总是固执地与理论相悖。所有前述的研究者都认为 $R(d)$ 的长期效果是按 $d^{0.5}$ 增长，而赫斯特的有着特别多的证据的经验定律则指出它按 d^H 增长，H 大约为0.7。我们不得不承认，要么理论家对他们的工作的解释是不完全的，要么他们的理论基础是错误的；有可能这两种原因都存在。"类似地，Feller 1951 中

说:"这里,我们面临着一个无论从统计的观点还是数学的观点来看都十分有意义的问题。"

我的分数布朗运动模型(第28章)的提出是对赫斯特现象的直接响应,但这还不是赫斯特故事的结局。很难挑剔上一段中生动的描述……但是它们都不知不觉地把自己的论述基于对赫斯特阐述的不正确阅读。劳埃德忽略了 R 被除以 S,而费勒是从第三者的口头报告中得知赫斯特的工作的(如他所注),他没有注意到被 S 除已经完成。费勒推导中的值不受影响。关于除以 S 的重要性见 Mandelbrot & Wallis 1969 c 和 Mandelbrot 1975 w。

在这件事中我们又一次看到,当一个真正未曾预料的结果出现时,即使是那些做了最好的准备来倾听的人也难以理解。

保罗·莱维(Paul Levy, 1886 ~ 1971)

保罗·莱维说他没有学生,但是他是最接近于做我的导师的人。他达到了巴舍利埃只能从远处眺望的目标。莱维活得足够长,因而能够被承认为可能是有史以来最伟大的概率论专家。最终,在他快80岁的时候在巴黎科学院取得了原来为庞加莱,后来是阿达玛(Hadamard, J.)的席位。见《世界科学名人录》,第1035页。

而且,几乎直到他活跃的一生结束,他都被现存社会体制所疏远。不仅他一次次得不到庞加莱原来的大学席位,甚至他多次提出讲授没有学分的课程也因为害怕这些课会毁了整个课程设置只能勉勉强强得到接受。

Levy 1970 中大量记载了他的生活、思想和观点,那是一本值得一读的书,因为书中没有那种试图表现得比现实更好或更差的扭扭怩怩。结尾最好略过去,但是最好的段落光彩夺目。特别是他用感人的词句描写了他对成为"上一世纪仅存的遗老"的惧怕和他成为一个"不像所有其他人的"数学家的感受。这种感受好多人也有。我想起约翰·冯·诺伊曼(John von Neumann)在1954年说的

话:“我想我理解每个其他的数学家如何进行工作,但是莱维像是来自一个陌生星球的观光客。看起来他有自己独特的到达真理的方法,这很容易让我不舒服。”

除了作为综合工科学校的数学分析教授每年要上的许多节课之外,莱维几乎没有什么责任需要分心。他独自工作,把概率论从一小团奇怪的结果变成了一门学科,在这门学科中,变化多端的大量结果可以通过直接的因而是经典的方法得到。他对这个题目感兴趣是从他应邀讲授火炮发射中的误差开始的。那时他快 40 岁了,富有才华,还未能实现他的愿望。综合工科学校曾一度因为他是校友而给他一个教授职位。他主要的著作完成于 50~60 岁之间。而他关于希尔伯特(Hilbert)空间一直线布朗函数的大部分工作要更晚一些。

在他的自传中的无数有趣的故事中,有一个讲他的一篇关于与牛顿引力势(见第 9 章)相关的本特利悖论的论文。1904 年,莱维还是 19 岁的学生,他独立地发现了宇宙的傅尼埃模型。然而,他认为:“论证太简单了,要不是 25 年后我偶然无意地听到佩琳和郎之万(Langevin, P.)的谈话,我是不会想到要发表它的。这些著名的物理学家同意只有假定宇宙是有限的才能摆脱这个悖论。我大胆地指出了他们的错误。他们似乎没有明白我的意思,但是佩琳被我的自信震惊了,他要我写下我的观点,我这样做了。”

类似于说这些结果“简单得不足以发表”这样的话,在莱维的回忆录中经常出现。许多富于创造力的头脑高估了他们精细繁杂的工作,而低估了那些简单的工作。当历史把这些评判逆转过来时,多产的作者们因为是“引理”的作者而被牢牢记住,这些引理正是那些被他们认为本身太简单的命题,它们仅仅作为那些被人遗忘的定理的前奏才能得以发表。

下面这段话部分表达了我在一个纪念莱维的仪式上的讲话:“他在综合工科学校上的课在我的记忆中只剩下模模糊糊的痕迹了。由于某些偶然我只能坐在一个大讲堂的后面,莱维的声音很小,也没有放大。最生动的回忆是我们一些人注意到他的身

材——修长，灰色衣服，打扮得整整齐齐——和他在黑板上细查那些积分符号时多少有些特别的方式之间的相似性。

"但是他写的讲义很不一样。它们不是传统地按照良好的顺序写出的，即从一大堆定义和引理开始，然后是定理，每个假设都清清楚楚地叙述出来。这个庄重的序列可能会被明白地强调出来的一些尚未证明的结果所打断。相反地，在我的回忆中，它却是毫无条理的评述和观察的汪洋大海。

"在他的自传里，莱维建议，为了让孩子们对几何感兴趣，我们应该尽可能快地前进到他们不会认为是显然的定理。他在综合工科学校的方法并不是特别地与众不同。为描述他的方法，我们被不由自主地吸引到借助地理和登山的图景上来。这使我们想起了一个早期的伟大的'综合工科学校分析教程'的旧的评述。这门课是卡尔米·约当(Camille Jordan)教的，评述人是亨利·勒贝格(Henry Lebesgue)。因为勒贝格毫不掩饰对莱维的工作的强烈鄙视，所以他赞扬约当的评语可以很好地用在莱维身上就充满了讽刺意味。他不像'一个试图攀登到未知地域顶峰而不允许自己在到达目的地之前四处张望的人。如果他是被别人领到那儿去的，他可能会看不起好多东西，但是他不会知道那些东西是什么。事实上，通常人们从高峰上不能什么都看到；登山者登山只是为了那份艰辛。'

"毋庸多言，莱维的讲义流传不广。对这综合工科学校许多优秀的学生来说，当急匆匆地应付大考时，那是他们焦虑的源泉。在最终的版本中(1957年，作为他的Maitrede Conference，我不得不又学习了一遍。)所有的那些特点甚至特别地被强调出来了。比如积分理论被坦率地处理成只是一种近似。他曾写过，没有人会因为试图强制他的天分而干了好事。在他最后的讲义中，似乎他的天分还是受到了强制。

"但是在我的记忆中，他教1944年入学的那个班时还是特别积极的。直觉，虽然它无法被教授，但它能被轻易地滑过去，我相信这是莱维特别要避免的，我认为他差不多成功了。

"在综合工科学校，我听说有很多人引用他创造性的工作。人

们会称赞这些工作十分重要，然后马上再加一句，说它还没有一个不含错误的数学证明，而且还带着多得令人气愤的脚注。结果，最迫切的就是使一切都严格起来。这项任务已经完成了，今天莱维的孙子们很高兴能被接受为完全彻底的数学家。就像他们中的一位刚刚说过的，他们把自己看作‘概率论学家变成了中产阶级’。

“我担心为了这种接受所付出的已经远远地太多了。在知识的每个分支，似乎都有相继的精确度和普遍性的层次。有一些除了最平凡的问题之外，不能对付任何问题。但是几乎在知识的任何分支，人们越来越有能力把这种精确度和普遍性向前推进。比如，证明定理的一个形式并不比原来的形式更具普遍性可能要有一百页的准备，而它并没有开拓出新的视野。但是某些幸运的知识分支允许一个可以被称为经典的中间层次的精确度和普遍性存在。保罗·莱维的伟大就在于他同时是他的领域的先驱者和经典者。

“莱维很少关心除了纯粹数学之外的事物。而且，那些必须解决某个被定义了的问题的人在他的著作中往往很难找到一个恰好合用的公式来为他们服务，而不再花费任何努力。另一方面，如果我可以相信我的个人经历，莱维处理系统阐述机遇中更加基本的问题时的方法使他越来越像一个巨人一样引人注目。

“不论是在本文所致力于阐述的那些彼此不同的主题中，还是在我检查过的其他著作中，一个恰当的数学形式似乎都急切地要求莱维提供的概念做工具，或者要求以同样精神制成的并具有同样普遍性的工具。更进一步，莱维探索的内部世界把它自己揭示为与我们周围的世界分享一种带有预见性的一致，那无疑是他的天才的标志。”

刘易斯·弗莱·理查森

(Lewis Fry Richardson, 1881 ~ 1953)

甚至按照本章的标准，L.F. 理查森的一生也是非同一般的，

他生活的各个方向无法在任何一个占主导地位的方向上结合起来。他恰巧是演员拉尔夫·理查森(Ralph Richardson)爵士的叔叔。参见《世界科学名人录》第1420页;《皇家学会会员讣告》9,1954年,第217~235页,摘自Richardson 1960 a和Richardson 1960 s,以及格莱瑟(Greiser,M.)在《自动数据处理》(Datamation)1980年6月号中的故事。一些个人趣闻是由理查森的一个亲戚大卫·埃德蒙森(David Edmandson)提供的。

用他的颇具影响的同时代人泰勒(Taylor,G.I.)的话说:"理查森是一个十分有趣并且富于创造性的人,他很少以和他的同时代人一样的方式考虑问题,也常常不为他们所理解。"而戈尔德(Gold,E.)的话可以这样理解:他的科学工作是独创性的,有时难以理解,有时被清晰得出人意料的例证阐述得明明白白。在他的湍流研究和后来导致了Richardson 1960 a和1960 s发表的出版物中,他偶尔地,但是并不是不自然地,摸索着前进,也许还带有一点迷惑。他掘开新的地面,而后必须用他在前进中获取的高深的数学探索前进。那些数学并不是从他大学生涯的积累中找出来的。看到他开拓新课题——甚至是一组课题——的倾向,如果没有意识到他惊人而有条理的勤奋,人们肯定会对他的成就目瞪口呆。

他靠奖学金上了剑桥,获得了物理学、数学、化学、生物学、动物学的学士学位,因为他不能确定自己该从事哪项工作。亥姆霍兹(Helmholtz,H.)在成为物理学家之前是个医生,和理查森相比他似乎是在按逆序参加人生的宴席。

出于某种原因,理查森与剑桥曾发生过争执。当他多年以后申请博士学位时,他拒绝获得硕士学位,因为那要花费10英镑。于是,他注册了伦敦大学,那时他正在那里讲课,下面坐着他自己的学生。在47岁时,他获得了数理心理学博士学位。

他的职业生涯是在气象台开始的,但他是个一丝不苟的贵格会教徒(Quaker),是1914~1918年战争的发自内心的反对者。因此当气象台在战后并入新的空军部时,他辞职了。

利用数值过程进行天气预报是Richardson 1922~1965年的主

题，很明显，这是一部对现实有预见力的著作。33 年以后，这部书作为经典而重印。但是在 20 年时间里它一直遭到鄙视。实际的情况是，当理查森用有限差分方程去逼近大气演化的微分方程时，他曾选取不适当的空间和时间基本步长中的值。既然没有觉察到这些步长需要小心地选择，他的错误就难以避免了。

然而，这部书很快就使他被选入皇家学会。Richardson 1922，第 66 页的五行诗被广为引用：

大轮身上长小轮，
小轮吃掉它们的速度，
小轮身上有小小轮，
这样一直到粘度
（就在分子的意义上）。

事实上，这几行诗由于经常被不具名地引用而变得极为有名。一位研究英语文学的学者在看到这几行诗以后向我指出了它和一些古典作品之间的联系。很明显，理查森模仿了斯威夫特（Swift, J.）的诗，即 Swift 1733 中的第 337 ~ 340 行，原诗是这样的：

于是，博物学家观察到，一只跳蚤，
身上还有小跳蚤咬，
身上还有小小跳蚤咬，
还有还有到无穷。

但是，理查森避免了采用 de Morgan 1872，第 377 页中的另一种表述：

大跳蚤有小跳蚤背上咬，
小跳蚤还有小小跳蚤，小小小，小到无穷小。
大跳蚤自己还有大大跳蚤可以找，

大大跳蚤还找大大大跳蚤，还有更大、更大、更大的。

这些变体之间的差异，并不像看起来那么小。事实上，这些差异给人一种奇妙的感觉，让人相信理查森仔细地把他的文学模型和物理学术语匹配到一起。他确实认为湍流只包括从大漩涡到小漩涡的“直接的”逐级能量交换——斯威夫特(Swift, J.)式的交换。要是他也相信从小到大的“反向的”能量交换——就像有些人现在相信的那样——他大概会模仿德摩根(De Morgan, A.)!

用一种类似的轻松方式，Richardson 1926 的第二节的标题取名为“风有速度吗”？这一节的开头这样写道：“这个初看起来愚蠢的问题增进了认识。”他接下来提到如何在不必提及风速的前提下研究风的扩散。为了对空气运动的不规则性的程度有所了解，他提到了一个由外尔斯特拉斯函数(它连续但处处不可微；第 2 章提到过，在第 39 章和第 41 章中研究)构成的短暂的评述。不幸的是，这件事立刻就中断了。他没有注意到外尔斯特拉斯函数是标度可变的，这是一件多么遗憾的事情啊！而且，如泰勒所说的，理查森还定义了粒子的湍流互扩散法则，他只差一根头发丝的距离就会发现柯尔莫哥罗夫谱。但是，每次重看他的论文，都会发现某个以前被漏过去的观点。

理查森还是一个细致而成功的实验家。他最早的实验包括测量云层中的风速，在实验中，他往云层中打钢弹，大小从豌豆到樱桃不等。后来他进行关于湍流扩散的实验(Richardson & Stommel 1948)需要大量的浮标，这些浮标必须清晰可见，因此最好采用白色加彩色，还要保持几乎全部淹没在水下以免受风的影响。他的解决办法是买了一大包欧洲防风草，把它们从科德角运河(Cape Cod Canal)的一座桥上扔下去，他在另一座桥上作观察。

他做了多年不落俗套的教师和管理员。后来，一份遗产使他可以提前退休去倾心研究国家间武装冲突的心理学，这是他自 1919 年就作为副业进行探讨的学科。他死后出版了两本书，Richardson 1960 a，s(Newman 1956，第 1238 ~ 1263 页重印了作者的

摘要)。理查森死后出版的文章包括Richardson 1961,这篇文章中探讨了第5章中描述的海岸线长度问题,这个问题对本书的产生有着特殊的影响。

乔治·金斯利·齐普夫
(George Kingsley Zipf, 1902 ~ 1950)

美国学者齐普夫起初是一名文献学家,但他后来把自己称做统计人类生态学家。他在哈佛做了20年讲师,在刚刚出版了《人类行为与最小努力原则》后死去。很显然,书是他自己出钱印的。

这就是那种在很多方面暴露出天才的火花的书(Fournier 1907是另外一本),同时,书中充斥着杂七杂八的随意的记号和放肆的言辞。一方面,它讨论性器官的形状,还涉及奥地利被德国吞并,因为这些改进了某个数学公式的适应度。另一方面,它有很多的图片和表格,它们一刻不停地强调着这样一条经验法则:在社会科学统计中,数学上便利与经验的拟合程度的最佳组合经常是由一个标度可变的概率分布给出。第38章中研究了几个例子。

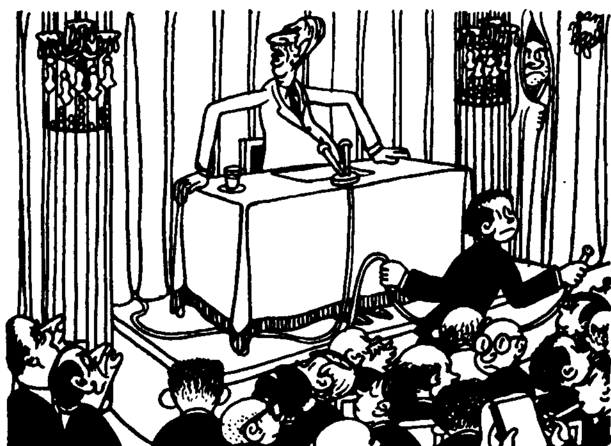
自然科学家在"齐普夫定律"中找到了标度律的对应物,这种标度律在物理学和天文学中只要有证据证明其有效性而无须特别的感情就能被接受。因此,物理学家会发现他们难以想象当齐普夫——在他之前还有巴莱多(Pareto)——在社会科学中遵循同样的步骤并产生同样的结果时他的反对者们所表现的愤怒。极为不同的尝试在不断进行,那些人试图事先证明所有基于使用双对数图表的证据为假。但我认为,倘若不是因为它所导出的结论的性质的话,它本该是没有什么争议的。不幸的是,直接的双对数图表指示出公然违背高斯法则的分布,而该法则长期以来都是无可非议的和奏效的。应用统计学家和社会科学家没有注重齐普夫,这一点可以解释他们领域中惊人的倒退。

齐普夫用一种百科全书式的热情搜集社会科学中的双曲线法

则的例子,用顽强的毅力为他的发现和其他人类似的发现辩护。但是,本文明确地认为他的基本观点没有什么价值。频率分布在社会科学中并不总是双曲线型的,而在自然科学中也不总是高斯型的。一个更为严重的错误是齐普夫把他的发现同空洞的语言论证联系在一起,而远远没有把它们结合成整体的思想。

在我一生中的一个关键点上(第42章),我读了数学家沃尔什(Walsh,J.L.)为《人类行为》所写的睿智的书评。它只提到了那些好的部分,就极大地影响了我早期的科学工作,其间接的影响也依然存在。因此,我应该通过沃尔什感谢齐普夫。

否则,齐普夫的影响很可能还是无足轻重。人们十分清楚地——甚至通过讽刺画——从他那里看到了环绕着任何交叉学科研究的特殊困难。



— Veuillez, messieurs les journalistes, fournir vos questions à mes réponses.

图 40-1

亲爱的读者:

我最大的愿望是你们会针对我的回答问更进一步的问题。

这幅作于1964年1月30日的画经过让·艾菲尔(Jean Effel)先生的允许重印于此。

第 41 章　历史

数学家们常常引用高斯的格言，“当一座大楼完工的时候，应该没有人能够看到脚手架的痕迹”，作为借口来忽略隐藏在他们自己的工作或他们研究领域的历史背后的推动力。幸运的是，与此相反的观点获得了越来越强的力量，本文中的颇多插入语也表明了我本人在这一问题上的立场。在这里，我把几个稍长一些的故事留下来启迪和娱乐读者。它们中有我最近在对莱布尼兹和庞加莱的热情驱使下在图书馆中突击搜索到的琐碎事。

亚里士多德和莱布尼兹，伟大的生物链，客迈拉①和分形

对亚里士多德和莱布尼兹的引用，在那些严肃的书中已经没有必要很久了。但是，尽管连作者本人也没有料到，这里的引用并不是开玩笑。分形的一些基本思想可以上溯到亚里士多德和莱布尼兹，这些思想渗透在我们的文化之中，甚至影响着那些自认为不受哲学的支配力影响的人们所坚持的不十分严谨但有说服力的观点在数学和科学中的体现。

我的第一个线索来自 Bourbaki 1960 中的一段话：莱布尼兹刚刚建立了微积分并发明了表达式 d^kF/dx^k 和 $(d/dx)^kF$，他的头脑中就产生了第 27 章中所描述的分数的积分–微分观点。莱布尼兹在 1695 年 9 月 30 日写给德·罗必塔（de l' Hospital）的信（Leibniz 1849–，Ⅱ，ⅩⅩⅣ，197 ff）中这样写道（意译）：“看来约翰·伯努利（John Bernoulli）好像已经告诉过你我曾经对他提起一个惊人的类

---

① 客迈拉，译自 Chimera，希腊神话中的怪兽。——译者注

比,通过它我们可以把连续微分类比为几何级数。人们也许会问一个有分数指数的微分是什么样子的,实际上,其结果可以表达为一个无穷级数。虽然这看起来和几何学迥然不同,几何学中还没有这样的分数指数,但是由于很少有哪一个悖论是无用的,这些似是而非的推论总有一天会产生有用的结果。一些就自身而言无关紧要的思想也许恰巧会产生更美好的思想。"莱布尼兹在 1695 年 12 月 28 日对约翰·伯努利谈到了更进一步的细节(Leibniz, 1849–, Ⅲ,1,226 ff)。

虽然莱布尼兹对这类问题想得很多,这些想法却从来没有被融入牛顿的微积分观点中,这种方法上的差异是有其原因的。实际上[见《伟大的生物链》(*The Great Chain of Being*),Lovejoy 1936],莱布尼兹深信被他自己称为"连续性原理"或"完全性"的观点。亚里士多德早就认为,任意两个生物物种之间的差异都可以被其他的生物物种连续地补充。因此,他被那些"介于两者之间"的动物们所吸引。故用一个特定的术语,两类之间的(επαμφοτεραξειν),来命名这些动物(这些是我从劳埃德 Lloyd,G.E.R.那里听说的),同时可以参见本章**自然无飞跃**一节。

连续性原理反映了(或验证了?)对各种事物间"缺失的环节"的信念,包括相信客迈拉的存在,在这里这个词取其在古希腊神话中描述的意思:一种有着狮头,羊身——还有蛇尾并且嘴里喷火的女怪!(这本书里应不应该提到客迈拉?如果我会读到关于客迈拉的传说的一个分形的书面描写,我知道谁会受到谴责。)

当然,现代原子理论对遥远的本原的探索使人们把更多的注意力集中于与此相反的古希腊哲学思想,即德谟克利特(Democritus)的哲学思想。这两种相反力量之间的张力继续在我们的思想中扮演富有创造力的中心角色。也许康托尘埃正传播着一个古老的悖论:它无穷可分但不连续。在这里顺便提一句,就像 Soler 1973 中从一个惊人的角度所证明的一样,在古希伯来文化传统中,客迈拉不是被人忘记,就是被人抛弃。

相信有生物的客迈拉存在的观点日渐被人们抛弃,但是这并

不重要。亚里士多德的思想在数学中有这样一个应用,即在整数序列中插入整数之比,然后插入整数之比的极限。在这样的传统中,每一个由整数序列定义的现象都是内插的候选对象。这样,莱布尼兹急于讨论分数微分是受到了他思想中最核心的(并且构成了他填充圆环的基础,见第18章)观点的极大鼓舞。

那么康托、皮亚诺、科赫、豪斯多夫的情形又怎么样呢?他们创建了各自的怪物集合,难道不足以成为最早的三位真正献身于实际实现数学客迈拉的人?而且,难道我们不应该把豪斯多夫维数看作为客迈拉排序的一种尺度?现在的数学家们已经不再去读莱布尼兹或康德,但1900年的学者要读。因此,当读了上一章理查森一节中斯威夫特的诗,我们可以想象科赫根据下面的规则构筑雪花曲线。他把"大跳蚤"定义为画在图6-1上的初始三角形。然后他在大跳蚤的每个脊背的中点为中心放一个小的三角形"跳蚤"。他依据这样的规则直到无限。这种想象并不是建立在事实依据之上,但它阐明了我的观点。科赫不能不从莱布尼兹流传下来的文化洪流中吸取营养,斯威夫特的小诗也通俗地展示了莱布尼兹的思想。

下面,让我们从这些为艺术而艺术的数学家们(他们信服康托那句"数学的本质是自由")转向那些崇尚自然并试图模仿自然的人们。

他们做梦都不会想到客迈拉,对不对?事实上,他们中的许多人想到了客迈拉。第10章中引用了实际研究湍流的人员在决定他们所研究的过程是否收敛于"豌豆、意大利面条或莴苣"时遇到了困难,他们因为不同的提问方式看起来应该得到不同的答案而感到恼火,最后以需要一些"介于两者之间"的既有直线的性质又有平面的性质的形状而告终。第35章中提到了另一群寻找"介于两者之间"的人,那是一些研究星团的人员,他们必须描述一些形状"看起来像河流"的构造,尽管这些构造显然由一些孤立的点组成。难道这些巧夺天工的东西不是在告诉这些清醒的寻找者,他们虽然浑然不知古代记述和古希腊的梦魇,却正沿着一条已经有

很多人走过的路朝客迈拉走去。

我们在对星团星系团的研究中发现指明康托学派和理查森学派的共同基础的另一个线索。对那些寻找概念根源的人这是一个敏感的话题,因为那些职业天文学家们憎恶承认任何来自那些占星术士的影响,"无论他们的概念在他们的花言巧语中听起来多么有吸引力"(Simon Newcomb 语)。这种厌恶也许可以解释为什么人们习惯于把第一个完整地描述分级模型归功于查理,一个天文学家,而不是傅尼埃·达尔博(于第 40 章中讨论过)或依曼纽尔·康德。

康德对物质分布缺少各向同性的评论是有说服力并且清楚明白的。让我们来看看这些最精彩的评论(这些话应该鼓舞读者去欣赏 Kant 1755 ~ 1969 或 Munitz 1957):"那赋予我的理论最大魅力的部分……包括下面的观点……我们……很自然地……把模糊的恒星看作是……由很多恒星组成的系统……[它们]不过是一些星系,或者换句话说,是银河……我们可以更进一步猜测这些更大的星系彼此之间并不是没有联系的,而且,通过这种相互的联系,它们又组成了一个更为巨大的系统……也许,就像前面说到的系统,这一个又只是新的大量的组合中的一个成员!我们看到了天体和系统的一种具有递进关系的开头的成员;而且,这无穷递进的第一部分已经可以使我们认识到什么必须被推测为整体。没有止境,只有深渊……无边的深渊。"

康德把我们带回了亚里士多德和莱布尼兹时代,而且,上面的故事也许可以解释为什么康托和理查森的思想经常地听起来如此相似,至少对于我来说是这样的。为把这一系列戏剧性的事件推向高潮,请允许我引用威尔第(Verdi, G.)的歌剧《游吟诗人》中讲 Azucena和Luna"彼此是兄弟(Egl'era tuo fratello)"的最后一句话:

> 这些伟大的传统的领导者们变得互相轻视和相互争斗,但在他们相互纠缠的根中他们是兄弟。

当然历史并不能解释数学不可思议的有效性中的玄妙(见第1章)。这玄妙仅仅是随着时间的推移改变了个性。为什么信息、观察和寻找内省地令人满意地能够表现我们古代的著述者们的结构的混合物,应该不断地产生如此强有力的主题,以至于甚至在许多与更好的观察相悖的细节发现后很久,以及这些主题本身看起来已经衰落的时候,它们还继续激励着物理和数学中有成果的进展呢?

布朗运动和爱因斯坦

自然界的布朗运动是"生物学家贡献给或帮助贡献给物理科学基本现象中最有价值的"(Thompson 1917)。一个生物学家(早在1800年以前)发现了这个现象,另一个生物学家罗伯特·布朗在1828年发现这一现象从本质上说并不是生物的而是物理的。这后一步发现是至关重要的,因此形容词"布朗的"并不像某些批评家所说的那样不当。

布朗还有其他令人称道的荣誉,而在《不列颠百科全书》第九版(1878)他的传记中并没有提到布朗运动。在第十一版至第十三版(1910~1926),布朗运动被寥寥数语一带而过。当然,在佩琳获得了1926年诺贝尔奖之后的几版中,它得到了充分的论述。Brush 1968和Nye 1972中描绘了对布朗运动物理本质的缓慢接受。在最近的《不列颠百科全书》中,提到了Perrin 1909和1913,Thompson 1917和Nelson 1967。

从布朗开始的发展在1905~1909年间被绝大多数来自爱因斯坦的理论和佩琳的实验结果推向高潮和结局。有人也许会以为爱因斯坦从解释19世纪的观察入手,但事实上并非如此。

Einstein 1905(在Einstein 1926中重印)以这样的话开头:"在这篇论文中,将要说明:按照热的分子运动论,由于热的分子运动,大小可以用显微镜看见的物体悬浮在液体中,必定会发生其大小可以用显微镜容易观测到的运动。可能,这里所讨论的运动就是所

谓"布朗分子运动";可是,关于后者我所能得到的资料是如此的不准确,以至在这个问题上我无法形成判断。"

接下来让我们来看 Einstein 1906(在 Einstein 1926 中重印):"在[Einstein 1905]发表后不久,[我被]告知[说]物理学家们——首先是(里昂的)古伊(Gouy)——通过直接的观测而确信所谓布朗运动是由液体分子的不规则热运动引起的。不仅布朗运动的定性特性,而且粒子所经历的路径的数量级都完全符合这个理论的结果。在这儿我将不会随意尝试把它同不充足的实验材料进行对比。"

再晚些时候,在爱因斯坦 1948 年 1 月 6 日写给米凯耳·贝索(Michele Besso)的信中,他忆起他曾经"从力学推导出[布朗运动],全然不知曾经有人已经观察过这一类东西。"

"康托"尘埃和亨利·史密斯(Henry Smith)

一个说话风趣的人察觉到把布朗运动归功于罗杰·布朗(Roger Brown)违背了命名由来的一个基本规律,因为名誉和一个像布朗这样平淡无奇的名字联在一起是不和谐的。也许这可以解释为什么我写了二十年关于康托尘埃的事情,直到偶然的机会才知事情真相,它应该归功于一个叫亨利·史密斯的人。

H.J.S. 史密斯(1826~1883)长期在牛津担任萨维里(Savilian)几何教授,他的《科学论文》曾经被出版和重印,见 Smith 1894。在埃尔米特(Hermite)导演的一幕怪剧中,他因为与赫尔曼·闵科夫斯基(Hermann Minkowski)分享一项奖而在死后名声大振。他还是一个黎曼积分理论的早期批评者。(另)一个说话风趣的人发现,如果说阿基米德(Archimedes),柯西和勒贝格的积分理论是上天赋予的,那末黎曼的理论无疑是人类的笨拙发明。实际上,Smith 1875(Smith 1894 的第 25 章)指出黎曼的理论无法应用于那些不连续点落在某些特定集合中的函数。他举的是什么样的反例?他举了第 8 章中谈到的康托尘埃和第 15 章中谈到的正测度的康托尘埃。

维托·伏尔泰拉(Vito Volterra,1860～1940)于1881年重新构建了史密斯的第二个反例。

当然,史密斯和伏尔泰拉并没有深入地研究他们的例子,但是康托也没做什么!所有这些在Hawkins 1970中都有记载,为什么从来没有把发明"康托"尘埃归功于史密斯呢(至少据我所知)?

维　　数

欧几里得(Euclid,公元前300年前后)　维数是欧几里得《几何原本》第一卷开篇关于平面几何的定义的基础:

1. 点不能再分
2. 线只有长度而没有宽度
3. 线的两端是点……
5. 面只有长度和宽度
6. 面的边缘是线

这一主题在他关于空间几何的简短的第11卷的定义中得到了发展:

1. 体有长度、宽度和高度
2. 体的边缘是面

(Heath 1908中对这个问题有评论)

实际上,这些观点的基础模糊不清。格丝里(Guthrie)(1971－Ⅰ)在毕达哥拉斯(Pythagoras,公元前582～前507)中看出了维数观点的端倪,但范·德·瓦尔登(Von der Waerden)认为对此必须持怀疑态度。另一方面,在《共和国》的第Ⅶ卷中,柏拉图(Plato,公元前427～前347)对苏格拉底(Socrates)评论道,"讨论过平面之后,……正确的方法是下一步按顺序在第二维之后研究第三维,即立体或任何有深度的物体的维数。"多了解一些在欧几里得之前对维数的其他研究是大有裨益的。

黎曼　黎曼在他1854年的学位论文《关于构成几何学基础的假设》中,提到了缺少对维数概念的任何研究。

查尔斯·埃尔米特　埃尔米特作为一个数学上极端保守分子的名声(如第6章中引用的他写给斯蒂尔吉斯的信中记载的那样)被由他写给米塔格-列夫勒(Mittag-Leffler)的信证实了(Dugac 1976 c)。

1883年4月13日的信中写道:"读康托的著作似乎是一种名副其实的痛苦……而且,我们中没有谁会被引诱去追随他……线和平面之间的映射使我们绝对不愿意去关心它,我们认为,这种观察,既然人们将不会从它演绎出什么结论是因为考虑得过分随意,从而最好让作者等一等……[但康托也许]会找到有兴趣愉快地研究他的读者,这是我们不会做的。"

1883年5月5日的信中写道:"康托的一篇文章的译文由庞加莱极为细心地编辑……[他的]观点是几乎所有的法国读者将对这种同时是数学和哲学的研究格格不入,并且,这种研究中有太多的随意性,我认为这种观点是正确的。"

庞加莱　对欧几里得观点的一个有说服力的并且最终非常成功的阐释是庞加莱在1903年(Poincare 1905,第三章,第三节)和1912年(Poincare 1913,第9部分)给出的。下面是一段意译:

> "当我们说空间有三维的时候,我们的意思是什么?如果我们在分割连续统 C 时只需要把一定数目的可以相互区别的元素作为割集就能满足要求,我们说这个连续统是一维的……如果,相反地,……在分割一个连续统时要使用构成一个或几个一维连续统的割集才能满足要求,我们就说 C 是二维连续统。如果使用构成一个或几个最多为二维连续统的割集才能满足要求,我们则说 C 是一个三维连续统;依此类推。
>
> "为了验证这个定义,我们必须检查几何学家们是如何在他们的工作开始时引入维数观点的。那么,我们发现了什么呢?他们通常这样开始:把面定义为体或空间的边界,把线定义为面的边界,把点定义为线的边界,而

且,他们声称同样的过程不能继续进行。

"这正是前面给出的观点:称作面的割集对于分割空间是必需的;称作曲线的割集对于分割面是必需的;点不可分,不是连续统。因为线可以被不是连续统的割集分割,所以它们是一维连续统;因为面可以被一维连续的割集分割,所以它们是二维连续统;最后,空间可以被二维连续的割集分割,所以它们是三维连续统。"

◁上面的话不适用于分维。对于这篇文章中不同的岛屿内部,D 和 D_T 一致并且都等于 2,但是海岸线却是完全不同的一番情形:它们在拓扑上是一维的,但在分形上是高于一维的。▶

布劳韦尔到门杰 现在让我们引用 Hurewicz & Wallman 1941 中的话:"1913 年,布劳韦尔在庞加莱直观的基础之上构造了一个精确的、拓扑不变的维数定义,这个定义在很宽范围的一类空间上和我们现在使用的维数定义是一致的。布劳韦尔的文章多年来一直没有人注意。然后在 1922 年,门杰和乌里佐恩独立于布劳韦尔并且彼此独立地重新创造了布劳韦尔的概念,取得了重要的进展。

"在那以前,数学家们在含混的意义上使用维数这个词。如果以某种非特定方式描述一个构形上的点所需的最少实参数的个数是 E,则称这个构形是 E 维的。这种方法的危险性和不一致性被 19 世纪晚期两个著名的发现展示得清清楚楚:康托把线上的点与面上的点一一对应,和皮亚诺把一个区间映射到整个正方形上的连续映射。第一个发现打破了人们认为平面上的点比线上的点多的观念,并且表明维数可以通过一一映射发生改变。第二个发现反驳了维数可以定义为描述一个空间所需的最少连续实参数的个数的观点,并且表明维数可以经过单值连续映射而提高。

"还有一个极为重要的问题尚未解决:我们是否可以把康托和皮亚诺构造的特征相结合,在 E 维和 E_0 维欧氏空间之间建立对应?也就是说,建立一个既是一一的又是连续的对应?这个问题至关重要,因为在欧氏 E 维空间和欧氏 E_0 维空间之间上述类型

的变换的存在性会证明，维数（在自然意义上欧氏 E 维空间是 E 维的）根本没有任何拓扑意义！拓扑变换的类因此将宽得无法具有任何几何上实际应用的意义。

“布劳韦尔在 1911 年给出了第一个证明：欧氏 E 维空间和欧氏 E_0 维空间同胚的充分条件是 E 等于 E_0（Brouwer 1975-2，第 430～434页；特殊情形 $E \leq 3$ 和 $E_0 > E$ 在此之前已经于 1906 年被吕洛特（J. Lüroth）证明）。但是，这一证明并没有明确指出任何使欧氏 E 维空间区别于欧氏 E_0 维空间，从而保证两者之间同胚的不存在性的简单拓扑特性，因此，更具有说服力的是布劳韦尔在 1913 年的论证过程，他引入了空间的一个整数值函数，这个函数，由于它特定的定义方法，是拓扑不变的。在欧氏空间中，它恰好是 E（因此与它的名字相符）。

“同时勒贝格用另一种方法证明了欧氏空间的维数是拓扑不变的。他在 1911 年曾经观察到一个正方形可以被任意小的“积木”覆盖而没有任何点包含于三块以上的积木中，除非这些积木小得每三块就有一个公共点（Lebesgue 1972-4，第 169～210 页）。以类似方式可以把欧氏 E 维空间中的立方体任意分解为任何小的“积木”，使得不超过 $E+1$ 块积木有公共点。勒贝格猜测 $E+1$ 这个数不可能再减小了；也就是说，对于任意分为足够小的积木的分解，至少必有一个点同时属于 $E+1$ 块积木。（布劳韦尔在 1913 年给出了证明。）勒贝格定理还表明了一个使欧氏 E 维空间区别于欧氏 E_0 维空间的拓扑性质，因此它也意味着欧氏空间维数的拓扑不变性。”

关于庞加莱、布劳韦尔、勒贝格、尤里森和门杰在这一领域作出的贡献，参见 H. 弗劳登塔尔（Freudenthal）为 Brouwer 1975-2，第六章作的注解，Menger 1979 的第 21 章中也对此作出了回答。

分维和德尔波夫（Delboeuf，J.） 关于分维的故事要简单得多：它几乎全副武装地从豪斯多夫的著作中显露出来。但无论如何有一点神秘。实际上，在 Russel 1897 的第 162 页中虽然没有提及康托和皮亚诺引起的激烈争吵，却有这样的脚注：“德尔波夫确

实谈到了具有 m/n 维的几何结构，但是没有指出文献来源(Rev. Phil. T. XXXXVI，第 450 页)。”德尔波夫变得引人注目(见“**莱布尼兹和拉普拉斯的标度变换**”一节)；但是我[在 F. 威尔布鲁根(Verbruggen)的帮助下]对他的著作的研究中，没有发现关于分维的更进一步的谈论。

布利高　维数的康托—闵科夫斯基—布利高定义远不及豪斯多夫—伯西柯维奇定义那样让人满意，但在这里我要称赞乔治·布利高(1889～1979)。他的很多书今天即使在巴黎也已经没什么人读了，但是这些书在我是一名学生并且他为我们出题进行考试的时候是那么重要。每当我翻开他的书，都想起是它们领我走进了“现代”数学。我怀疑能否有比该书更少一些证据不足的猜测和人文的描述但也许在教育上更耐久的著作，当我们需要时，能够从我们归档的知识中找到并给我们以同样直观的理解。我想不会有。倘若布利高能够活到今天，看见他挚爱的几何学所取得的进展，我希望他能把这些看作是自己的成就。

自然无飞跃和“丢托巴库斯(Theutobocus)的真实故事”

自然无飞跃是“连续性原理”的最有名的陈述，连续性原理我们在本章的第一节里已经讨论论过，它还被莱布尼兹看作“[他的]被最好地证明了的最好的论断之一”。而且，它是那些“介于两者之间”的几何形状——分形——的尚未成形的遥远的祖先。但是，Bartlett 1968 中把这一论断归功于林耐(C. von Linné)，我为一种看起来不公平的荣誉感到震惊，经过探寻发现了若干事实和一个故事。

确实，18 世纪著名的植物学家和分类学家林耐曾写下这样的话，但仅仅是随便提及，并不是作为一个新的有分量的论述发表，而是在一句传统的格言中。他当时正在翻译莱布尼兹的《自然无飞跃》(*La Nature ne fait jamais de sauts*)。莱布尼兹同时写了无数其

他变体，其中包括：《变化无飞跃》(*Nulla mutatio fiat per saltum*)，《变迁无飞跃》(*Nullam transtionem fieri per saltum*)，《自然的一切都是渐进没有突变的》(*Tout va pardegres dan la nature et rien par saut*)。但林耐的拉丁文译文的确切的原文也许无法在莱布尼兹的著作中找到。

接下来，有意思的是早在1613年，远在莱布尼兹之前，就有人一字不差地预测到了林耐的话。这句话是这样的，自然之功无飞跃(Natura in suis operationibus non facit saltum)(少数那些认为0是单数的脾气怪异的人宁愿以复数saltus来替换掉句中的单数saltum)。是谁写下了这句话？Stevenson 1956第1382页第18条中把它归功于雅克·梯索(Jacques Tissot)。谁是梯索？没有人能够告诉我，于是我去巴黎的国家图书馆寻找答案。

我在一本15页的小册子里找到了这句话，小册子有一个很长的题目，开头是这样的，关于丢托巴库斯大帝的生、死和遗骨的真实故事……，他在(公元前)105年被罗马执政官马略打败并被埋葬在……罗马附近，文字用法语写成，夹杂着拉丁语，记录了在格勒诺布尔附近发现巨人尺寸的遗骨，和讲述为什么这副遗骨是一个人即前述的丢托巴库斯的原因。

在M.爱杜瓦·傅尼埃(M.Edouard Fournier)做注的《各式各样的历史与文学，稀奇古怪的空中悬物大集成》(*Varietes historiques et litteraires, recueil de piece volantes rares et curieuses*)第Ⅸ卷，1859，第241～257页有一个《真实故事》的重印本。我的好奇得到了报偿。在一个极长的脚注中，傅尼埃描述了下面这个长期以来的谎言。在1613年1月11日，正在5.18～5.49米沙子下挖掘的工人发掘出了许多很长的骨骼，于是，这个坑是一个巨人的坟墓的流言就四处传播，这个坑里还印有马略的徽章，还有一块刻着丢托巴库斯名字的石头。这些骨骼被两个当地乡绅"证实"，上了报纸，还拿给国王路易八世看了。关于它们的起源的争议随之而来，而后又渐渐消失了，只是当其他的古老骸骨被认定为消失了的物种时，才会再次出现。古生物学家加入了这场讨论，确定"丢托巴库斯王"是一

头乳齿象。

这个脚注还说到，实际上根本就没有什么雅克·梯索，前面提到的《真实故事》是那两个乡绅用一个假名出版的……作为一个提议的马戏表演的节目介绍。

但是自然无……还是很神秘。它由假装引用亚里士多德的小城镇的江湖骗子说出来总是有些驴唇不对马嘴。更可能地，他们只不过是重复着他们时代的一句套话，起源的问题并没有划上句号。

庞加莱和分形吸引子

与本章中的其他小节不同，本节的内容不仅仅吸引人，而且对我的工作有即刻而长久的影响。昂利·庞加莱(1854～1912)的一些文章引起我的注意正是1977年《分形》在校对的时候，它们导致了第18～20章中概述的新的研究方向，并且计划在其他地方完整地陈述出来。下面让我来回答一下由庞加莱的这些工作和一些相关的工作所不可避免地引出的几个问题。

是又否：他确实是分形("奇怪")吸引子的第一个研究者。但是，在我看来，他的工作中没有一点可使他成为哪怕是大自然分形几何一些可见侧面的、关系疏远的先驱者。

是：有些事实被遗忘了，距Cantor 1883一年之内，与三分尘埃和外尔斯特拉斯函数相近的集合就出现在正统的数学中，远远早于实变量集合和实变函数的革命性理论的创建。

否：这些应用在当时并非没有引起注意。第一次是在自守函数理论中(第18章)，这理论使庞加莱和菲力克斯·克莱因成了名。探索这些应用的是保罗·潘勒韦(Paul Painleve，1863～1933)，他是一位影响远远超出了纯数学王国的学者。他对工程着迷[他是奥维尔·莱特(Orville Wright)的(飞机)事故后威尔伯·莱特(Wilbur Wright)的第一位乘客]，他最终走上了从政的路，曾出任法国总理。我碰巧注意到，佩琳曾是潘韦勒的密友，这样第2章中描述的

“白日梦”看起来就不那么孤立了。

是：康托和庞加莱最终成为好几场智力争斗的对手，而康托就像皮亚诺一样是庞加莱的讽刺的牺牲品，比如下面这段著名的话：“康托主义者(许诺)那种医生称为碰到好病例的快乐。”参见**埃尔米特**小节。因此，知道下面这些对我们是有益的，当需要来临时，庞加莱发现那些经典的怪物并不是钻进了对可见的大自然的描述之中，而是跑到了抽象的数学物理学中去了。我把《天体力学新方法》(Poincare 1892-Ⅲ)第389~390页意译如下：

“让我们试着描画出对应于[三体问题]双重渐进解的两条曲线[C'和C'']所形成的图形。他们的交点形成了一种无穷紧密的……网格。每条曲线绝不自交，但是肯定以一种极其复杂的方式折叠起来，并与网格的每个顶点无限频繁地相交。

人们必定会为这个图形的复杂程度感到震惊，我简直不想画下来。没有任何东西会使我们对三体问题的复杂性有一个更好的理解，而且一般地对所有那些没有通积分的动力学问题也是如此……”

“可以设想几种不同的假设：

(1)[定义为C'(或C'')加上此曲线的极限点的集合S'(或S'')]充满一个半平面。如果是这样，太阳系是不稳定的。

(2)(S'或S'')处于[正的]的有限区域中，占据平面的一个有界区域，可能有一些‘间隙’……

(3)最后(S'或S'')处于趋于0的区域。它类似于‘康托尘埃’。”

为了加深对这些不该被忽略的评述带来的印象，下面是Hadamard 1912, Painleve 1895和Denjoy 1964, 1975中部分内容的意译。

首先是阿达玛：“庞加莱是集合论的先驱者，这是指早在集合论诞生之前，他就把它应用在他的最引人注目也最值得赞美的一项著名研究中。实际上，他给出自守函数的奇点构成整个圆周或康托尘埃。这后一种情况是在他之前的人的想象力所不可能构想

的。这个集合不是集合论中最重要的成就之一，而本狄克森(Bendixson)和康托本人直到后来才发现了它。

"自黎曼和外尔斯特拉斯以来，没有切线的曲线的例子已经是经典的了。然而，谁都能抓住其中的深刻区别，在一方面，是在为了心灵的愉悦所设定的情况下确立起来的事实，不带有任何除了显示其可能性之外的目标和意义，一个在怪物展厅中的展品；而另一方面，则是根植于分析中最经常和最基本的问题的理论中所遇到的同样的事实。"

其次是潘韦勒："我必须坚持存在于函数论和康托尘埃之间的联系。后面这种研究在精神上是如此标新立异以至于数学期刊必须要有点勇气才能发表它。许多读者把它当成哲学而不是科学。然而数学的进展很快就否认了这种评判。在1883年(这一年在该世纪的数学史上称得上是双喜临门)，《数学学报》(*Acta Mathematica*)交替登载庞加莱论富克斯函数及克莱因函数的文章和康托的论文。"

康托的论文在《学报》的第二卷第305～414页上(康托集在第407页)，是《学报》的编辑米塔格—列夫勒(Mittag—Leffler)自愿为康托争取承认而翻译成法文的。有一些(见本章的**埃尔米特**小节)是庞加莱编辑的。然而，庞加莱的结果已经在《评论》(*Comptes Rendus*)上简要发表过了，而且是在康托的工作用德文发表之前。庞加莱如此迅速地就采用了康托的一个发明，在他的第一篇《学报》论文中，他用德文的Mengen来代表集合，而没有时间来选定一个法文中相当的词。

再次是Denjoy 1964："有些科学家把某些真理看作优雅的、受过良好教育的、有教养的人，而对另一些来说，这扇绅士的大门必须永远紧闭。我反复考虑集合论这样一个全新的世界，它无可比拟地更加广阔，更少人工雕琢的痕迹，更简单，更富有逻辑性，也更适合于作为物理世界的模型；总之，比旧的世界更真。康托尘埃具有很多连续体的性质，似乎对应于一种非常深刻的实在。"

在Denjoy 1975第23页，我们见到下面这段话："我认为，很明

显，不连续模型比现在的模型以一种更令人满意的方式，更成功地解释许多自然现象。因此，不连续的法则与连续的法则相比还远未阐明，应该在更广和更深的层次上对它们加以讨论。确保关于这两类知识的均等，将使物理学家能够按需要使用这种或那种方法。”

不幸的是，登乔伊(Denjoy, A.)不能用超出庞加莱和潘韦勒的泛泛的暗示的任何特定的进展来支持他的“白日梦”。一个例外是登乔伊 1932 年关于环面上的微分方程的论文。为了回答庞加莱提出的一个问题，他指出，解和子午线的交可能是整个子午线或任何一个指定的康托尘埃。前者的行为符合物理学家关于遍历性行为的概念，但后者不符合。一个类似的例子由波尔(Bohl)在 1916 年给出。

雅克·阿达玛(Jacques Hadamard, 1865 ~ 1963)是著名的数学家和数学物理学家，阿诺德·登乔伊(Arnaud Denjoy, 1884 ~ 1974)是一位杰出的非常纯粹的数学家，但是没有哪个物理学家愿意听听他们。他们的话在他们的时代没有任何反响。这两个人都出现在庞加莱和潘韦勒的悼词中，他们共同复兴了那些首创者们无法通过重复而振兴的思想。

庞加莱和吉布斯分布

当今庞加莱的复兴可以作为借口在这里叙述一个与本文其他部分无关的技术性趣闻。

这关系到物理学家熟知的吉布斯标准分布，这种分布对于统计学家而言是一种指数型分布。Poincare 1890 寻找一种概率分布，它使得某个参数 p 基于 M 个样本值 $x_1, \cdots, x_m, \cdots, x_M$ 的最大似然估计取 $G[\sum_{m=1}^{M} F(x_m)/M]$ 的形式。换言之，它们使得 x 和 p 的标度可以通过函数 $F(x)$ 和 $G^{-1}(p)$ 发生变换，从而 p 的最大似然估计是 x 的样本均值。这当然是 p 为高斯变量的期望时的情形，

但庞加莱给出了更一般性的解答,现在称为吉布斯分布。

这个事实由齐拉特(Szilard)于1925年独立地重新发现。之后,在1935年前后,库普曼(Koopman),皮特曼(Pitman),达尔穆瓦(Darmois)就最一般的估计过程提出了同样的问题,但并不局限于最大似然法。吉布斯分布的这种性质又被统计学家称为充分性,在统计热力学的齐拉特—曼德布特公理表示中起核心作用(Mandelbrot 1962 t, 1964 t)。在这种方法中,统计推断固有的随意性存在于封闭系统的温度定义之中,但是不在这种标准分布的导数中出现。(后来的一个基于"最大信息诫律"的公理表示把标准分布本身根植于统计推断,我认为这歪曲了它的重要性。)

标度变换:老的经验证据

弹性丝线中的标度变换 非常令人吃惊,现今被重新解释为物理系统中标度变换的例证的最早的经验观测是在150年前进行的。在卡尔·弗里德里希·高斯(Carl Friedrich Gauss)的鼓励下,威尔海姆·韦伯(Wilhelm Weber)着手探讨用于支撑电磁仪表中的移动线圈的丝线的扭力。他发现施加径向负载会导致瞬时的拉伸,之后还有随时间变化的伸长。撤去负载后,产生一个与初始的瞬时拉伸相等的瞬时收缩。随后也有长度的进一步逐渐变短,直到成为原来的长度。扰动的后效遵循 $t^{-\gamma}$ 形式的定律:它们随时间按双曲方式衰减,而不是当时人人预计的按指数形式衰减,预见到如今的结果。

关于这个题目的下一个著作是Kohlrausch 1847,威廉·汤姆森(Willam Thomson)更进一步研究了弹性玻璃纤维的扭力,后来还有开尔文勋爵(Kelvin)于1865年,詹姆斯·克拉克·麦克斯韦(James Clerk Maxwell)于1867年,以及路德维希·玻尔兹曼(Ludwig Boltzmann),他1874年的论文被麦克斯韦认为十分重要,以至在《不列颠百科全书》第九版(1878年)中加以讨论。

这些名字和日期值得我们仔细琢磨。它们证明了要使一个问

题值得研究,仅仅是高斯、开尔文、玻尔兹曼和麦克斯韦这样的人的兴趣还不够。一个吸引他们但击败了他们的问题会变得完全地默默无闻。

静电莱顿瓶中的标度变换 用E.T. 惠特克(Whittaker)的话说,背景是这样的:"1745年莱顿大学的教授彼德·范·穆申布鲁克(Pieter van Musschenbroek,1692~1761)试图找到一种保存电荷的方式,以防止观察到的带电体在空气中的电荷衰减。带着这个目的,他试验了把带电的水封闭在某些绝缘体(比如玻璃)内的效果。在他的一项试验中,他把一小瓶水用金属线悬挂在枪管上,线穿过软木塞几英寸插入水中;枪管用丝线悬挂起来,距离一个带电的玻璃球非常近,以使在运动中插入枪管的一些金属条接触球体。在这些条件下,一个名叫库那乌斯(Cunaeus)的朋友碰巧用一只手抓住了小瓶,又用另一只手接触了枪管,结果受到了强烈的电击;很明显,一种积累或放大电力的方法已经发现了。这项发明被诺赖(Nollet)称为莱顿瓶。"

Kohlrausch 1854发现了莱顿瓶放电的速度与他关于丝线的工作具有相同的结果:电荷随时间按双曲方式衰减。在雅各·居里(Jacques Curie,皮埃尔·居里的兄弟和他的第一个合作者)的博士论文中,详细研究了不同于玻璃的电介质,他发现在某些电介质中的衰减是指数型的,但是在其他一些电介质中是双曲型的,其指数γ的值是变动的。

标度变换:恒久而古老的万灵药

数不胜数的关于标度可变的衰减或噪声的解释,散布在一百多年间为数众多的各种杂志上。所有这些读起来都令人伤心。它们一直而且千篇一律地缺乏成功,因为早在19世纪初就已经被发现的死路被在不同的情况下用不同的词语探索了一遍又一遍。

霍普金森的混合物万灵药 面对莱顿瓶电荷的双曲型衰减,霍普金森(Hopkinson,麦克斯韦的学生)在1878年提出:"粗略的解

释把玻璃看成多种不同的硅酸盐混合物，它们各自的特性不同。”从中可以得到，类似于双曲线的衰减函数实际上是两个或多个不同的 $\exp(-s/\tau_m)$ 型的指数型函数的混合，它们中的每一个都有特定的驰豫时间 τ_m。然而，即使是早期的数据也足以说明两个到四个指数是不够的，于是这种论证被放弃了。

然而，它还是在没有充分数据驳斥它的地方不时冒出来。

驰豫时间分布万灵药 当数据存在了好几十年，而人们除非用非常可笑的 17 个或 23 个指数得到的混合否则不能去拟合它们的时候，他们试图走到底，干脆用无穷多个指数进行混合。由欧拉的伽玛函数的定义可得：

$$t^{-\gamma}=[\Gamma(\gamma)]^{-1}\int_0^\infty \tau^{-(\gamma+1)}\exp(-t/\tau)\mathrm{d}\tau。$$

这个等式表明，若指数驰豫时间 τ 具有“密度”$\tau^{-(\gamma+1)}$，则混合物是双曲型的。然而，在逻辑上，这种论证却是循环推理。一种科学解释的输出先验地被认为应该不如其输入明显，但是，$t^{-\gamma}$ 和 $\tau^{-(\gamma+1)}$ 在实质上是一样的。

瞬态行为万灵药 听到上节中列出的标度变换的种种特征，另一个几乎普遍适用的第一反应是：毫无疑问，这些双曲函数 $t^{-\gamma}$ 只不过是瞬态的复杂现象，当衰减观察了足够长时间以后，它们就会被指数地截断。第一系统地研究这种截断的是 von Schweidler 1907，他测量了莱顿瓶的衰减，起初是以 100 秒的间隔，之后间隔增大，至总时间为一千六百万秒(200 天，从夏天到冬天!)双曲型衰减依然分毫不差。更近的关于 $1/f$ 电噪声的实验开头持续了几小时，后来是一个晚上，之后是一个周末，再往后是一个短假期。在令人吃惊的许多案例中，$1/f$ 行为也是分毫不差。

从前面几章，比如第 9 章对星系团的研究，可以注意到科学家们会变得如此热衷于寻找一个截断，以便忽略对描述和解释那些表征标度变换范围的现象的需要。奇怪的是，这种对截断的过分热衷，在工程师中更加厉害。以第 27 章中讨论过的例子为例，许多水文工作者不愿采用我的模型，因为其中包括了对标度变换的

一个无穷截断。在工程项目中,截断的有限性无关紧要,然而有限的截断大概是实际工作者所热烈向往的。

莱布尼兹和拉普拉斯的标度变换

简述莱布尼兹的科学工作是一种严肃的经历。除了微积分以及其他日臻完善的思想,有预见性的观点的数量和广度都极为丰富。我们在第 17 章中见到的例子"填充",还有本章第一节引用的,都是这样的例子。此外,莱布尼兹开创了形式逻辑,还第一个[在 1679 年给惠更斯(Huygens)的信中]建议几何学中应该包括后来称为拓扑学的分支。(在不那么崇高的层次上,他开创了在数学记号中使用希伯来字母的先河……作为对黄道符号的补充!)

我有一次发现莱布尼兹对几何标度变换的重视之后,我对他的着迷愈发强烈了。在试图严格化欧几里得公理的"欧几里得原型"(Euclidis πρωτα)(Leibniz 1849, Ⅱ, 1, 第 183 ~ 211 页)中,他在第 185 页写道:"Ⅳ(2):我有直线的好几个定义。直线是一条曲线,它的每一部分都与整体相似,而且,不仅在曲线当中而且在集合当中,只有它具有这个性质。"这个论断现在已经可以证明了。后来莱布尼兹描述了更严格的平面的自相似性。

约瑟夫·德尔波夫(Joseph Delboeuf, 1831 ~ 1896)在 1860 年独立产生了同样的想法,他是个比利时作家,Russel 1897 善意地批评了他的观点。人们发现他是一个真正不平凡的科学人物,他把他对古典作品的业余热情带到了几何哲学中。然而,他的"相似性原理"并没有在数学上为上文引用的莱布尼兹的论断增加什么内容(当他进行工作时,他不知道莱布尼兹的工作,而后他以一种优雅的宽容和自豪引用了莱布尼兹的言论——也指引了我)。德尔波夫还在本书第 523 ~ 524 页(黯淡地)闪现了一下。

另一个与标度变换不同的相遇,是在莱布尼兹的《单子论》(*Monadology*)的第 64 和 69 条(对于那些向极为富有的人表现慷慨的人们而言),那里认为世界的每一个小部分都精确地具有大的部

分的复杂程度和组织方式。

拉普拉斯也产生过一个与标度变换有关的思想。在他 1842 年出版并翻译成英文的第五版(但是 1813 年的第四版中没有)《宇宙体系论》(*System of the World*)中,人们可以在第五部的第五章中发现下面一段话(Laplace 1879, Ⅵ)。“(牛顿引力)的一个重要性质就是,如果宇宙中的所有物体,它们之间的距离和速度的大小成比例地增加或减小,它们的轨迹会与它们当前的轨迹完全相似;因而,缩小到可以想象的最小的空间中的宇宙,对观测者而言总是呈现出同样的现象。自然法则因而只允许我们观测相关的大小……[以下接脚注]几何学家证明欧氏平行线公理的企图迄今为止是不成功的……圆的定义不包括任何只依赖于其绝对量的东西。然而,如果我们缩小半径,我们不得不也以同样的比例缩小其周长,以及其内接图形的边长。这种比例性质似乎是比欧氏公理更加自然的一条公理。在万有引力的结果中观察这种性质是十分有趣的。”

外尔斯特拉斯函数

外尔斯特拉斯的连续而处处不可微函数,对数学的发展有重大影响,因而人们很想知道这个故事是否也遵循法卡斯·鲍耶(Farkas Bolyai)对他的儿子雅诺斯(Janos)所描述的模式:“许多事情都有那么一个时刻,在那时会同时在许多地方发现它们,就像春天里到处都有紫罗兰一样。这里蕴藏着真理,”同样可以预料到这些共同发现者一古脑地出版。

但是,在这件事中,情况完全不同。几乎令人难以置信的是,事实上,除了 1872 年 7 月 18 日曾在柏林科学院宣读过一次,外尔斯特拉斯从来没有发表过他的发现。这次讲演的手稿也确实被收入了他的全集 Weierstrass 1895,但是世人得知这一发现并冠之以外尔斯特拉斯的名字,是在 Dubois Reymond 1875 中。因而,1875 年只是标志数学的重大危机开始的一个方便的年代。

迪布瓦·雷蒙(Dubois Reymond)写道:"这些函数原理基础似乎隐藏着许多我所关心的谜,我难以摆脱的一个想法是,(它们)会导向我们智力的极限。"然而,人们有一种不同的感觉,没有人急于去探索这些极限。有些同时代人一度对这项任务有所涉猎(比如加斯东·达布 Gaston Darboux),而后就很快地转向极度的保守主义,但是没有其他人更勇敢了。人们也被迫想起高斯隐藏他发现非欧几何的那个更出名的故事,高斯在 1829 年 1 月 27 日写给贝塞尔(Bessel)的信中说:"害怕皮奥夏人(愚笨的人)的喧嚣。"(但是,后来他把它告诉了雅诺斯·鲍耶——给后者的头脑带来了灾难性的后果——后来,雅诺斯·鲍耶一个朋友的儿子发表了自己独立的发现)。最后,人们会想到米塔格-列夫勒后来对康托的忠告,他不该与编辑们争吵,只应该保存好他的那些更大胆的发现直到这个世界准备好接受它们。先锋派人物中绝少像这几个不同的例子中描述的那样极其不情愿。

除了外尔斯特拉斯,还有三个名字必须在此处提及。长时期以来一直传言,并且在 Neuenschwander 1978 中有记载,黎曼大约在 1861 年告诉他的学生 $R(t)=\sum n^{-2}\cos(n^2t)$是一个连续不可微函数。但是,人们不知道确切的陈述和证明。实际上,如果"不可微"指的是"处处不可微",则任何提出的证明都是有缺陷的,因为 Gerver 1970 和 Smith 1972 指出,$R(t)$在某些点处确实有正的和有限的导数。克罗内克(Kronecker)也知晓有关黎曼函数的事,这是一种强调在当时存在问题重要性的兴趣。(我从 Manheim 1969,T. Hawkins 1970 和 Dugac 1973,1976 得到了关于这段背景的知识。)

波尔查诺(Bolzano)的名字与外尔斯特拉斯是在一个不同的但更为著名的情况下连在一起的,他也和这个故事有关。伯恩哈特·波尔查诺(Bernhard Bolzano, 1781 ~ 1848)是数学上很少的几个无名英雄之一,他的大部分工作在 1920 年之前都默默无闻。他在 1834 年发现了一个外尔斯特拉斯函数的翻版,但是他没有注意到那个使我们感兴趣的函数的性质(Singh 1935,第 8 页)。

第三个人在他的时代和今天一样无人知晓,但他在这个故事

里的地位仅次于外尔斯特拉斯。查理·瑟莱里埃(Charles Cellerier，1818~1890)在日内瓦教书，只出版过很少的讲义，但是在他死后启封的文件中有一份“启示录”。一个没有标注日期的文件夹上写着“十分重要，本人认为新颖、正确，可以按原样出版”，其中一份他手写的文本描述了外尔斯特拉斯函数 $D=1$ 的极限情况，而且把它用于类似的目的。有人把这些发黄的纸页拿给了一个叫凯莱的学者，他加了一个注释(前面的内容就是从中选取的)然后立刻作为 Cellerier 1890 出版了。零零星星的有趣的证据接踵而至，特别是来自于格蕾丝·C·杨(Grace C. Young)。拉乌尔·皮克泰(Raoul Pictet)在 1916 年回忆道，大约在 1860 年，皮克泰是瑟莱里埃的学生时，他曾在课上提到过这项工作。但是没有书面的证据出现。最后，瑟莱里埃的论断被证明是有缺陷的。

这样，外尔斯特拉斯还是独自而未受挑战地保有以他的名字命名的论断，但是给我们留下了一些确实很奇怪的值得思考的事情。波尔查诺实际上发表了一个声明，因为他认为这无关紧要，但是后两位学者知道得更清楚，他们是没有什么名气而且可能会使名誉受损的朴实的地方派，而大师可能觉得不会有损名声，他们都选择了坐下来，等一等，看一看。“要么发表，要么发臭(Publish or Perish)”不可能远离他们的头脑。

因为外尔斯特拉斯函数经常用于支持数学和物理学双方一致性分离，提一提它的发现者们对这两个学科间的关系的态度可能是有益的。他的名字也出现在几何光学中(球面透镜的杨—外尔斯特拉斯点)。而且，在外尔斯特拉斯 1857 年首次讲课的时候(被 Hilbert 1932,3,337~338 页引用)，他强调物理学家不应该把数学只看做一个辅助性的学科，数学家不应该认为物理学家的问题只是他的方法的一批简单例子的简单集合。“至于是否真正可能从现代(指 1857 年)数学家看来热衷的抽象理论中抽取一些有用的问题，人们会回答道只有在纯粹臆测的基础上希腊数学家才能推演出圆锥曲线的性质，而这是远在人们能够猜测出它们表达了行星的轨道之前。”阿们。

第 42 章 后记:通向分形之路

我在 1975 年和 1977 年写的论分形的文章,开头没有前言,结尾没有结语。和它们相比,这本书才真是这样。不过,有一些东西萦绕在我的头脑中。既然分形几何学正在朝向组织不妙的方向前进,这是一个很好的时机让我来简述一下这个题目的未必确实的起源,并且谈一谈它对科学认识(即描述和解释)所作的贡献。当这种新几何学从各个方向自描述向解释前进时(或者是像第 11 章和第 20 章那样通用的,或者调整成特定的案例研究),我们最好回忆一下为什么它会因用“模型”解释而遭到的非同寻常的(也是不多见的)非议中获益。

时至今日,读者已经清楚地知道分形的概率分布特征是双曲型的,分形的研究充斥着其他幂律关系。通过接受标度变换的有效性并仔细地探索其几何-物理含义,我们发现有那么多吸引人的事情可做,以至于确实让人觉得奇怪。直到昨天我还觉得我自己独个占有这片富饶而新奇的土地。在它周围环绕着许多人所共知的开阔地,许多作者曾经瞥了一眼,但是没有人留了下来。

这种我毕生的牵挂是 1951 年由对齐普夫定律(第 38 章和第 40 章)的一个漫不经心的次要的兴趣所触发的。这种词频的经验规律通过一篇书评引起了我的注意。这件事看起来太具象征意味而不像是真的,不过,这篇书评确实是从一个“纯”数学家的废纸篓里翻出来为了在巴黎地铁上读的。齐普夫定律被证明为最易于解释,而我的工作也促成了数理语言学的诞生。但是,词频的研究是一种自生自灭的工作。

然而,它的后果依然存在。当我认识到(用当今的名词)我的工作是标度假设有效性的一个案例分析,我开始加倍注意多个领域中类似的经验规律性,首先就是经济学。这些规律性,尽管数量

惊人地大,很难被看作既定领域的推论。我把它们解释得越成功,它们就越是像一些广泛存在的科学难以面对的可见的符号那样互相交织在一起。对这些现实,我能够在一段时间内为之献身。

起初,我研究这些规律的方法是通常地寻找生成模型,但我的方法逐渐发生了改变,因为我不断地观察到那些在模型中看起来不重要的假设上的小变化却在后来引起了预言发生巨大的变化。比如,很多高斯分布的实例都习惯地通过概率的标准中心极限定理而解释为由于添加了许多独立分布。这种论断的说服力取决于许多其他的中心极限定理甚至不为从事研究的科学家所知,而被保罗·莱维和其他的先驱者看作是"病态的"。但是,对标度变换律的研究使我意识到,非标准的中心极限行为事实上是自然界的组成部分。不幸的是,中心极限定理一旦被看出有多个可能的结果,它就不再具有说服力了。如果解释比其结果更复杂或者一个解释的同样可行的多个变种得出完全不同的预言,那么解释很难增进认识。

无论如何,探索自相似性的结果被证明充满了意外的惊奇,这探索增进了我对自然结构的认识。与此相反,关于标度变换的原因的恼人的讨论却缺乏引人入胜之处。有些时候,这似乎不比齐普夫极力推崇的最小努力原则更好。

重新燃起的对于 Yule 1922 中提出的分类学中的标度变换模型的兴趣加强了这种倾向。这个复兴声称可以提供对社会科学中的标度变换每个事例的全能式解释,它基于一个技术错误(如我所指出的),但是当时我的许多读者不知为什么被确信社会科学中的标度变换关系有一种普遍而直接的解释,从而(!)不值得注意。

我现存的对于在原因之前强调结果的爱好被作为一种结果而强调了。当(1961 年)我转向研究竞争的市场中商品价格随时间的变动(第 37 章)时,我很快发现这是一种天赐,尤其是有助于把标度变换方法的全部能力变得明显了。尽管关于价格和收入的数据像汪洋大海一样,经济学家们仍在抱怨他们数据的贫乏和质量低劣。然而,经济学理论和经济计量学声称它们可以阐明上百个

不良定义的变量之间的关系,但不敢对价格记录的结构做任何预测。通常的统计技术也被证明不能从数据中提取任何有序状态。这一点证实了 W. 列昂捷夫(Leontief)的观察:“没有一个经验研究的领域使用了如此大量而复杂的统计机制,却得到了如此不同的各种结果。”但是,由标度变换方法导出的结论却令人吃惊地好。这种标度可变的性质结合了竞争市场价格的两个最引人注目的特性:高度的不连续性和“循环”但非周期的特性。这项研究可能恰巧是物理学式的不变性——对称性在经济学中应用的仅有例证。

我在 1961 年扩展了标度变换的记法来试着处理几个噪声现象。所有这些不同的努力都是近乎与物理学家和数学家绝缘的。但是,当我在 1962~1964 年间在哈佛做访问教授时,伽莱特·伯克霍夫(Garrett Birkhoff)指出我的方法和由理查森开创又由 Kolmogorov 1941 发扬光大的湍流理论之间的相似。当我在学生时代听说这一理论时,它的影响还不如第 40 章中**亚里士多德**小节描述的哲学传统那样有力。不管怎样,所有这一切都是远在物理学家对标度变换着迷之前发生的!

另外,G.W. 斯图尔特关于湍流间歇性的讲座把我引向了 Kolmogorov 1962。这项工作的预印本和 Berger & Mandelbrot 1963 彼此相差几个星期!尽管柯尔莫哥罗夫处理的是一个更有意义的问题,我的工具却更加有力,而且,我立刻把它们用到湍流的研究中,并得到了第 10 章和第 11 章的基本内容。

最后,我弄清楚了 $1/f$ 噪声,Hurst 1951,1955,Richardson 1961 以及星系团问题。我又一次在每个事例中感觉到好的描述及对结果的探寻有助于我的理解。与此相反,我设想的早期模型看起来只不过是加到这种描述上的无关紧要的装饰。它们脱离了我正在规范的基本几何思想,而且,就我看来,实际上妨碍了理解。我一直坚持着这些观点,即使当我的论文无人接受发表时也是如此。此外,第 11 章和第 20 章,以及其他遍及全书的解释讲的是完全不同的一个故事,我为之而欣慰。

这样,对标度变换的探求被复苏并由于研究领域的变化而为

新的工具和思想所丰富,而且导致了一个全面的理论的逐步出现,这个理论一点也没有因循最初被发现、规范而又“应用”了的“自顶而下”的模式。它从一个谦逊的基底发展到一个令人目眩的不断增长的雄心勃勃的顶峰,令包括我在内的每个人大吃一惊。它的早期的综述是在逻辑学和科学哲学国际会议(1964)上,和在耶鲁的特朗伯尔(Trumbull)讲座上(1971)以及法兰西学院(1973,1974)给出的。

这个标度变换理论的几何方面变得更加重要,给分形几何学增光添彩。鉴于对湍流和临界现象的早期研究的强烈的几何味道,人们预期在这几个领域中发展出分形理论。但是事实并非如此。

新概念和新技术通过低竞争性的分支进入科学的事例在今天已经非常罕见了,因而是反常的。分形几何学是这种历史性反常的一个新例子。

彩图注释

这部分彩图和注释可称为“书中书”。奉献给它这样的命题:因为“眼见为实”是真的,所以观察彩图会导致更高的可信度。当然,假定读者翻开的是本书的第1页,而不是“书中书”的第1页(即第彩-1页),那末这种方式对我们的重要企图是不合适的,然而“书中书”的注释与其余各章是独立的。

彩图-1,彩图-10和彩图-11是古代的三位伟大艺术家对大自然的阐述,并由此把读者引入了分形之门。

大自然的分形几何学是作者首创的,该几何学把数学和科学相结合,它是处理某些重要而广为传播的各类自然形状所必需的。

这些形状中有许多都是非常熟悉的,但以前的作者们却很少谈到过由它们引起的各种问题。另一方面,彩图-1,彩图-10和彩图-11却是古代艺术著作中处理分形几何学的现成例子。

彩图-1　上帝创造了圆、波和分形

彩图-1　道德圣经的卷首画　西欧历史阶段以1200年为中心,当时科学和哲学停滞不前,而工程界却繁荣而有活力,在那个时代要建造歌德式的大教堂,作为一名高超的泥瓦匠是非常崇高的职业。因此该时代的“道德圣经”(“连环画”圣经)上常常出现手握泥瓦匠两脚规的上帝形象(Friedman,1974)。

彩图1是一个例子。它是一本著名的道德圣经的卷首画,该书写于1220年至1250年之间,是用法国东部香槟省的方言写成的。现在保存在维也纳的国家图书馆。这次得到馆方的友好允许而准于复制。该图的说明文为:

ICI CRIE DEX CIEL ET TERRE SOLEIL ET LUNE ET TOZ ELEMENTZ

(这里上帝创造出天和地,太阳和月亮以及万物)

在那最新创造的世界里我们觉察到三类不同的形状:圆,波和“摆动曲线”,圆和波的研究已从人类投入的巨大努力中获得了收益,而且已经成为科学中非常基础的内容。与此相比,“摆动曲线”却被遗忘了,几乎完全没有接触。

本书的目标就是要面对这样的挑战:对被称为分形的某些“摆动曲线”建立大自然的几何学。

本彩图最诱人之处在于请求科学家“测量宇宙”。早就证明,把两脚规用于圆和波的测量是件很容易的事。但是如果把两脚规用来测量本图的摆动曲线……或者海岸线又将如何呢? 结果是难以预料的。我们已经在第5章中作过讨论,以后几章又探索了它的结论。因此本图把读者引向一条充满了学问的道路。

彩图-2 自平方分形龙

此彩图设计得光辉灿烂,但它的黑色背景却必须看作极端极小化艺术的一个例子。的确,公式

$$\{z: \lim_{n\to\infty} |fn(z)| = \infty,\text{其中 } f(z) = \lambda z(1-z)\}$$

就是所需的一切,有了它,就可以完美的精度来重现所讨论的背景。现在来解释一下这个公式的意义:为了确定“发生函数 $f(z)$,先选择复数 λ,于是可构造 $f_2(z)=f(f(z))$,然后 $f_3(z)=f(f_2(z))$,即 $f_3(z)=f(f(f(z)))$等等,直于无穷。

在彩图-2中取复数 $\lambda \approx 1.64+0.96\mathrm{i}$。显然这不是可以随便选中的。龙的形状对 λ 非常敏感,但是由我发展的一种特殊理论(已于第19章中概述),容许在变化万千的龙之中选择到 λ,从而得到我们所需形状的龙。

“石头” 在黑色背景中出色的设计是由25种“石头”组成的,每一种的定义是

$$\{z: \lim_{n\to\infty} f_{25n}(z) = z_g\}$$

其中25个复数 z_g 是方程 $f_{25}(z)=z$ 的根,另外还要满足

$$\left|\frac{\mathrm{d}f_{25}(z)}{\mathrm{d}z}\right| < 1$$

仔细观察本图可以看到有5种不同的红色,5种不同的兰色等等。选择这样的彩色方案是因为 z_g 的25个值落入5个“类”,每一类都由5个“种”所组成,我们把一种颜色附着于一个“类”,把一种颜色的不同明暗度附着于相应的一个“种”。例如,全部5个金黄色的“种”沿着龙的金黄色主体串起来,就象黄蜂一样聚集龙体的腰部。

经典数学中一副曾被隐藏的面孔　$f(z)$的表达式是如此简短，看起来又不十分显眼（因为只包含微积分的基础），因此对它没有什么大的期望，但当在计算机屏幕上预览这类设计图形时却令人吃惊，就象是一种沉重的美学冲击。

经典的数学分析（它是微积分的最高形式）已经在所有那些爱它或恨它的人们面前开了个玩笑。它揭示出数学分析具有两副面孔。几个世纪以来一直以严峻的面孔展现在我们面前。但是我要表明，数学分析还具有另一副隐藏着的面孔，它是如此地具有吸引力和惹人喜爱。

为了表示对严峻的分析大师的尊敬和钦佩，我得赶紧声明，对于少数数学家（很幸运，我也是其中之一）说来，这种黑色绒布轮廓线的极端复杂性并未使他们吃惊，因为他们早就从佩琳、法图和尤利亚等人的"古老"（多半是1920年左右）著作中见到过这些形状了。但是这种形状的复杂性已经献给了增强数学分析的严格性，而把如此多智多慧的复杂性理解为美丽的愿望却一无所得。

包含循环的算法　法图和尤利亚的发现实际上已经证实，一个非常复杂的人工制品能够以十分简单的工具（可想象为雕刻家手中的凿子）制造出来，只要该工具能够反复使用，而现在的工具就是$f(z)$，由它产生出函数$fn(z)$。

因此我们不处理那种执行一次就停止（已经完成）的运算，而处理那些执行后又再重复执行的运算。这种迭代函数是踏车或循环的例子，每转一圈作为一个新任务处理。

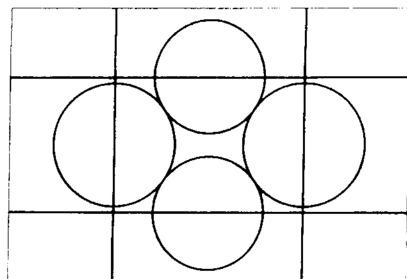
最简单的循环程序是线性的，这意味着所增添的细部只是全部形状在较小尺度上的复制。这样构成的形状称为自相似的。

现在的例子却相反，当它成为较小尺度时其细部是变形的，因为函数$f(z)$不是线性的，它是二次函数，天鹅绒背景的边界用第19章的术语，称为自平方的。

彩图－3　自反演的分形补缀物

彩图－3象个挂件，其上补有6类透明的不同织物。大量的开圆盘（即圆的内部）被这6种不同颜色的织物所切开，这样就缝制成一件透明的织品（单独的或重叠的），大量的圆盘看上去都很远和很小。

本图的形状是第18章讨论的自反演分形更加复杂的变种，为了构造它，先要选择发生器，本例是由4个圆和4条直线组成的集合，排列成如图(a)所示。



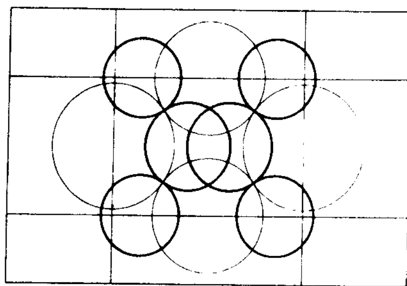
图(a)

由于第 18 章中说明的许多原因,最重要的是如何处理形状 $\mathcal{L}$,$\mathcal{L}$ 是关于任一条发生器直线作对称,或关于任一发生器的圆作反演后完全保持不变的最小形状。

从理论上说,现在关于直线和圆之间的差别并不是基本的:的确,假如上面的这些直线和圆受到关于不在其上之点的几何学反演,它们就变成 8 个圆,因此把"自反演和自对称"的 $\mathcal{L}$ 称为"自反演"就足够了。

因为图(a)包含有 4 条对称且交叉的直线(构成一个矩形),这是很有利的,且这又进一步保证了现在的集合 $\mathcal{L}$ 是周期的。第 1 个周期就以此矩形为界,其余的则由沿另外的轴线平移而得到。

确定 $\mathcal{L}$ 的构造是个古老而著名的问题。现在我给出了可操作的解法,并作图说明,该新解法表明 $\mathcal{L}$ 是由下列点构成,即在这些点上,圆盘状补缀物是沿着包围它们的圆相切的,而圆盘内部的点永不计入 $\mathcal{L}$ 之中,即使当它们在相同或不同颜色的不同圆盘边界上时也是如此。



图(b)

现在说明如何选择圆盘状补缀物。从发生器形状开始，画6个圆(称为Γ圆)，其中每一个都与发生器里8个形状中的3个相正交，还有许多其他的圆也与发生器里8个形状中的3个相正交。但我们只需要取图(b)所示的6个圆作为Γ圆。每个Γ圆限制一个圆盘与一个不同颜色的织物相连接，然后将一个Γ圆作变换(即关于发生器里4个圆作反演或关于发生器里4条直线作对称)而得到的每一个圆盘都使用相同的颜色。中间"大奖牌"里的圆盘相互重叠，但不与它的任一个反演盘相重叠。相反，在角上的那些圆盘可与其几个反演盘重叠。

彩图-4 标图山上行星升

(来自一次永不存在的空间使命之纪念品)

彩图-4至彩图-9可以看作是"真实的"，而且(用他们自己的话说)有些是艺术作品，然而这些图形并不是照片，也没有企图成为艺术家的作品。此外，他们也不是那种对真实景色作加工处理后的大众化的伪造景色(这种方法好象通过变换其他化学物合成为一种化学品)。现在的彩图就象彩图-2和彩图-3一样，完全是人为的。它们是由原子组成的血红蛋白和(大量的)时间以及能力"完全"合成而产生的分形等价物。

彩图-4组合了我的行星曲面理论两次提供的工具，即以图28-10和28-11为基础的文献Mandelbrot 1975 w中的首次进展，以及本书第28和29章中所作的探索。本图的各种特征与现实不很吻合，但是上述几章已经表明了怎样改正这些缺点。

行星的水份集中在海洋和雪地(例如极冠)，而天空万里无云。谨慎地说，这样的一颗行星只是粗糙的近似。现在尽我们的最大努力来对它着色，而选择颜色完全与我的理论无关。第一步算法是用相同的颜色来显示高度(就象《时代地图册》那样)。然后，显然只要对颜色方案稍作调整而不需要作其他过多的考虑就会产生十分好的效果。

这种艺术不能要求像彩图-2和彩图-3那样极小，因为两颗"行星"不能简化为一边一颗行星的一条直线而不增添许多人为的修饰。

这种艺术不能称为极小的第二个理由是画出阴影包含了巨大的创造力；对每一个细节都要用好些大本书来解释。此外，所用的工具对该算法的影响十分大，因此当要重复此工作时必需使用完全相同的计算机设备。

较早版本的"行星升"图案出现于茄克衫的背部，而其他的分形景色出现于《分形》(1977年版)一书的插图中，他们因无数模仿品而得到很大荣誉。由于模仿品的质量相对较低，更加证明了这种艺术的非极小性。

然而，每一颗行星的主要特性能由非常少又非常基本的性质(连续性和不变性)唯一地表征，而这种性质将在后面的注释中探讨。

献词　把此彩图命名为标码山是为了纪念“lblgraph”，这是一堆具有独立想法又常常不守规矩的图形程序，这些程序是IBM的赫尔威茨(Hurwitz)和赖特(Wright)首创的，在1974年~1981年期间曾为华特森研究中心增添了许多光彩，当对它作仔细研究时就会得到回报，而且它(以及活着的继承人，“瑜珈信徒”(“yogi”))使得本书的阐述成为可能。安息吧！

彩图-5　永不存在的高斯山

高斯(1777~1855)的名字几乎出现在每一本数学和物理学书籍中，使他在同时代的数学家(包括物理学家)中鳌占第一。现在把这些想象中的山以高斯命名是受到一种概率分布(高斯因此而得到了很多的荣誉)的启发。这种分布的形状是著名的“锺状曲线”或“Galton尖顶”。在彩图-4至彩图-9中高斯分布支配着图形上任意两个规定点(至少在适当变换后)的高度差。

许多学者在他们的研究中应用高斯概率分布却没有想到这样的选择必须要有理由。或许这是他们熟悉和信任的唯一分布，或者他们相信它解释了大自然中从应征士兵的高度到天文学家测量误差中每个随机量的分布。

实际上，上述信赖是完全没有根据的。本书中的许多例子表明，世界上充满了大量的非高斯现象，因此应用高斯分布时要有一个各相同且较少争议的正当理由。对我来说，唯一的完整理由基于这样的事实，即高斯分布是具有某些标度不变性质的唯一分布，也导致连续变化的地形。结论是这样的，最简单的可能的地形受“布朗函数”，或者至少是其变种(我称它为“分数布朗函数”)所控制。

我们把唯一的参数(这些迫切要求的量仍是不确定的，因此可在独立地域上挑选)称为分维，记作 D。

当 D 达到它的最小值 $D=2$ 时，地形是极端光滑的。当 D 增加时，地形就越来越成为“波浪状的”而且开始类似于高起的地球山脉。最终它完全像山脉那样的起伏，而极端情形是几乎充满全空间的。

一个布朗函数的明显特征是，每个竖直截面都是普通的布朗线-线函数。

对于每幅景色(除了彩图-4中远处的行星以外)，先从由经度和纬度构成的正方形网格上计算出高度，然后由下述方法形成圆状的外貌：把该地形的平坦型基面围绕一个圆柱滚动，而此圆柱的轴又从左向右移动。再编

制计算机程序来模拟光线(光源在左上方60°处)。

说来也奇怪,有些人观察此景色后,简短地评述了地形的特征(它完全基于不变性和连续性的准则)是巧妙和有效的,最终就转到批评这种方法,因为它的准则太抽象而且(在事先或事后)不都是从明显的“模型”或发生机构中导出的。

我勉强(拙劣地)答复,因为未能出现十分接近于实际的伪造景色而来批评具体的地形“主流”理论是由于我的“抽象”理论而造成的。指出这点是有好处的,许多科学中最好的理论从活塞、弦线和滑轮的精巧组合开始,几代人以后却以贫乏的不变性原理告终。从这种观点看来,现在阐述的工作和本书中研究的其他情形,都是在终止线上开始的。这就是足以使得不愉快的原因吗?

彩图-6和彩图-7 永不存在的非高斯山

本彩页部分,包括第28章所有高斯景色的底部都被弄平以便形成任意放置的参考水准面。这种方法首先应用于产生岛屿,而在山脉景色里本想有助于区别不同的曲面。

现在作详细说明,在准备我的1975年版本时我们把全部数据都画在图上而不浪费任何数据,结果地令人苦脑:有时已知有些景色的 D 值十分不同,但用肉眼却很难区别其特征。后来为了把与地形在一起的岛屿海岸线描述出来,我们就在同一画面中引进一个平坦的参考水准面。突然,不同的 D 值在图上极为明显。我们还应记得,为了确定运动需要一种称为静止的标准,对于粗糙度同样也是真的。

最近我们意外而又十分幸运地发现,当把对山脉同样的方法应用到山谷时还会有第二效应。当构造一些平坦部分(使人想起湖泊、雪堆或冲积地)隐藏在山谷的底部,就迫使人们注意到高山,这样的模型表明,其有效性超出了原来的预期。假若我们对整个地形看得太久,就会极端扫兴了,因为在高斯模型里谷底象山顶一样“非光滑”,而实际的山谷要光滑得多。目前还没有能计入这种差别的方法。

但是存在“修改”山脉高斯模型的方法,使山谷解决得比较好。最简单的修改是假定地形各部分之间的唯一差别集中在竖直尺度上,而 D 值到处都相同。为了证实这一假定,我们减少了彩图-5中高斯山脉的竖直尺度。令人吃惊地,它们变成了滚动的岩层!相反,考察任一几乎接近于平坦的曲面(例如飞机的支板),放大它的粗糙部分,结果证明在一阶近似里非常像彩图-5中的高斯小山,其维数则依赖于错综复杂的周围环境。我认为此结

果不能应用到谷底是无根据的想法。因此人们不会奇怪:把 D 对山顶有效的假定也应用到谷底的一阶近似。

一种更加特殊的想法是,当竖直尺度随谷底以上高度增加时,对各处具有同样维数的小区域的尺度加以限制。为达此目的,在本彩图-6及彩图-4的标图山里,湖泊水平面或谷底以上的主度取3次幂。

相反,当竖直尺度随底部以上的高度减少时(高度的幂次小于1),我们就得到彩图-7中的高坪和峡谷。

这种技术虽然很粗糙,但惊人地有效。

彩图-8和彩图-9　永不存在的分形岛屿(从天顶观察)

在彩图-4的底部图形和彩图-4至彩图-9中应用的算法都基于数值傅里叶方法,因此产生出断断续续的光滑曲面,虽然根据分形曲面的定义它是极端粗糙的。然而我们可以想象成这是在光线(它的波长就是网格中格子的宽度)下看到的山脉,在这种光线下所有的细节部分全都看不见了。

为了得到岛屿,我们集中到一个最大岛屿周围的地貌,把某个参考平面以下的高度作为零而略去不画。

彩图-8的群岛对应于通常的布朗地貌。这是一个粗劣的地球模型,因为它的细部太不规则了,其吻合性也很差,因为一个分维 $D=5/2$ 的曲线与维数 $D=3/2$ 的海岸线相差太大了。

彩图-9的群岛以维数 $D=2.200$ 的持久性布朗函数代替了通常的布朗函数;而把取为与人的直觉相近的维数 $D=1.200$,图中清晰的分界线与由各向同性机制而生成的事实完全相容。它与夏威夷群岛相类似而且更加美丽,难道这种模型就不能对火山群岛也有效吗!

海岸线怎样紧密地充满于画面对海岸线的直观形状有很大影响,而群岛形状的侧面并不完全由分维 D 确定;因为彩图-5、彩图-8和彩图-9显示出它与靠近一个最小的或最大的区域有关,这参考平面起着最重要的作用。

彩图-10　达芬奇的洪水图

本彩图只是达芬奇图画中的一部分,达芬奇在本图中把水流表示为许许多多不同大小的旋涡之叠加。对旋涡结构的认识要很迟才进入到科学阶段。在十九世纪20年代由理查森建立的公式才部分进入到湍流性质的"标度"观。然而这种观点迅速地滑进了对公式的探讨,而完全失去了几何味,

这也(不可能是一种巧合!)就证明了有限的有效性。

本书所阐述的理论允许把几何学返回到对湍流的研究,而且表明许多其他科学领域在几何上十分类似并能以相关方法来处理。

彩图-11　北斋的伟大之波

葛饰北斋(1760~1849)是一位具有巨大智慧和能力的画家及雕刻家,从任何标准看,他都是一位天才,他为各色各样的旋涡和螺旋所吸引。作为例子,只要用一张邮票大小的雕刻复制品(彩图-11)就足以说明他的声誉了。

分形的概念　我把某些非常不规则和非常支离破碎的几何形状放在一起,并且给它们造了一个术语分形。分形的特征是对每一种想像得到的线性尺度(范围在零和一个最大值之间)的特殊性能都存在的。而线性尺度的最大值有如下两种情形。当一个分形有界时,最大特征尺度就具有分形总尺度的数量级;当无界分形的一部分可以框在以 Ω 为边长的盒子内时,此图形就具有 Ω 级的最大特征尺度。从数学上讲,构造分形的例子可从彩图-2至彩图-9中找到。

分形分别在两个不同时期(近一个世纪)里扮演主角,而且担当了完全相反的角色。

在第一个时期,从1875年到1925年期间谨慎地设计的某些分形(不是"书中书"里讲到的)侵蚀了流行数学的根基,每个人都把见到的这些点集看作"怪物"。

当其余的数学被当作物理学家们寻找新工具的潜在猎物场地时,每个人都同意这些怪物与描述大自然完全无关。在50年的时间里几乎创造出了这些怪物的全部变种。

分形的相反角色是这样开始的。当我在研究工作中开始发现一个又一个的怪物能够担当起回答某些古老问题(即人们常常会问,我们世界的形状)的有力工具时,分形也就开始担当起相反角色了。这样就导致发现许多新的分形例子,以及对分形几何的系统阐述。本书就是论述这个题目的。

图形的作用　计算机图形在使分形几何学被人们接受方面起着最重要的作用,但在创始时期还只是一种表面的作用。就是说,最具感染力的是分形已为计算机工作者所掌握,他们确信,这种新工具对新几何学的诞生是十分有效的。当计算机还处于萌芽状态时,我就阐述分形几何学的理论,然而我让其偏重于借助他们自己直观地构造实例的方向发展。

经典图画的合成　再来考察彩图-1和彩图-10,几乎就象任何其他

图形的“合成”一样，即对于在图形的总尺度和一个内界限（当再比它小时，细节就看不见了）之间的几乎每一种尺度，至少认定一种“特性”是非常容易的。因此刻划分形的标度性质不但出现于自然界，而且也存在于某些人类最精致的人造万物之中。

感　　谢

画彩色图的计算机程度是由沃斯(Voss, R.)(彩图－6至彩图－11)和诺顿(Norton, A.)(彩图4和彩图5)开发的。

参考文献

本文献表中的每一条都包括作者(或编者)的姓名以及(出版)年份。紧跟年份之后的是指多卷集中的第一卷,而当容易引起模糊时,就是年份之后跟一个字母,该字母与出版物的标题或期刊的名称有关。这种新的约定企图作为一种有助于记忆的方法。

因为本文献表中注明资料来源的期刊属于不同的学科,所以这些期刊名的缩写比习惯的要少些。

本文献表只包含少数几种普通的文献而不搞四平八稳,也不打算把与本书有关各领域的全部文献包揽无遗。

ABELL, G. O. 1965. Clustering of galaxies. *Annual Reviews of Astronomy and Astrophysics* 3, 1-22.

ABBOT, L. F. & WISE, M. B. 1981. Dimension of a quantum-mechanical path. *American J. of Physics* 49, 37-39.

ADLER, R. J. 1981. *The geometry of random fields.* New York: Wiley.

ALEXANDER, S. S. 1961. Price movements in speculative markets: or random walks. *Industrial Management Review of M.I.T.* 2, Part 2 7-26. Reprint in *The random character of stock market prices.* Ed. P. H. Cootner, 199-218. Cambridge MA: MIT Press, 1964.

ALEXANDER, S. S. 1964. Price movements in speculative markets: No. 2. *Industrial Management Review of M.I.T.* 4, Part 2, 25-46. Reprint in Cootner (preceding ref.) 338-372.

ALLEN, J. P., COLVIN, J. T., STINSON, D. G., FLYNN, C. P. & STAPLETON, H. J. 1981. Protein conformation from electron spin relaxation data (preprint). Champaign, Illinois.

APOSTEL, L., MANDELBROT, B. & MORF, A. 1957. *Logique, langage et théorie de l'information.* Paris: Presses Universitaires de France.

ARTHUR, D. W. G. 1954. The distribution of lunar craters. *J. of the British Astronomical Association* 64, 127-132.

AUBRY, S. 1981. *Many defect structures, stochasticity and incommensurability. Les Houches 1980.* Ed. R. Balian and M. Kléman. New York: North-Holland, 1981.

AVRON, J. E. & SIMON, B. 1981. Almost periodic Hill's equation and the rings of saturn. *Physical Review Letters* 46, 1166-1168.

AZBEL, M. YA. 1964. Energy spectrum of a conduction electron in a magnetic field. *Soviet Physics JETP* 19, 634-645.

BACHELIER, L. 1900. *Théorie de la spéculation.* Thesis for the Doctorate in Mathematical Sciences (defended March 29, 1900). *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure* III-17, 21-86. Translation in *The random character of stock market prices.* Ed. P. H. Cootner, 17-78. Cambridge, MA: MIT Press, 1964.

BACHELIER, L. 1914. *Le jeu, la chance et le hasard.* Paris: Flammarion.

BALMINO, G., LAMBECK, K. & KAULA, W. M. 1973. A spherical harmonic analysis of the Earth's topography. *J. of Geophysical Research* 78, 478-481.

BARBER, M. N. & NINHAM, B. W. 1970. *Random and restricted walks: theory and applications.* New York: Gordon & Breach.

BARRENBLATT, G. I. 1979. *Similarity, self-similarity, and intermediate asymptotics.* New York: Plenum.

BARTLETT, J. 1968. *Familiar quotations* (14th ed.) Boston: Little Brown.

BATCHELOR, G. K. 1953. *The theory of homogeneous turbulence.* Cambridge University Press.

BATCHELOR, G. K. & TOWNSEND, A. A. 1949. The nature of turbulent motion at high wave numbers. *Pr. of the Royal Society of London* A 199, 238-255.

BATCHELOR, G. K. & TOWNSEND, A. A. 1956. Turbulent diffusion. *Surveys in Mechanics* Ed. G. K. Batchelor & R. N. Davies. Cambridge University Press.

BERGER, J. M. & MANDELBROT, B. B. 1963. A new model for the clustering of errors on telephone circuits. *IBM J. of Research and Development* 7, 224-236.

BERMAN, S. M. 1970. Gaussian processes with stationary increments: local times and sample function properties. *Annals of Mathematical Statistics* 41, 1260-1272.

BERRY, M. V. 1978. Catastrophe and fractal regimes in random waves & Distribution of nodes in fractal resonators. *Structural stability in physics.* Ed. W. Güttinger & H. Eikemeier, New York: Springer.

BERRY, M. V. 1979. Diffractals. *J. of Physics* A12, 781-797.

BERRY, M. V. & HANNAY, J. H. 1978. Topography of random surfaces. *Nature* 273,573.

BERRY, M. V. & LEWIS, Z. V. 1980. On the Weierstrass-Mandelbrot fractal function. *Pr. of*

the Royal Society London A370, 459-484.
BESICOVITCH, A. S. 1934. On rational approximation to real numbers. *J. of the London Mathematical Society* 9, 126-131.
BESICOVITCH, A. S. 1935. On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system (On sets of fractional dimensions II). *Mathematische Annalen* 110, 321-330.
BESICOVITCH, A. S. & TAYLOR, S. J. 1954. On the complementary interval of a linear closed set of zero Lebesgue measure. *J. of the London Mathematical Society* 29, 449-459.
BESICOVITCH, A. S. & URSELL, H. D. 1937. Sets of fractional dimensions (V): On dimensional numbers of some continuous curves. *J. of the London Mathematical Society* 12, 18-25.
BEYER, W. A. 1962. Hausdorff dimension of level sets of some Rademacher series. *Pacific J. of Mathematics* 12, 35-46.
BIDAUX, R., BOCCARA, N., SARMA, G., SÈZE, L., DE GENNES, P. G. & PARODI, O. 1973. Statistical properties of focal conic textures in smectic liquid crystals. *Le J. de Physique* 34, 661-672.
BIENAYMÉ, J. 1853. Considérations à l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carrés. *Comptes Rendus* (Paris) 37, 309-329.
BILLINGSLEY, P. 1967. *Ergodic theory and information.* New York: Wiley.
BILLINGSLEY, P. 1968. *Convergence of probability measures.* New York: J. Wiley.
BIRKHOFF, G. 1950-1960. *Hydrodynamics* (1st and 2nd eds.). Princeton University Press.
BLUMENTHAL, L. M. & MENGER, K. 1970. *Studies in geometry.* San Francisco: W.H. Freeman.
BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. 1960c. A dimension theorem for sample functions of stable processes. *Illinois J. of Mathematics* 4, 308-316.
BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. 1960m. Some theorems on stable processes. *Tr. of the American Mathematical Society* 95, 263-273.
BLUMENTHAL, R. M. & GETOOR, R. K. 1962. The dimension of the set of zeros and the graph of a symmetric stable process. *Illinois J. of Mathematics* 6, 370-375.
BOCHNER, S. 1955. *Harmonic analysis and the theory of probability.* Berkeley: University of California Press.
BONDI, H. 1952; 1960. *Cosmology.* Cambridge University Press.
BOREL, E. 1912-1915. Les théories moléculaires et les mathématiques. *Revue Générale des Sciences* 23, 842-853. Translated as Molecular theories and mathematics. *Rice Institute Pamphlet* 1, 163-193. Reprint in Borel 1972–, III, 1773-1784.
BOREL, E. 1922. Définition arithmétique d'une distribution de masses s'étendant à l'infini et quasi périodique, avec une densité moyenne nulle. *Comptes Rendus* (Paris) 174, 977-979.
BOREL, E. 1972–. *Oeuvres de Emile Borel.* Paris: Editions du CNRS.
BOULIGAND, G. 1928. Ensembles impropres et nombre dimensionnel. *Bulletin des Sciences Mathématiques* II-52, 320-334 & 361-376.
BOULIGAND, G. 1929. Sur la notion d'ordre de mesure d'un ensemble plan. *Bulletin des Sciences Mathématiques* II-53, 185-192.
BOURBAKI, N. 1960. *Eléments d'historie des mathématiques.* Paris: Hermann.
BOYD, D. W. 1973a. The residual set dimension of the Apollonian packing. *Mathematika* 20, 170-174.
BOYD, D. W. 1973b. Improved bounds for the disk packing constant. *Aequationes Mathematicae* 9, 99-106.
BRAGG, W. H. 1934. Liquid crystals. *Nature* 133, 445-456.
BRAY, D. 1974. Branching patterns of individual sympathetic neurons in culture. *J. of Cell Biology* 56, 702-712.
BRODMANN, K. 1913. Neue Forschungsergebnisse der Grossgehirnanatomie... *Verhandlungen der 85 Versammlung deutscher Naturforscher und Aertze in Wien*, 200-240.
BROLIN, H. 1965. Invariant sets under iteration of rational functions. *Arkiv för Matematik* 6, 103-144.
BROUWER, L. E. J. 1975–. *Collected works.* Ed. A. Heyting and H. Freudenthal. New York: Elsevier North Holland.
BROWAND, F. K. 1966. An experimental investigation of the instability of an incompressible separated shear layer. *J. Fluid Mechanics* 26, 281-307.
BROWN, G. L. & ROSHKO, A. 1974. On density effects and large structures in turbulent mixing layers. *J. of Fluid Mechanics* 64, 775-816.
BRUSH, S. G. 1968. A history of random processes. I. Brownian movement from Brown to Perrin. *Archive for History of Exact Sciences* 5, 1-36. Also in Brush 1976, 655-701.

CANTOR, G. 1872. Uber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen* 5, 123-132.
CANTOR, G. 1883. Grundlagen einer allgemeinen Mannichfältigkeitslehre. *Mathematische Annalen* 21, 545-591. Also in Cantor 1932. Trans. H. Poincaré, as Fondements d'une théorie générale des ensembles. *Acta Mathematica* 2, 381-408.
CANTOR, G. 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts.* Ed. E. Zermelo. Berlin: Teubner. Olms reprint.
CANTOR, G. & DEDEKIND, R. 1937. *Briefwechsel.* (=*Selected Letters*) Ed. E. Noether & J. Cavaillès. Paris: Hermann.
CANTOR, G. & DEDEKIND, R. 1962. *Correspondence.* (=French translation of the 1937 *Briefwechsel*, by Ch. Ehresmann). Insert in Cavaillès 1962.
CANTOR, G. & DEDEKIND, R. 1976. *Unveröffentlicher Briefwechsel.* (=unpublished letters) Appendice XL of Dugac 1976a.
CARATHÉODORY, C. 1914. Über das lineare Maß von Punktmengen – eine Verallgemeinerung des Längenbegriffs. *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse* 404-426. Also in Carathèodory 1954– *Gesammelte mathematische Schriften.* Munich: Beck. 4, 249-275.
CARLESON, L. 1967. *Selected problems on exceptional sets.* Princeton, NJ: Van Nostrand.
CARTAN, H. 1958. Sur la notion de dimension. *Enseignement Mathématique*, Monographie No. 7, 163-174.
CARTIER, P. 1971. Introduction à l'étude des mouvements browniens à plusieurs paramètres. *Séminaire de Probabilités V* (Strasbourg). *Lecture Notes in Mathematics* 191, 58-75. New York: Springer.
CAUCHY, A. 1853. Sur les résultats les plus probables. *Comptes Rendus* (Paris) 37, 198-206.
CAVAILLÈS, J. 1962. *Philosophie mathématique.* Paris: Hermann.

CELLÉRIER, CH. 1890. Note sur les principes fondamentaux de l'analyse. *Bulletin des Sciences Mathématiques* 14, 142-160.
CESÀRO, E. 1905. Remarques sur la courbe de von Koch. *Atti della Reale Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli* XII, 1-12. Also in Cesàro 1964, II, 464-479.
CESÀRO, E. 1964-. *Opere scelte*. Rome: Edizioni Cremonese.
CHANDRASEKHAR, S. 1943. Stochastic problems in physics and astronomy. *Reviews of Modern Physics* 15, 1-89. Reprinted in *Noise and Stochastic Processes*. Ed. N. Wax. New York: Dover.
CHARLIER, C. V. L. 1908. Wie eine unendliche Welt aufgebaut sein kann. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 4, 1-15.
CHARLIER, C. V. L. 1922. How an infinite world may be built up. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* 16, 1-34.
CHENTSOV, N. N. 1957. Lévy's Brownian motion for several parameters and generalized white noise. *Theory of Probability and its Applications* 2, 265-266.
CHORIN, A. J. 1981. Estimates of intermittency, spectra, and blow up in developed turbulence. *Communications in Pure and Applied Mathematics* 34, 853-866.
CHORIN, A. J. 1982. The evolution of a turbulent vortex (to appear).
CLAYTON, D. D. 1975. *Dark night sky, a personal adventure in cosmology*. New York: Quadrangle.
COLLET, P. & ECKMANN, J. P. 1980. *Iterated maps on the interval as dynamical systems*. Boston: Birkhauser.
COMROE, J. H., Jr., 1966. The lung. *Scientific American* (February) 56-68.
COOTNER, P. H. (Ed.) 1964. *The random character of stock market prices*. Cambridge, MA: MIT Press.
CORRSIN, S. 1959d. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in isotropic turbulence. *J. of Applied Physics* 22, 469-473.
CORRSIN, S. 1959b. Outline of some topics in homogeneous turbulence flow. *J. of Geophysical Research* 64, 2134-2150.
CORRSIN, S. 1962. Turbulent dissipation fluctuations. *Physics of Fluids* 5, 1301-1302.
COXETER, H. S. M., 1979. The non-Euclidean symmetry of Escher's picture "Circle Limit III". *Leonardo* 12, 19-25.
DAMERAU, F. J. & MANDELBROT, B. B. 1973. Tests of the degree of word clustering in samples of written English. *Linguistics* 102, 58-75.
DAUBEN, J. W. 1971. The trigonometric background to Georg Cantor's theory of sets. *Archive for History of Exact Sciences* 7, 181-216.
DAUBEN, J. W. 1974. Denumerability and dimension: the origins of Georg Cantor's theory of sets. *Rete* 2, 105-133.
DAUBEN, J. W. 1975. The invariance of dimension: problems in the early development of set theory and topology. *Historia Mathematicae* 2, 273-288.
DAUBEN, J. W. 1978. Georg Cantor: The personal matrix of his mathematics. *Isis* 69, 534-550.
DAVIS, C. & KNUTH, D. E. 1970. Number representations and dragon curves. *J. of Recreational Mathematics* 3, 66-81 & 133-149.
DE CHÉSEAUX, J. P. L. 1744. Sur la force de la lumière et sa propagation dans l'éther, et sur la distance des étoiles fixes. *Traité de la comète qui a paru en décembre 1743 et en janvier, février et mars 1744*. Lausanne et Genève: Chez Marc-Michel Bousquet et Compagnie.
DE GENNES, P. G. 1974. *The physics of liquid crystals*. Oxford: Clarendon Press.
DE GENNES, P. G. 1976. La percolation: un concept unificateur. *La Recherche* 7, 919-927.
DE GENNES, P. G. 1979. *Scaling concepts in polymer physics*. Ithaca, NY: Cornell University Press.
DENJOY, A. 1964. *Hommes, formes et le nombre*. Paris: Albert Blanchard.
DENJOY, A. 1975. Évocation de l'homme et de l'œuvre. *Astérisque* 28-28. Ed. G. Choquet. Paris: Société Mathématique de France.
DE VAUCOULEURS, G. 1956. The distribution of bright galaxies and the local supergalaxy. *Vistas in Astronomy* II, 1584-1606. London: Pergamon.
DE VAUCOULEURS, G. 1970. The case for a hierarchical cosmology. *Science* 167, 1203-1213.
DE VAUCOULEURS, G. 1971. The large scale distribution of galaxies and clusters of galaxies. *Publications of the Astronomical Society of the Pacific* 73, 113-143.
DE WIJS, H. J. 1951 & 1953. Statistics of ore distribution. *Geologie en Mijnbouw* (Amsterdam) 13, 365-375 & 15, 12-24.
DHAR, D. 1977. Lattices of effectively nonintegral dimensionality. *J. of Mathematical Physics* 18, 577.
DICKSON, F. P. 1968. *The bowl of night; the physical universe and scientific thought*. Cambridge, MA: MIT Press.
DIEUDONNÉ, J. 1975. L'abstraction et l'intuition mathématique. *Dialectica* 29, 39-54.
DOBRUSHIN, R. L. 1979. Gaussian processes and their subordinated self-similar random generalized fields. *Annals of Probability* 7, 1-28.
DOMB, C. 1964. Some statistical problems connected with crystal lattices. *J. of the Royal Statistical Society* 26B, 367-397.
DOMB, C. & GREEN, M.S. (Eds.) 1972-. *Phase transitions and critical phenomena*. New York: Academic.
DOMB, C., GILLIS, J. & WILMERS, G. 1965. On the shape and configuration of polymer molecules. *Pr. of the Physical Society* 85, 625-645.
DOUADY, A. & OESTERLE, J. 1980. Dimension de Hausdorff des attracteurs. *Comptes Rendus* (Paris), 290A, 1135-1138.
DUBOIS REYMOND, P. 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argument nach ihren Änderungen in den kleinsten Intervallen. *J. für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle) 79, 21-37.
DUGAC, P. 1973. Elements d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences* 10, 41-176.
DUGAC, P. 1976a. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris: Vrin.
DUGAC, P. 1976b. Notes et documents sur la vie et l'œuvre de René Baire. *Archive for History of Exact Sciences* 15, 297-384.
DUGAC, P. 1976c. Des correspondances mathématiques du XIXe et XXe siècles. *Revue de Synthèse* 97, 149-170.
DUMOUCHEL, W. H. 1973. Stable distributions in statistical inference: 1. Symmetric stable distributions compared to other symmetric long-tailed distributions. *J. of the American Statistical Association* 68, 469-482.
DUMOUCHEL, W. H. 1975. Stable distributions in statistical inference: 2. Information of stably distributed samples. *J. of the American Statistical*

Association 70, 386-393.

DUPLESSIS, N. 1970. *An introduction to potential theory*. New York: Hafner.

DUTTA, P. & HORN, P. M. 1981. Low-frequency fluctuation in solids: 1/f noise. *Reviews of Modern Physics* 53, 497-516.

DVORETZKY, A., ERDÖS, P. & KAKUTANI, S. 1950. Double points of Brownian motion in n-space. *Acta Scientiarum Mathematicarum* (Szeged) 12, 75-81.

DYSON, F. J. 1966. The search for extraterrestial technology. *Perspectives in Modern Physics: Essays in Honor of Hans A. Bethe*. Ed. R. E. Marshak, 641-655, New York: Interscience.

EGGLESTON, H. G. 1949. The fractional dimension of a set defined by decimal properties. *Quarterly J. of Mathematics, Oxford Series* 20, 31-36.

EGGLESTON, H. G. 1953. On closest packing by equilateral triangles. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* 49, 26-30.

EINSTEIN, A. 1926. *Investigations on the theory of the Brownian movement*. Ed. R. Fürth. Tr. A. D. Cowper. London: Methuen (Dover reprint).

EL HÉLOU, Y. 1978. Recouvrement du tore par des ouverts aléatoires et dimension de Hausdorff de l'ensemble non recouvert. *Comptes Rendus* (Paris) 287A, 815-818.

ELIAS, H. & SCHWARTZ, D. 1969. Surface areas of the cerebral cortex of mammals. *Science* 166, 111-113.

ESSAM, J. W. 1980. Percolation theory. *Reports on the Progress of Physics* 43, 833-912.

FAMA, E. F. 1963. Mandelbrot and the stable Paretian hypothesis. *J. of Business* (Chicago) 36, 420-429. Reproduced in *The Random Character of Stock Market Prices*, Ed. P. H. Cootner. Cambridge, MA: MIT Press.

FAMA, E. F. 1965 The behavior of stock-market prices. *J. of Business* 38, 34-105. Based on a Ph.D. thesis, University of Chicago: *The distribution of daily differences of stock prices: a test of Mandelbrot's stable paretian hypothesis*.

FAMA, E. F. & BLUME, M. 1966. Filter rules and stock-market trading. *J. of Business* (Chicago) 39, 226-241.

FATOU, P. 1906. Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. *Comptes rendus* (Paris) 143, 546-548.

FATOU, P. 1919-1920. Sur les équations fonctionnelles. *Bull. Société Mathématique de France* 47, 161-271; 48, 33-94, & 48, 208-314.

FEDERER, H. 1969. *Geometric measure theory*. New York: Springer.

FEIGENBAUM, M. J. 1978. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. of Statistical Physics* 19, 25-52.

FEIGENBAUM, M. J. 1979. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. of Statistical Physics* 21, 669-706.

FEIGENBAUM, M. 1981. Universal behavior in nonlinear systems. *Los Alamos Science* 1, 4-27.

FELLER, W. 1949. Fluctuation theory of recurrent events. *Tr. of the American Mathematical Society* 67, 98-119.

FELLER, W. 1951. The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. *Annals of Mathematical Statistics* 22, 427.

FELLER, W. 1950-1957-1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 1. New York: Wiley.

FELLER, W. 1966-1971. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Vol. 2. New York: Wiley.

FEYNMAN, R. P. 1979 in *Pr. of the Third Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory*, Florence. Ed. Casalbuoni, R., Domokos, G., & Kovesi-Domokos, S. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

FEYNMAN, R. P. & HIBBS, A. R. 1965. *Quantum mechanics and path integrals*. New York: McGraw-Hill.

FISHER, M. E. 1967. The theory of condensation and the critical point. *Physics* 3, 255-283.

FOURNIER D'ALBE, E. E. 1907. *Two new worlds: I The infra world; II The supra world*. London: Longmans Green.

FRÉCHET, M. 1941. Sur la loi de répartition de certaines grandeurs géographiques. *J. de la Société de Statistique de Paris* 82, 114-122.

FRICKE, R. & KLEIN, F. 1897. *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Functionen*. Leipzig: Teubner (Johnson reprint).

FRIEDLANDER, S. K. & TOPPER, L. 1961. *Turbulence: classic papers on statistical theory*. New York: Interscience.

FRIEDMAN, J. B. 1974. The architect's compass in creation miniatures of the later middle ages. *Traditio, Studies in Ancient and Medieval History, Thought, and Religion*, 419-429.

FROSTMAN, O. 1935. Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles avec quelques applications à la théorie des fonctions. *Meddelanden fran Lunds Universitets Mathematiska Seminarium* 3, 1-118.

FUJISAKA, H. & MORI, H. 1979. A maximum principle for determining the intermittency exponent μ of fully developed steady turbulence. *Progress of Theoretical Physics* 62, 54-60.

GAMOW, G. 1954. Modern cosmology. *Scientific American* 190 (March) 54-63. Reprint in Munitz (Ed.) 1957, 390-404.

GANGOLLI, R. 1967. Lévy's Brownian motion of several parameters. *Annales de l'Institut Henri Poincaré* 3B, 121-226.

GARDNER, M. 1967. An array of problems that can be solved with elementary mathematical techniques. *Scientific American* 216 (March, April and June issues). Also in Gardner 1977, pp. 207-209 & 215-220.

GARDNER, M. 1976. In which "monster" curves force redefinition of the word "curve." *Scientific American* 235 (December issue), 124-133.

GARDNER, M. 1977. *Mathematical magic show*. New York: Knopf.

GEFEN, Y., MANDELBROT, B. B. & AHARONY, A. 1980. Critical phenomena on fractals. *Physical Review Letters* 45, 855-858.

GEFEN, Y., AHARONY, A., MANDELBROT, B. B. & KIRKPATRICK, S. 1981. Solvable fractal family, and its possible relation to the backbone at percolation. *Physical Review Letters*. 47, 1771-1774.

GELBAUM, B. R. & OLMSTED, J. M. H. 1964. *Counterexamples in analysis*. San Francisco: Holden-Day.

GERNSTEIN, G. L. & MANDELBROT, B. B. 1964. Random walk models for the spike activity of a single neuron. *The Biophysical J.* 4, 41-68.

GERVER, J. 1970. The differentiability of the Riemann function at certain rational multiples of π. *American J. of Mathematics* 92, 33-55.

GILLISPIE, C. C. (Ed.) 1970-1976. *Dictionary of scientific biography*. Fourteen volumes. New

York: Scribner's.
GISPERT, H. 1980. Correspondance de Fréchet....et....théorie de la dimension. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques* (Paris) **1**, 69-120.
GNEDENKO, B. V. & KOLMOGOROV, A. N. 1954. *Limit distributions for sums of independent random variables.* Trans. K.L. Chung. Reading, MA: Addison Wesley.
GOLITZYN, G. S. 1962. Fluctuations of dissipation in a locally isotropic turbulent flow (in Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR* **144**, 520-523.
GRANT, H. L., STEWART, R. W. & MOILLIET, A. 1959. Turbulence spectra from a tidal channel. *J. of Fluid Mechanics* **12**, 241-268.
GRASSBERGER, P. 1981. On the Hausdorff dimension of fractal attractors (preprint).
GREENWOOD, P. E. 1969. The variation of a stable path is stable. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **14**, 140-148.
GRENANDER, U. & ROSENBLATT, M. 1957 & 1966. *Statistical analysis of stationary time series.* New York: Wiley.
GROAT, R. A. 1948. Relationship of volumetric rate of blood flow to arterial diameter. *Federation Pr.* **7**, 45.
GROSSMAN, S. & THOMAE, S. 1977. Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes. *Z. für Naturforschung* **32A**, 1353-1363.
GUREL, O. & RÖSSLER, O. E. (Eds.) 1979. Bifurcation theory and applications in scientific disciplines. *Annals of the New York Academy of Sciences* **316**, 1-708.
GURVICH, A. S. 1960. Experimental research on frequency spectra of atmospheric turbulence. *Izvestia Akademii Nauk SSSR: Geofizicheskaya Seriia* 1042.
GURVICH, A. S. & YAGLOM, A. M. 1967. Breakdown of eddies and probability distribution for small scale turbulence. *Boundary Layers and Turbulence.* (Kyoto International Symposium, 1966), *Physics of Fluids* **10**, S59-S65.
GURVICH, A. S. & ZUBKOVSKII, S. L. 1963. On the experimental evaluation of the fluctuation of dissipation of turbulent energy. *Izvestia Akademii Nauk SSSR; Geofizicheskaya Seriia* **12**, 1856-.
GUTHRIE, W. K. C. 1950. *The Greek philosophers from Thales to Aristotle.* London: Methuen (Harper paperback).
GUTHRIE, W. K. C. 1971-. *A history of Greek philosophy.* Cambridge University Press.

HACK, J. T. 1957. Studies of longitudinal streams in Virginia and Maryland. *U.S. Geological Survey Professional Papers* **294B**.
HADAMARD, J. 1912. L'œuvre mathématique de Poincaré. *Acta Mathematica* **38**, 203-287. Also in Poincaré 1916-, **XI**, 152-242. Or in Hadamard 1968, **4**, 1921-2005.
HADAMARD, J. 1968. *Oeuvres de Jacques Hadamard.* Paris: Editions du CNRS.
HAGGETT, P. 1972. *Geography: a modern synthesis.* New York: Harper & Row.
HAHN, H. 1956. The crisis in intuition. Translation in *The world of mathematics*, Ed. J. R. Newman. New York: Simon & Schuster, Vol. III, 1956-1976. Original German text in *Krise und Neuaufbau in den Exakten Wissenschaften* by H. Mark, H. Thirring, H. Hahn, K. Menger and G. Nöbeling. Leipzig and Vienna: F. Deuticke, 1933.
HALLÉ, F., OLDEMAN, R. A. A., & TOMLINSON, P. B., 1978. *Tropical trees and forests.* New York: Springer.
HALLEY, J. W. & MAI, T. 1979. Numerical estimates of the Hausdorff dimension of the largest cluster and its backbone in the percolation problem in two dimensions. *Physical Review Letters* **43**, 740-743.
HANDELMAN, S. W. 1980 A high-resolution computer graphics system. *IBM Systems J.*, **19**, 356-366.
HARDY, G. H. 1916. Weierstrass's non-differentiable function. *Tr. of the American Mathematical Society* **17**, 322-323. Also in Hardy 1966-, **IV**, 477-501.
HARDY, G. H. 1966-. *Collected papers.* Oxford: Clarendon Press.
HARRIS, T. E. 1963. *Branching processes.* New York: Springer.
HARRISON, E. R. 1981. *Cosmology.* Cambridge University Press.
HARISON, R. J., BISHOP, G. J. & QUINN, G. P. 1978. Spanning lengths of percolation clusters. *J. of Statistical Physics* **19**, 53-64.
HARTER, W. G. 1979-1981. Theory of hyperfine and superfine links in symmetric polyatomic molecules. I Trigonal and tetrahedral molecules. II Elementary cases in octahedral hexafluoride molecules *Physical Review*, **A19**, pp. 2277-2303 & **A24**, pp. 192-263.
HARTMANN, W. K. 1977. Cratering in the solar system. *Scientific American* (January) 84-99.
HARVEY, W. 1628. *De motu cordis.* Trans. Robert Willis, London, 1847, as *On the motion of the heart and blood in animals.* Excerpt in *Steps in the scientific tradition: readings in the history of science.* Ed. R.S. Westfall et al. New York: Wiley.
HAUSDORFF, F. 1919. Dimension und äusseres Mass. *Mathematische Annalen* **79**, 157-179.
HAWKES, J. 1974. Hausdorff measure, entropy and the independence of small sets. *Pr. of the London Mathematical Society* (3) **28**, 700-724.
HAWKES, J. 1978. Multiple points for symmetric Lévy processes. *Mathematical Pr. of the Cambridge Philosophical Society* **83**, 83-90.
HAWKINS, G. S. 1964. Interplanetary debris near the Earth. *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **2**, 149-164.
HAWKINS, T. 1970. *Lebesgue's theory of integration: Its origins and development.* Madison: University of Wisconsin Press.
HEATH, T. L. 1908. *The thirteen books of Euclid's elements translated with introduction and commentary.* Cambridge University Press. (Dover reprint).
HELLEMAN, R. H. G. (Ed.) 1980. Nonlinear dynamics. *Annals of the New York Academy of Sciences* **357**, 1-507.
HENDRICKS, W. J. 1979. Multiple points for transient symmetric Lévy processes in $\mathbb{R}^d$. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **49**, 13-21.
HERMITE, C. & STIELTJES, T. J.. 1905. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes.* 2 vols. Ed. B. Baillaud & H. Bourget. Paris: Gauthier-Villars.
HEYDE, C. C. & SENETA, E. 1977. *I. J. Bienaymé: statistical theory anticipated.* New York: Springer.
HILBERT, D. 1891. Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück. *Mathematische Annalen* **38**, 459-460. Also in Hilbert 1932, **3**, 1-2.
HILBERT, D. 1932. *Gesammelte Abhandlungen.* Berlin: Springer (Chelsea reprint).
HILEY, B. J. & SYKES, M. F. 1961. Probability of initial ring closure in the restricted random walk

model of a macromolecule. *J. of Chemical Physics* 34, 1531-1537.

HILLE, E. & TAMARKIN, J. D. 1929. Remarks on a known example of a monotone continuous function. *American Mathematics Monthly* 36, 255-264.

HIRST, K. E. 1967. The Apollonian packing of circles. *J. of the London Mathematical Society* 42, 281-291.

HOFSTADTER, D. R. 1976. Energy levels and wave functions of Bloch electrons in rational and irrational magnetic fields. *Physical Review* B14, 2239-2249.

HOFSTADTER, D. R. 1981. Strange attractors: mathematical patterns delicately poised between order and chaos. *Scientific American* 245 (November issue), 16-29.

HOLTSMARK, J. 1919. Über die Verbreiterung von Spektrallinien. *Annalen der Physik* 58, 577-630.

HOOGE, F. N., KEINPENNING, T. G. M. & VANDAMME, L. K. J. 1981. Experimental studies on 1/f noise. *Reports on Progress in Physics* 44, 479-532.

HOPKINSON 1876. On the residual charge of the Leyden jar. *Pr. of the Royal Society of London* 24 408-

HORN, H. 1971. *Trees*. Princeton University Press.

HORSFIELD, K. & CUMMINGS, G. 1967. Angles of branching and diameters of branches in the human bronchial tree. *Bulletin of Mathematics Biophysics* 29, 245-259.

HORTON, R. E. 1945. Erosional development of streams and their drainage basins; Hydrophysical approach to quantitative morphology. *Bulletin of the Geophysical Society of America* 56, 275-370.

HOSKIN, M. 1973. Dark skies and fixed stars. *J. of the British Astronomical Association*, 83, 4-.

HOSKIN, M. A. 1977. Newton, Providence and the universe of stars. *J. for the History of Astronomy* 8, 77-101.

HOWARD, A. D. 1971. Truncation of stream networks by headward growth and branching. *Geophysical Analysis* 3, 29-51.

HOYLE, F. 1953. On the fragmentation of gas clouds into galaxies and stars. *Astrophysical J.* 118, 513-528.

HOYLE, F. 1975. *Astronomy and cosmology. A modern course*. San Francisco: W.H. Freeman.

HUREWICZ, W. & WALLMAN, H. 1941. *Dimension theory*. Princeton University Press.

HURST, H. E. 1951. Long-term storage capacity of reservoirs. *Tr. of the American Society of Civil Engineers* 116, 770-808.

HURST, H. E. 1955. Methods of using long-term storage in reservoirs. *Pr. of the Institution of Civil Engineers* Part I, 519-577.

HURST, H. E., BLACK, R. P., AND SIMAIKA, Y. M. 1965. *Long-term storage, an experimental study*. London: Constable.

HUTCHINSON, J. E. 1981. Fractals and self similarity. *Indiana University Mathematics J.* 30 713-747.

HUXLEY, J. S. 1931. *Problems of relative growth*. New York: Dial Press.

IBERALL, A. S. 1967. Anatomy and steady flow characteristics of the arterial system with an introduction to its pulsatile characteristics. *Mathematical Biosciences* 1, 375-395.

JACK, J. J. B., NOBLE, D. & TSIEN, R. W. 1975. *Electric current flow in excitable cells*. Oxford University Press.

JAKI, S. L. 1969. *The paradox of Olbers' paradox*. New York: Herder & Herder.

JEANS, J. H. 1929. *Astronomy and cosmogony*. Cambridge University Press. (Dover reprint).

JERISON, H. J. 1973. *Evolution of the brain and intelligence*. New York: Academic.

JOEVEER, M., EINASTO, J. & TAGO, E. 1977. Preprint of Tartu Observatory.

JOHNSON, D. M. 1977. Prelude to dimension theory: the geometric investigation of Bernard Bolzano. *Archive for History of Exact Sciences* 17, 261-295.

JOHNSON, D. M. 1981. The problem of the invariance of dimension in the growth of modern topology. *Archive for history of exact sciences* Part I; Part II, 25, 85-267.

JULIA, G. 1918. Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles. *J. de Mathématiques Pures et Appliquées* 4: 47-245. Reprinted (with related texts) in Julia 1968, 121-319.

JULIA, G. 1968. *Oeuvres de Gaston Julia*, Paris: Gauthier-Villars.

KAHANE, J. P. 1964. Lacunary Taylor and Fourier series. *Bulletin of the American Mathematical Society* 70, 199-213.

KAHANE, J. P. 1968. *Some random series of functions*. Lexington, MA: D. C. Heath.

KAHANE, J. P. 1969. Trois notes sur les ensembles parfaits linéaires. *Enseignement mathématique* 15, 185-192.

KAHANE, J. P. 1970. Courbes étranges, ensembles minces. *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* 49, 325-339.

KAHANE, J. P. 1971. The technique of using random measures and random sets in harmonic analysis. *Advances in Probability and Related Topics*, Ed. P. Ney. 1, 65-101. New York: Marcel Dekker.

KAHANE, J. P. 1974. Sur le modèle de turbulence de Benoit Mandelbrot. *Comptes Rendus* (Paris) 278A, 621-623.

KAHANE, J. P. & MANDELBROT, B. B. 1965. Ensembles de multiplicité aléatoires. *Comptes Rendus* (Paris) 261, 3931-3933.

KAHANE, J. P. & PEYRIÈRE, J. 1976. Sur certaines martingales de B. Mandelbrot. *Advances in Mathematics* 22, 131-145.

KAHANE, J. P. & SALEM, R. 1963. *Ensembles parfaits et séries trigonométriques*. Paris: Hermann.

KAHANE, J. P., WEISS, M. & WEISS, G. 1963. On lacunary power series. *Arkiv för Mathematik, Astronomi och Fysik* 5, 1-26.

KAKUTANI, S. 1952. Quadratic diameter of a metric space and its application to a problem in analysis. *Pr. of the American Mathematical Society* 3, 532-542.

KANT, I. 1755-1969. *Universal natural history and theory of the heavens*. Ann Arbor: University of Michigan Press.

KASNER, E. & SUPNICK, F. 1943. The Apollonian packing of circles. *Pr. of the National Academy of Sciences U.S.A.* 29, 378-384.

KAUFMAN, R. 1968. On Hausdorff dimension of projections. *Mathematika* 15, 153-155.

KELLY, W. 1951. *The best of Pogo*. New York: Simon and Schuster.

KERKER, M. 1974. Brownian movement and molecular reality prior to 1900. *J. of Chemical Education* 51, 764-768.

KERKER, M. 1976. The Svedberg and molecular reality. *Isis* 67, 190-216.
KIRKPATRICK, S. 1973. Percolation and conduction. *Reviews of Modern Physics* 45, 574-588.
KIRKPATRICK, S. 1979. Models of disordered materials. *Ill-condensed matter -Matière mal condensée*. Ed. R. Balian, R. Ménard & G. Toulouse, New York: North Holland. 1, 99-154.
KLINE, S. A. 1945. On curves of fractional dimensions. *J. of the London Mathematical Society* 20, 79-86.
KNIGHT, F. B. 1981. *Essentials of Brownian motion and diffusion*. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
KNUTH, D. 1968-. *The art of computer programming*. Reading, MA: Addison Wesley.
KOHLRAUSCH, R. 1847. Über das Dellmann'sche Elektrometer. *Annalen der Physik und Chemie* (Poggendorf) III-12, 353-405.
KOHLRAUSCH, R. 1854. Theorie des elektrischen Rückstandes in der Leidener Flasche. *Annalen der Physik und Chemie* (Poggendorf) IV-91, 56-82 & 179-214.
KOLMOGOROV, A. N. 1940. Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven im Hilbertschen Raum. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* 26, 115-118.
KOLMOGOROV, A. N. 1941. Local structure of turbulence in an incompressible liquid for very large Reynolds numbers. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* 30, 299-303. Reprinted in Friedlander & Topper 1961, 151-155.
KOLMOGOROV, A. N. 1962. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number. *J. of Fluid Mechanics* 13, 82-85. Original Russian text and French translation in *Mécanique de la Turbulence*, 447-458 (Colloque International de Marseille, 1961), Paris: Editions du CNRS.
KOLMOGOROV, A. N. & TIHOMIROV, V. M. 1959-1961. Epsilon-entropy and epsilon-capacity of sets in functional spaces. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk* (N.S.) 14, 3-86. Translated in *American Mathematical Society Translations* (Series 2) 17, 277-364.
KORCAK, J. 1938. Deux types fondamentaux de distribution statistique. *Bulletin de l'Institut International de Statistique* III, 295-299.
KRAICHNAN, R. H. 1974. On Kolmogorov's inertial range theories. *J. of Fluid Mechanics* 62, 305-330.
KUO, A. Y. S. & CORRSIN, S. 1971. Experiments on internal intermittency and fine structure distribution functions in fully turbulent fluid. *J. of Fluid Mechanics* 50, 285-320.
KUO, A. Y. S. & CORRSIN, S. 1972. Experiments on the geometry of the fine structure regions in fully turbulent fluid. *J. of Fluid Mechanics* 56, 477-479.

LAMPERTI, J. 1962. Semi-stable stochastic processes. *Tr. of the American Mathematical Society* 104, 62-78.
LAMPERTI, J. 1966. *Probability: a survey of the mathematical theory*. Reading, MA: W. A. Benjamin.
LAMPERTI, J. 1972. Semi-stable Markov processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie*, 22, 205-225.
LANDAU, L. D. & LIFSHITZ, E. M. 1953-1959. *Fluid mechanics*. Reading: Addison Wesley.
LANDKOF, N. S. 1966-1972. *Foundations of modern potential theory*. New York: Springer.
LANDMAN, B. S. & RUSSO, R. L. 1971. On a pin versus block relationship for partitions of logic graphs. *IEEE Tr. on Computers* 20, 1469-1479.
LAPLACE, P. S. DE 1878-. *Oeuvres complètes*. Paris: Gauthier-Villars.
LARMAN, D. G. 1967. On the Besicovitch dimension of the residual set of arbitrarily packed disks in the plane. *J. of the London Mathematical Society* 42, 292-302.
LAVOIE, J. L., OSLER, T. J. & TREMBLAY, R. 1976. Fractional derivatives of special functions. *SIAM Review* 18, 240-268.
LAWRANCE, A. J. & KOTTEGODA, N. T. 1977. Stochastic modelling of riverflow time series. *J. of the Royal Statistical Society* A, 140, Part I, 1-47.
LEATH, P. L. 1976. Cluster size and boundary distribution near percolation threshold. *Physical Review* B14, 5046-5055.
LEBESGUE, H. 1903. *Sur le problème des aires*. See Lebesgue 1972-, IV, 29-35.
LEBESGUE, H. 1972-. *Oeuvres scientifiques*. Genève: Enseignement Mathématique.
LEIBNIZ, G. W. 1849-. *Mathematische Schriften*. Ed. C.I. Gerhardt. Halle: H.W. Schmidt (Olms reprint).
LEOPOLD, L. B. 1962. Rivers. *American Scientist* 50, 511-537.
LEOPOLD, L. B. & LANGBEIN, W. B. 1962. The concept of entropy in landscape evolution. *U.S. Geological Survey Professional Papers* 500A.
LEOPOLD, L. B. & MADDOCK, T., JR. 1953. The hydraulic geometry of stream channels and some physiological implications. *U.S. Geological Survey Professional Papers* 252.
LEOPOLD, L. B. & MILLER, J. P. 1956. Ephemeral streams: Hydraulic factors and their relation to the drainage net. *U.S. Geological Survey Professional Papers* 282-A, 1-37.
LERAY, J. 1934. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace. *Acta Mathematica* 63, 193-248.
LÉVY, P. 1925. *Calcul des probabilités*. Paris: Gauthier Villars.
LÉVY, P. 1930. Sur la possibilité d'un univers de masse infinie. *Annales de Physique* 14, 184-189. Also in Lévy 1973- II, 534-540.
LÉVY, P. 1937-1954. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. Paris: Gauthier Villars.
LÉVY, P. 1938. Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de parties semblables au tout. *J. de l'Ecole Polytechnique*, III, 7-8, 227-291. Also in Lévy 1973- II, 331-394.
LÉVY, P. 1948-1965. *Processus stochastiques et mouvement brownien*. Paris: Gauthier-Villars.
LÉVY, P. 1957. Brownian motion depending on n parameters. The particular case $n=5$. *Pr. of the Symposia in Applied Mathematics* VII, 1-20. Providence, R.I.: American Mathematical Society.
LÉVY, P. 1959. Le mouvement brownien fonction d'un point de la sphère de Riemann. *Circolo matematico di Palermo, Rendiconti*. II, 8, 297-310.
LÉVY, P. 1963. Le mouvement brownien fonction d'un ou de plusieurs paramètres. *Rendiconti di Matematica* (Roma) 22, 24-101.
LÉVY, P. 1965. A special problem of Brownian motion and a general theory of Gaussian random functions. *Pr. of the Third Berkeley Symposium in Mathematical Statistics and Probability Theory*.

Ed. J. Neyman, 2, 133-175. Berkeley: University of California Press.

LÉVY, P. 1970. *Quelques aspects de la pensée d'un mathématicien.* Paris: Albert Blanchard.

LÉVY, P. 1973-. *Oeuvres de Paul Lévy.* Ed. D. Dugué, P. Deheuvels & M. Ibèro. Paris: Gauthier Villars.

LIEB, E. H. & LEBOWITZ, J. L. 1972. The constitution of matter: existence of thermodynamics for systems composed of electrons and nuclei. *Advances in Mathematics* **9**, 316-398.

LLINAS, R. R. 1969. *Neurobiology of cerebellar evolution and development.* Chicago: American Medical Association.

LOEMKER, L. E. 1956-1969. *Philosophical papers and letters of Leibniz.* Boston: Reidel.

LORENZ, E. N. 1963. Deterministic nonperiodic flow. *J. of the Atmospheric Sciences* **20**, 130-141.

LOVE, E. R. & YOUNG, L. C. 1937. Sur une classe de fonctionnelles linéaires. *Fundamenta Mathematicae* **28**, 243-257.

LOVEJOY, S. 1982. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science* **216**, 185-187.

LUKACS, E. 1960-1970. *Characteristic functions.* London: Griffin. New York: Hafner.

LYDALL, H. F. 1959. The distribution of employment income. *Econometrica* **27**, 110-115.

MAITRE, J. 1964. Les fréquences des prénoms de baptême en France. *L'Année sociologique* **3**, 31-74.

MANDELBROT, B. B. 1951. Adaptation d'un message à la ligne de transmission. I & II. *Comptes Rendus* (Paris) **232**, 1638-1640 & 2003-2005.

MANDELBROT, B. B. 1953t. Contribution à la théorie mathématique des jeux de communication (Ph.D. Thesis). *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris* **2**, 1-124.

MANDELBROT, B. B. 1954w. Structure formelle des textes et communication (deux études). *Word* **10**, 1-27. Corrections. *Word*: **11**, 424. Translations into English, Czech and Italian.

MANDELBROT, B. B. 1955b. On recurrent noise limiting coding. *Information Networks, the Brooklyn Polytechnic Institute Symposium*, 205-221. Ed. E. Weber. New York: Interscience. Translation into Russian.

MANDELBROT, B. B. 1956c. La distribution de Willis-Yule, relative au nombre d'espèces dans les genres taxonomiques. *Comptes Rendus* (Paris) **242**, 2223-2225.

MANDELBROT, B. B. 1956l. On the language of taxonomy: an outline of a thermo-statistical theory of systems of categories, with Willis (natural) structure. *Information Theory, the Third London Symposium.* Ed. C. Cherry. 135-145. New York: Academic.

MANDELBROT, B. B. 1956t. Exhaustivité de l'énergie d'un système, pour l'estimation de sa température. *Comptes Rendus* (Paris) **243**, 1835-1837.

MANDELBROT, B. B. 1956m. A purely phenomenological theory of statistical thermodynamics: canonical ensembles. *IRE Tr. on Information Theory* **112**, 190-203.

MANDELBROT, B. B. 1959g. Ensembles grand canoniques de Gibbs; justification de leur unicité basée sur la divisibilitié infinie de leur énergie aléatoire. *Comptes Rendus* (Paris) **249**, 1464-1466.

MANDELBROT, B. B. 1959p. Variables et processus stochastiques de Pareto-Lévy et la répartition des revenus. I & II. *Comptes Rendus* (Paris) **249**, 613-615 & 2153-2155.

MANDELBROT, B. B. 1960i. The Pareto-Lévy law and the distribution of income. *International Economic Review* **1**, 79-106.

MANDELBROT, B. B. 1961b. On the theory of word frequencies and on related Markovian models of discourse. *Structures of language and its mathematical aspects.* Ed. R. Jakobson. 120-219. New York: American Mathematical Society.

MANDELBROT, B. B. 1961e. Stable Paretian random functions and the multiplicative variation of income. *Econometrica* **29**, 517-543.

MANDELBROT, B. B. 1962c. Sur certains prix spéculatifs: faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs de Paul Lévy. *Comptes Rendus* (Paris) **254**, 3968-3970.

MANDELBROT, B. B. 1962e. Paretian distributions and income maximization. *Quarterly J. of Economics of Harvard University* **76**, 57-85.

MANDELBROT, B. B. 1962n. Statistics of natural resources and the law of Pareto. IBM Research Note NC-146, June 29, 1962 (unpublished).

MANDELBROT, B. B. 1962t. The role of sufficiency and estimation in thermodynamics. *The Annals of Mathematical Statistics* **33**, 1021-1038.

MANDELBROT, B. B. 1963p. The stable Paretian income distribution, when the apparent exponent is near two. *International Economic Review* **4**, 111-115.

MANDELBROT, B. B. 1963b. The variation of certain speculative prices. *J. of Business* (Chicago) **36**, 394-419. Reprinted in *The random character of stock market prices.* Ed. P. H. Cootner, 297-337. Cambridge, MA.: MIT Press).

MANDELBROT, B. B. 1963e. New methods in statistical economics. *J. of Political Economy* **71**, 421-440. Reprint in *Bulletin of the International Statistical Institute, Ottawa Session:* **40** (2), 669-720.

MANDELBROT, B. B. 1964j. The epistemology of chance in certain newer sciences. Read at *The Jerusalem International Congress on Logic, Methodology and the Philosophy of Science* (unpublished).

MANDELBROT, B. B. 1964t. Derivation of statistical thermodynamics from purely phenomenological principles. *J. of Mathematical Physics* **5**, 164-171.

MANDELBROT, B. B. 1964o. Random walks, fire damage amount, and other Paretian risk phenomena. *Operations Research* **12**, 582-585.

MANDELBROT, B. B. 1964s. *Self-similar random processes and the range* IBM Research Report RC-1163, April13, 1964 (unpublished).

MANDELBROT, B. B. 1965c. Self similar error clusters in communications systems and the concept of conditional stationarity. *IEEE Tr. on Communications Technology* **13**, 71-90.

MANDELBROT, B. B. 1965h. Une classe de processus stochastiques homothétiques à soi; application à la loi climatologique de H. E. Hurst. *Comptes Rendus* (Paris) **260**, 3274-3277.

MANDELBROT, B. B. 1965s. Leo Szilard and unique decipherability. *IEEE Tr. on Information Theory* IT-11, 455-456.

MANDELBROT, B. B. 1965z. Information theory and psycholinguistics. *Scientific Psychology: Principles and Approaches.* Ed. B. B. Wolman & E. N. Nagel. New York: Basic Books 550-562.. Reprint

in *Language, Selected Readings*. Ed. R. C. Oldfield & J. C. Marshall. London: Penguin. Reprint with appendices, *Readings in Mathematical Social Science*. Ed. P. Lazarfeld and N. Henry. Chicago, Ill.: Science Research Associates (1966: hardcover). Cambridge, MA: M.I.T. Press (1968: paperback). Russian translation.

MANDELBROT, B. B. 1966b. Forecasts of future prices, unbiased markets, and 'martingale' models. *J. of Business* (Chicago) 39, 242-255. Important errata in a subsequent issue of the same Journal.

MANDELBROT, B. B. 1967b. Sporadic random functions and conditional spectral analysis; self-similar examples and limits. *Pr. of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability* 3, 155-179. Ed. L. LeCam & J. Neyman. Berkeley: University of California Press.

MANDELBROT, B. B. 1967k. Sporadic turbulence. *Boundary Layers and Turbulence* (Kyoto International Symposium, 1966). *Supplement to Physics of Fluids* 10, S302-S303.

MANDELBROT, B. B. 1967j. The variation of some other speculative prices. *J. of Business* (Chicago) 40, 393-413.

MANDELBROT, B. B. 1967p. Sur l'épistémologie du hasard dans les sciences sociales: invariance des lois et vérification des hypothèses. *Encyclopédie de la Pléiade: Logique et Connaissance Scientifique*. Ed. J. Piaget. 1097-1113. Paris: Gallimard.

MANDELBROT, B. B. 1967s. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science* 155, 636-638.

MANDELBROT, B. B. 1967i. Some noises with 1/f spectrum, a bridge between direct current and white noise. *IEEE Tr. on Information Theory* 13, 289-298.

MANDELBROT, B. B. 1968p. Les constantes chiffrées du discours. *Encyclopédie de la Pléiade: Linguistique*. Ed. J. Martinet. Paris: Gallimard, 46-56.

MANDELBROT, B. B. 1969e. Long-run linearity, locally Gaussian process, H-spectra and infinite variance. *International Economic Review* 10, 82-111.

MANDELBROT, B. B. 1970p. On negative temperature for discourse. Discussion of a paper by Prof. N. F. Ramsey. *Critical Review of Thermodynamics*, 230-232. Ed. E. B. Stuart et al. Baltimore, MD: Mono Book.

MANDELBROT, B. B. 1970e. Statistical dependence in prices and interest rates. *Papers of the Second World Congress of the Econometric Society*, Cambridge, England (8-14 Sept. 1970).

MANDELBROT, B. B. 1970y. *Statistical Self Similarity and Very Erratic Chance Fluctuations*. Trumbull Lectures, Yale University (unpublished).

MANDELBROT, B. B. 1971e. When can price be arbitraged efficiently? A limit to the validity of the random walk and martingale models. *Review of Economics and Statistics* LIII, 225-236.

MANDELBROT, B. B. 1971f. A fast fractional Gaussian noise generator. *Water Resources Research* 7, 543-553.
NOTE: in the first fraction on p. 545, 1 must be erased in the numerator and added to the fraction.

MANDELBROT, B. B. 1971n. *The conditional cosmographic principle and the fractional dimension of the universe*. (Submitted to several periodicals, but first published as part of Mandelbrot 1975o.)

MANDELBROT, B. B. 1972d. On Dvoretzky coverings for the circle. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 22, 158-160.

MANDELBROT, B. B. 1972j. Possible refinement of the lognormal hypothesis concerning the distribution of energy dissipation in intermittent turbulence. *Statistical models and turbulence*. Ed. M. Rosenblatt & C. Van Atta. Lecture Notes in Physics 12 333-351. New York: Springer.

MANDELBROT, B. B. 1972b. Correction of an error in "The variation of certain speculative prices (1963)." *J. of Business* 40, 542-543.

MANDELBROT, B. B. 1972c. Statistical methodology for nonperiodic cycles: from the covariance to the R/S analysis. *Annals of Economic and Social Measurement* 1, 259-290.

MANDELBROT, B. B. 1972w. Broken line process derived as an approximation to fractional noise. *Water Resources Research* 8, 1354-1356.

MANDELBROT, B. B. 1972z. Renewal sets and random cutouts. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 22, 145-157.

MANDELBROT, B. B. 1973c. Comments on "A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices," by Peter K. Clark. *Econometrica* 41, 157-160.

MANDELBROT, B. B. 1973f. Formes nouvelles du hasard dans les sciences. *Economie Appliquée* 26, 307-319.

MANDELBROT, B. B. 1973j. Le problème de la réalité des cycles lents, et le syndrome de Joseph. *Economie Appliquée* 26, 349-365.

MANDELBROT, B. B. 1973v. Le syndrome de la variance infinie, et ses rapports avec la discontinuité des prix. *Economie Appliquée* 26, 321-348.

MANDELBROT, B. B. 1974c. Multiplications aléatoires itérées, et distributions invariantes par moyenne pondérée. *Comptes Rendus* (Paris) 278A, 289-292 & 355-358.

MANDELBROT, B. B. 1974d. A population birth and mutation process, I: Explicit distributions for the number of mutants in an old culture of bacteria. *J. of Applied Probability* 11, 437-444. (Part II distributed privately).

MANDELBROT, B. B. 1974f. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier. *J. of Fluid Mechanics* 62, 331-358.

MANDELBROT, B. B. 1975b. Fonctions aléatoires pluri-temporelles: approximation poissonien ne du cas brownien et généralisations. *Comptes Rendus* (Paris) 280A, 1075-1078.

MANDELBROT, B. B. 1975f. On the geometry of homogeneous turbulence, with stress on the fractal dimension of the iso-surfaces of scalars. *J. of Fluid Mechanics* 72, 401-416.

MANDELBROT, B. B. 1975m. Hasards et tourbillons: quatre contes à clef. *Annales des Mines* (November), 61-66.

MANDELBROT, B. B. 1975o. *Les objets fractals: forme, hasard et dimension*. Paris: Flammarion.

MANDELBROT, B. B. 1975u. Sur un modèle décomposable d'univers hiérarchisé: déduction des corrélations galactiques sur la sphère céleste. *Comptes Rendus* (Paris) 280A, 1551-1554.

MANDELBROT, B. B. 1975w. Stochastic models for the Earth's relief, the shape and the fractal dimension of the coastlines, and the number-area rule for islands. *Pr. of the National Academy of Sciences USA* 72, 3825-3828.

MANDELBROT, B. B. 1975h. Limit theorems on the self-normalized range for weakly and strongly dependent processes. *Z. für*

Wahrscheinlichkeitstheorie **31**, 271-285.
MANDELBROT, B. B. 1976c. Géométrie fractale de la turbulence. Dimension de Hausdorff, dispersion et nature des singularités du mouvement des fluides. *Comptes Rendus* (Paris) **282A**, 119-120.
MANDELBROT, B. B. 1976o. Intermittent turbulence & fractal dimension: kurtosis and the spectral exponent 5/3+B. *Turbulence and Navier Stokes Equations* Ed. R. Teman, *Lecture Notes in Mathematics* **565**, 121-145. New York: Springer.
MANDELBROT, B. B. 1977b. Fractals and turbulence: attractors and dispersion. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977* Ed. P. Bernard & T. Ratiu. *Lecture Notes in Mathematics* **615** 83-93. New York: Springer. Russian translation.
MANDELBROT, B. B. 1977f. *Fractals: form, chance, and dimension.* San Francisco: W. H. Freeman & Co.
MANDELBROT, B. B. 1977h. Geometric facets of statistical physics: scaling and fractals. *Statistical Physics 13*, International IUPAP Conference, 1977. Ed. D. Cabib et al. *Annals of the Israel Physical Society*. 225-233.
MANDELBROT, B. B. 1978b. The fractal geometry of trees and other natural phenomena. *Buffon Bicentenary Symposium on Geometrical Probability*, Ed. R. Miles & J. Serra *Lecture Notes in Biomathematics* **23** 235-249. New York: Springer.
MANDELBROT, B. B. 1978r. Les objets fractals. *La Recherche* **9**, 1-13.
MANDELBROT, B. B. 1978c. Colliers aléatoires et une alternative aux promenades au hasard sans boucle: les cordonnets discrets et fractals. *Comptes Rendus* (Paris) **286A**, 933-936.
MANDELBROT, B. B. 1979n. Comment on bifurcation theory and fractals. *Bifurcation Theory and Applications*, Ed. Gurel & O. Rössler. *Annals of the New York Academy of Sciences* **316**, 463-464.
MANDELBROT, B. B. 1979u Corrélations et texture dans un nouveau modèle d'Univers hiérarchisé, basé sur les ensembles trémas. *Comptes Rendus* (Paris) **288A**, 81-83.
MANDELBROT, B. B. 1980b. Fractals and geometry with many scales of length. *Encyclopedia Britannica 1981 Yearbook of Science and the Future*, 168-181.
MANDELBROT, B. B. 1980n. Fractal aspects of the iteration of $z \to \lambda z(1-z)$ for complex λ and z. *Non Linear Dynamics*, Ed. R. H. G. Helleman. *Annals of the New York Academy of Sciences*, **357**, 249-259.
MANDELBROT, B. B. 1981l. Scalebound or scaling shapes: A useful distinction in the visual arts and in the natural sciences. *Leonardo* **14**, 45-47.
MANDELBROT, B. B. 1982m. On discs and sigma discs, that osculate the limit sets of groups of inversions. *Mathematical Intelligencer*: **4**.
MANDELBROT, B. B. 1982s. The inexhaustible function z^2-m (tentative title). *Scientific American* (tentative).
MANDELBROT, B. B. & MCCAMY, K. 1970. On the secular pole motion and the Chandler wobble. *Geophysical J.* **21**, 217-232.
MANDELBROT, B. B. & TAYLOR, H. M. 1967. On the distribution of stock price differences. *Operations Research*: **15**, 1057-1062.
MANDELBROT, B. B. & VAN NESS, J. W. 1968 Fractional Brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM Review* **10**, 422.
MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1968. Noah, Joseph and operational hydrology. *Water Resources Research* **4**, 909-918.
MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969a. Computer experiments with fractional Gaussian noises. *Water Resources Research* **5**, 228.
MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969b. Some long-run properties of geophysical records. *Water Resources Research* **5**, 321-340.
MANDELBROT, B. B. & WALLIS, J. R. 1969c. Robustness of the rescaled range R/S in the measurement of noncyclic long runstatistical dependence. *Water Resources Research* **5**, 967-988.
MANDELBROT, B. B., *see also* Apostel, M. & Morf, Berger & M., Damerau & M., Gefen, M., & Aharony, Gefen, Aharony, M. & Kirkpatrick, Gerstein & M., & Kahane & M.
MANHEIM, J. H. 1964. *The genesis of point-set topology*. New York: Macmillan.
MARCUS, A. 1964. A stochastic model of the formation and survivance of lunar craters, distribution of diameters of clean craters. *Icarus* 3, 460-472.
MARCUS, M. B. 1976. Capacity of level sets of certain stochastic processes. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **34**, 279-284.
MARSTRAND, J. M. 1954a. Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimension. *Pr. of the London Mathematical Society* (3) **4**, 257-302.
MARSTRAND, J. M. 1954b. The dimension of Cartesian product sets. *Pr. of the London Mathematical Society* **50**, 198-202.
MATHERON, G. 1962. *Traité de Géostatistique Appliquée* Cambridge Philosophical Society, Tome 1, Paris: Technip.
MATTILA, P. 1975. Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Series A Mathematica* **I**, 227-244.
MAX, N. L. 1971. *Space filling curves.* 16 mm color film. Topology Films Project. International Film Bureau, Chicago, Ill. Accompanying book (preliminary edition). Education Development Center, Newton, MA.
MAXWELL, J. C. 1890. *Scientific papers* (Dover reprint).
MCKEAN, H. P., JR. 1955a. Hausdorff-Besicovitch dimension of Brownian motion paths. *Duke Mathematical J.* **22**, 229-234.
MCKEAN, H. P., JR. 1955b. Sample functions of stable processes. *Annals of Mathematics* **61**, 564-579.
MCKEAN, H. P., JR. 1963. Brownian motion with a several dimensional time. *Theory of Probability and its Applications* **8**, 357-378.
MCMAHON, T. A. 1975. The mechanical design of trees. *Scientific American* **233**, 92-102.
MCMAHON, T. A. & KRONAUER, R. E. 1976. Tree structures: Deducing the principle of mechanical design. *J. of Theoretical Biology* **59**, 433-466.
MEJIA, J. M., RODRIGUEZ-ITURBE, I. & DAWDY, D. R. 1972. Streamflow simulation. 2. The broken line process as a potential model for hydrological simulation. *Water Resource Research*, **8**, 931-941.
MELZAK, Z. A. 1966. Infinite packings of disks. *Canadian J. of Mathematics* **18**, 838-852.
MENGER, K. 1943. What is dimension? *American Mathematical Monthly* **50**, 2-7. Reprint in Menger 1979, Ch. 17.
MENGER, K. 1979. *Selected papers in logic and foundations, didactics and economics.* Boston: Reidel.
MENSCHKOWSKI, H. 1967. *Probleme des*

Unendlichen. Braunschweig: Vieweg.
METROPOLIS, N., STEIN, M. L. & STEIN, P. R. 1973. On finite limit sets for transformations on the unit interval. *J. of Combinatorial Theory* A15, 25-44.
MINKOWSKI, H. 1901. Über die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen. *Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung* 9, 115-121. Also in Minkowski 1911 2, 122-127.
MINKOWSKI, H. 1911. *Gesammelte Abhandlungen*, Chelsea reprint.
MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1963. On the laws of small scale turbulent flow of liquids and gases. *Russian Mathematical Surveys* (translated from the Russian). 18, 89-109.
MONIN, A. S. & YAGLOM, A. M. 1971 & 1975. *Statistical fluid mechanics, Volumes 1 and 2* (translated from the Russian). Cambridge, MA: MIT Press.
MOORE, E. H. 1900. On certain crinkly curves. *Tr. of the American Mathematical Society* 1, 72-90.
MORI, H. 1980. Fractal dimensions of chaotic flows of autonomous dissipative systems. *Progress of Theoretical Physics* 63, 1044-1047.
MORI, H. & FUJISAKA, H. 1980. Statistical dynamics of chaotic flows. *Progress of Theoretical Physics* 63, 1931-1944.
MUNITZ, M. K. (Ed.) 1957. *Theories of the universe.* Glencoe, IL: The Free Press.
MURRAY, C. D. 1927. A relationship between circumference and weight in trees. *J. of General Physiology* IV, 725-729.
MYRBERG, P. J. 1962. Sur l'itèration des polynomes rèels quadratiques. *J. de Mathématiques pures et appliquées* (9)41, 339-351.

NELSON, E. 1966. Derivation of the Schrödinger equation from Newtonian mechanics. *Physical Review* 150, 1079-1085.
NELSON, E. 1967. *Dynamical theories of Brownian motion.* Princeton University Press.
NEUENSCHWANDER, E. 1978. Der Nachlass von Casorati (1835-1890) in Pavia. *Archive for History of Exact Sciences* 19, 1-89.
NEWMAN, J. R. 1956. *The world of mathematics.* New York: Simon & Schuster.
NORTH, J. D. 1965. *The measure of the universe.* Oxford: Clarendon Press.
NOVIKOV, E. A. 1963. Variation in the dissipation of energy in a turbulent flow and the spectral distribution of energy. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika* 27, 944-946 (translation, 1445-1450).
NOVIKOV, E. A. 1965a. On correlations of higher order in turbulent motion (in Russian). *Fisika Atmosfery i Okeana* 1, 788-796.
NOVIKOV, E. A. 1965b. On the spectrum of fluctuations in turbulent motion (in Russian). *Fisika Atmosfery i Okeana* 1, 992-993.
NOVIKOV, E. A. 1966. Mathematical model of the intermittency of turbulent motion (in Russian). *Doklady Akademii Nauk SSSR* 168, 1279-1282.
NOVIKOV, E. A. 1971. Intermittency and scale similarity in the structure of a turbulent flow. *Prikladnaia Matematika i Mekhanika* 35, 266-277. English in *P.M.M. Applied Mathematics and Mechanics*
NOVIKOV, E. A. & STEWART, R.W. 1964. Intermittency of turbulence and the spectrum of fluctuations of energy dissipation (in Russian). *Isvestia Akademii Nauk SSR; Seria Geofizicheskaia* 3, 408-413.
NYE, M. J. 1972. *Molecular reality. A perspective on the scientific work of Jean Perrin.* London: Macdonald. New York: American Elsevier.

OBUKHOV, A. M. 1941. On the distribution of energy in the spectrum of turbulent flow. *Comptes Rendus (Doklady) Académie des Sciences de l'URSS (N.S.)* 32, 22-24.
OBUKHOV, A. M. 1962. Some specific features of atmospheric turbulence. *J. of Fluid Mechanics* 13, 77-81. Also in *J. of Geophysical Research* 67, 3011-3014.
OLBERS, W. 1823. Über die Durchsichtigkeit des Weltraums. *Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1826 nebst einer Sammlung der neuesten in die astronomischen Wissenschaften einschlagenden Abhandlungen, Beobachtungen und Nachrichten,* 150, 110-121. Berlin: C.F.E. Spâthen.
OLDHAM, K. B. & SPANIER, J. 1974. *The fractional calculus.* New York: Academic.
OREY, S. 1970. Gaussian sample functions and the Hausdorff dimension of level crossings. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 15, 249-156.
OSGOOD, W. F. 1903. A Jordan curve of positive area. *Tr. of the American Mathematical Society* 4, 107-112.

PAINLEVÉ, P. 1895. Leçon d'ouverture faite en présence de Sa Majesté le Roi de Suède et de Norwège. First printed in Painlevé 1972-1,200-204.
PAINLEVÉ, P. 1972-. *Oeuvres de Paul Painlevé.* Paris: Editions du CNRS.
PALEY, R. E. A. C. & WIENER, N. 1934. *Fourier transforms in the complex domain.* New York: American Mathematical Society.
PARETO, V. 1896-1965. *Cours d'économie politique.* Reprinted as a volume of *Oeuvres Complètes.* Geneva: Droz.
PARTRIDGE, E. 1958. *Origins.* New York: Macmillan.
PAUMGARTNER, D. & WEIBEL, E. 1981. Resolution effects on the stereological estimation of surface and volume and its interpretation in terms of fractal dimension. *J. of Microscopy* 121, 51-63.
PEANO, G. 1890. Sur une courbe, qui remplit une aire plane. *Mathematische Annalen* 36, 157-160. Translation in Peano 1973.
PEANO, G. 1973. *Selected works.* Ed. H. C. Kennedy. Toronto University Press.
PEEBLES, P. J. E. 1980. *The large-scale structure of the universe.* Princeton University Press.
PERRIN, J. 1906. La discontinuité de la matière. *Revue du Mois* 1, 323-344.
PERRIN, J. 1909. Mouvement brownien et réalité moléculaire. *Annales de chimie et de physique* VIII 18, 5-114. Trans. F. Soddy, as *Brownian Movement and Molecular Reality.* London: Taylor & Francis.
PERRIN, J. 1913. *Les Atomes.* Paris: Alcan. A 1970 reprint by Gallimard supersedes several revisions that had aged less successfully. English translation: *Atoms,* by D. L. Hammick; London: Constable. New York: Van Nostrand. Also translated into German, Polish, Russian, Serbian and Japanese.
PETERSON, B. A. 1974. The distribution of galaxies in relation to their formation and evolution. *The formation and dynamics of galaxies,* Ed. Shakeshaft, J. R. IAU Symposium 58. Boston: Reidel, 75-84.
PEYRIÈRE, J. 1974. Turbulence et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus* (Paris) 278A, 567-

569.
PEYRIÈRE, J. 1978. Sur les colliers aléatoires de B. Mandelbrot. *Comptes Rendus* (Paris) **286A**, 937-939.
PEYRIÈRE, J. 1979. Mandelbrot random beadsets and birth processes with interaction (privately distributed).
PEYRIÈRE, J., 1981. Processus de naissance avec interaction des voisins, Evolution de graphes. *Annales de l'Institut Fourier*, **31**, 187-218.
POINCARÉ, H. 1890. *Calcul des probabilités* (2nd ed., 1912) Paris: Gauthier-Villars.
POINCARÉ, H. 1905. *La valeur de la science*. Paris: Flammarion. English tr. by G. B. Halsted.
POINCARÉ, H. 1913. *Dernières penseés*, Paris: Flammarion.
POINCARÉ, H. 1916-. *Oeuvres de Henri Poincaré*. Paris: Gauthier Villars.
PONTRJAGIN, L. & SCHNIRELMAN, L. 1932. Sur une propriété métrique de la dimension. *Annals of Mathematics* **33**, 156-162.
PRUITT, W. E. 1975. Some dimension results for processes with independent increments. *Stochastic Processes and Related Topics*, **I**, 133-165. Ed. M. L. Puri. New York: Academic.
PRUITT, W. E. 1979. The Hausdorff dimension of the range of a process with stationary independent increments. *J. of Mathematics and Mechanics* **19**, 371-378.
PRUITT, W. E. & TAYLOR, S. J. 1969. Sample path properties of processes with stable components. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **12**, 267-289.

QUEFFELEC, H. 197. Dérivabilité de certaines sommes de séries de Fourier lacunaires. (Thèse de 3e Cycle de Mathématiques.) Orsay: Université de Paris-Sud.

RALL, W. 1959. Branching dendritic trees and motoneuron membrane resistivity. *Experimental Neurology* **1**, 491-527.
RAYLEIGH, LORD 1880. On the resultant of a large number of vibrations of the same pitch and arbitrary phase. *Philosophical Magazine* **10**, 73. Also in Rayleigh 1899 **1**, 491-.
RAYLEIGH, LORD 1899. *Scientific papers*. Cambridge University Press. Dover reprint.
RÉNYI, A. 1955. On a new axiomatic theory of probability. *Acta Mathematica Hungarica* **6**, 285-335.
RICHARDSON, L. F. 1922. *Weather prediction by numerical process*. Cambridge University Press. The Dover reprint contains a biography as part of a new introduction by J. Chapman.
RICHARDSON, L. F. 1926. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Pr. of the Royal Society of London*. **A, 110**, 709-737.
RICHARDSON, L. F. 1960a. *Arms and insecurity: a mathematical study of the causes and origins of war*. Ed. N. Rashevsky & E. Trucco. Pacific Grove, CA: Boxwood Press.
RICHARDSON, L. F. 1960s. *Statistics of deadly quarrels*. Ed. Q. Wright & C. C. Lienau. Pacific Grove, CA: Boxwood Press.
RICHARDSON, L. F. 1961. The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. *General Systems Yearbook* **6**, 139-187.
RICHARDSON, L. F. & STOMMEL, H. 1948. Note on eddy diffusion in the sea. *J. of Meteorology* **5**, 238-240.
ROACH, F. E. & GORDON, J. L. 1973. *The light of the night sky*. Boston: Reidel.
ROGERS, C. A. 1970. *Hausdorff measures*. Cambridge University Press.
ROLL, R. 1970. *Behavior of interest rates: the application of the efficient market model to U.S. treasury bills*. New York: Basic Books.
ROSE, N. J. 1981. The Pascal triangle and Sierpiński's tree. *Mathematical Calendar* 1981, Raleigh, NC: Rome Press.
ROSEN, E. 1965. *Kepler's conversation with Galileo's siderial messenger*. New York: Johnson Reprint.
ROSENBLATT, M. 1961. Independence and dependence. *Proc. 4th Berkeley Symposium Mathematical Statistics and Probability* 441-443. Berkeley: University of California Press.
ROSENBLATT, M. & VAN ATTA, C. (Eds.) 1972. *Statistical models and turbulence*. Lecture Notes in Physics **12**. New York: Springer.
ROSS, B. (Ed.) 1975. *Fractional calculus and its applications*. Lecture Notes in Mathematics **457**. New York: Springer.
RUELLE, D. 1972. Strange attractors as a mathematical explanation of turbulence. In Rosenblatt & Van Atta *Lecture Notes in Physics* **12**, 292-299. New York: Springer.
RUELLE, D. & TAKENS, F. 1971. On the nature of turbulence. *Communications on Mathematical Physics* **20**, 167-192 & **23**, 343-344.
RUSSELL, B. 1897. *An essay on the foundations of geometry* Cambridge University Press (Dover reprint).

SAFFMAN, P. G. 1968. Lectures on homogeneous turbulence. *Topics in Nonlinear Physics* Ed. N. J. Zabusky. New York: Springer.
SALEM, R. & ZYGMUND, A. 1945. Lacunary power series and Peano curves. *Duke Mathematical J.* **12**, 569-578.
SAYLES, R. S. & THOMAS, T. R. 1978. Surface topography as a nonstationary random process. *Nature* **271**, 431-434 & **273**, 573.
SCHEFFER, V. 1976. Equations de Navier-Stokes et dimension de Hausdorff. *Comptes Rendus* (Paris) **282A**, 121-122.
SCHEFFER, V. 1977. Partial regularity of solutions to the Navier-Stokes equation. *Pacific J. of Mathematics*.
SCHÖNBERG, I. J. 1937. On certain metric spaces arising from Euclidean spaces by a change of metric and their imbedding on Hilbert space. *Annals of Mathematics* **38**, 787-793.
SCHÖNBERG, I. J. 1938a. Metric spaces and positive definite functions. *Tr. of the American Mathematical Society* **44**, 522-536.
SCHÖNBERG, I. J. 1938b. Metric spaces and completely monotone functions. *Annals of Mathematics* **39**, 811-841.
SELETY, F. 1922. Beiträge zum kosmologischen Problem. *Annalen der Physik* **IV. 68**, 281-334.
SELETY, F. 1923a. Une distribution des masses avec une densité moyenne nulle, sans centre de gravité. *Comptes Rendus* (Paris) **177**, 104-106.
SELETY, F. 1923b. Possibilité d'un potentiel infini, et d'une vitesse moyenne de toutes les étoiles égale à celle de la lumière. *Comptes Rendus* (Paris) **177**, 250-252.
SELETY, F. 1924. Unendlichkeit des Raumes und allgemeine Relativitätstheorie. *Annalen der Physik* **IV. 73**, 291-325.
SHANTE, V. K. S. & KIRKPATRICK, S. 1971. An introduction to percolation theory. *Advances in Physics* **20**, 325-357.
SHEPP, L. A. 1972. Covering the circle with random arcs. *Israel J. of Mathematics* **11**, 328-345.

SIERPIŃSKI, W. 1915. Sur une courbe dont tout point est un point de ramification. *Comptes Rendus* (Paris) 160, 302. More detail in Sierpiński 1974–, II, 99-106.

SIERPIŃSKI, W. 1916. Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoque et continue de toute courbe donnée. *Comptes Rendus* (Paris) 162, 629. More detail in Sierpiński. 1974–, II, 107-119.

SIERPIŃSKI, W. 1974–. *Oeuvres choisies.* Ed. S. Hartman et al. Warsaw: Éditions scientifiques.

SINAI, JA. G. 1976. Self-similar probability distributions. *Theory of Probability and Its Applications* 21, 64-80.

SINGH, A. N. 1935-53. *The theory and construction of nondifferentiable functions.* Lucknow (India): The University Press. Also in *Squaring the Circle and Other Monographs.* Ed. E. W. Hobson, H. P. Hudson, A. N. Singh & A. B. Kempe. New York: Chelsea.

SMALE, S. 1977. Dynamical systems and turbulence. *Turbulence Seminar Berkeley 1976/1977.* Ed. P. Bernard & T. Ratiu, *Lecture Notes in Mathematics* 615 48-70. New York: Springer.

SMITH, A. 1972. The differentiability of Riemann's function. *Pr. of the American Mathematical Society* 34, 463-468.

SMITH, H. J. S. 1894. *Collected mathematical papers* (Chelsea reprint).

SMYTHE, R. T. & WIERMANN, J. C., (Eds.) 1978. *First-passage percolation on the square lattice. Lecture Notes in Mathematics,* 671, New York: Springer.

SODERBLOM, L. A. 1980. The Galilean moons of Jupiter. *Scientific American,* 242, 88-100.

SOLER, J. 1973. Sémiotique de la nourriture dans la Bible. *Annales: Economies, Sociétés, Civilisations.* English translation: The dietary prohibitions of the Hebrews. *The New York Review of Books,* June 14, 1979, or *Food and Drink in History:* Ed. R. Foster & O. Ranum. Baltimore: Johns Hopkins University Press.

STANLEY, H. E. 1977. Cluster shapes at the percolation threshold: an effective cluster dimensionality and its connection with critical-point phenomena. *J. of Physics* A10, L211-L220.

STANLEY, H. E., BIRGENEAU, R. J., REYNOLDS, P. J. & NICOLL, J. F. 1976. Thermally driven phase transitions near the percolation threshold in two dimensions. *J. of Physics* C9, L553-L560.

STAPLETON, H. B., ALLEN, J. P., FLYNN, C. P., STINSON, D. G. & KURTZ, S. R. 1980. Fractal form of proteins. *Physical Review Letters* 45, 1456-1459. (*See also* Allen et al. 1981)

STAUFFER, D. 1979. Scaling theory of percolation clusters. *Physics Reports* 34, 1-74.

STEIN, P. R. & ULAM, S. 1964. Non-linear transformation studies on electronic computers. *Rozprawy Matematyczne* 39, 1-66. Also in Ulam 1974, 401-484.

STEINHAUS, H. 1954. Length, shape and area. *Colloquium Mathematicum* 3, 1-13.

STENT, G. 1972. Prematurity and uniqueness in scientific discovery. *Scientific American* 227 (December) 84-93.

STEVENSON, B. 1956. *The home book of quotations* (8th ed.). New York: Dodd-Mead.

STONE, E. C. & MINER, E. D. 1981. Voyager I Encounter with the Saturnian system. *Science* 212, Cover & 159-163.

STRAHLER, A. N. 1952. Hypsometric (area-altitude) analysis of erosional topography. *Geological Society of American Bulletin* 63, 1117-1142.

STRAHLER, A. N. 1964. Quantitative geomorphology of drainage basins and channel networks. In *Handbook of Applied Hydrology* sect. 4-11. Ed. V. T. Chow. New York: McGraw-Hill.

SULLIVAN, D. 1979. The density at infinity of a discrete group of hyperbolic motions. *Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications Mathematiques* 50.

SUWA, N. & TAKAHASHI, T. 1971. *Morphological and morphometrical analysis of circulation in hypertension and ischemic kidney.* Munich: Urban & Schwarzenberg.

SUWA, N., NIWA, T., FUKASAWA, H. & SASAKI, Y. 1963. Estimation of intravascular blood pressure gradient by mathematical analysis of arterial casts. *Tohoku J. of Experimental Medicine* 79, 168-198.

SUZUKI, M. 1981. Extension of the concept of dimension—phase transitions and fractals. *Suri Kagaku (Mathematical Sciences)* 221, 13-20.

SWIFT, J. 1733. On Poetry, a Rhapsody.

TAQQU, M. S. 1970. Note on evaluation of R/S for fractional noises and geophysical records. *Water Resources Research,* 6, 349-350.

TAQQU, M. S. 1975. Weak convergence to fractional Brownian motion and to the Rosenblatt process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 31, 287-302.

TAQQU, M. S. 1977. Law of the iterated logarithm for sums of nonlinear functions of the Gaussian variables that exhibit a long range dependence. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie,* 40, 203-238.

TAQQU, M. S. 1978. A representation for self-similar processes. *Stochastic Processes and their Applications,* 7, 55-64.

TAQQU, M. S. 1979a. Convergence of integrated processes of arbitrary Hermite rank. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 50, 53-83.

TAQQU, M. S. 1979b. Self-similar processes and related ultraviolet and infrared catastrophes. *Random Fields: Rigorous Results in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory.* Amsterdam: North Holland.

TAYLOR, G. I. 1935. Statistical theory of turbulence; parts I to IV. *Pr. of the Royal Society of London* A151, 421-478. Reprinted in Friedlander & Topper 1961, 18-51.

TAYLOR, G. I. 1970. Some early ideas about turbulence. *J. of Fluid Mechanics* 41, 3-11.

TAYLOR, S. J. 1955. The α-dimensional measure of the graph and the set of zeros of a Brownian path. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* 51, 265-274.

TAYLOR, S. J. 1961. On the connection between Hausdorff measures and generalized capacities. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* 57, 524-531.

TAYLOR, S. J. 1964. The exact Hausdorff measure of the sample path for planar Brownian motion. *Pr. of the Cambridge Philosophical Society* 60, 253-258.

TAYLOR, S. J. 1966. Multiple points for the sample paths of the symmetric stable process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* 5, 247-264.

TAYLOR, S. J. 1967. Sample path properties of a transient stable process. *J. of Mathematics and Mechanics* 16, 1229-1246.

TAYLOR, S. J. 1973. Sample path properties of processes with stationary independent increments. *Stochastic Analysis.* Ed. D.G. Kendall & E.F. Har-

ding. New York: Wiley.
TAYLOR, S. J. & WENDEL, J. C. 1966. The exact Hausdorff measure of the zero set of a stable process. *Z. für Wahrscheinlichkeitstheorie* **6**, 170-180.
TENNEKES, H. 1968. Simple model for the small scale structure of turbulence. *Physics of Fluids* **11**, 669-672.
TESNIÈRE, M. 1975. Fréquences des noms de famille. *J. de la Société de Statistique de Paris* **116**, 24-32.
THOMA, R. 1901. Über den Verzweigungsmodus der Arterien. *Archiv der Entwicklungsmechanik* **12**, 352-413.
THOMPSON, D'A. W. 1917-1942-1961. *On growth and form.* Cambridge University Press. The dates refer to the first, second and abridged editions.

ULAM, S. M. 1957. Infinite models in physics. *Applied Probability.* New York: McGraw-Hill. Also in Ulam 1974, 350-358.
ULAM, S. M. 1974. *Sets, numbers and universes: selected works.* Ed. W. A. Beyer, J. Mycielski & G.-C. Rota. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
URYSOHN, P. 1927. Mémoire sur les multiplicités cantoriennes. II: les lignes cantoriennes. *Verhandelingen der Koninglijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.* (Eerste Sectie) XIII no. 4.

VAN DER WAERDEN, B. L. 1979. *Die Pythagoreer.*
VILENKIN, N. YA. 1965. *Stories about sets.* New York: Academic.
VON KOCH, H. 1904. Sur une courbe continue sans tangente, obtenue par une construction géométrique élémentaire. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **1**, 681-704.
VON KOCH, H. 1906. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes. *Acta Mathematica* **30**, 145-174.
VON NEUMANN, J. 1949-1963. Recent theories of turbulence. The dates refer to publication as a report to ONR and in von Neumann, 1961- **6**, 437-472.
VON NEUMANN, J. 1961- *Collected works.* Ed. A. H. Traub. New York: Pergamon.
VON SCHWEIDLER, E. 1907. Studien über die Anomalien in Verhalten der Dielektrika. *Annalen der Physik* (4)**24**, 711-770.
VON WEIZSÄCKER, C. F. 1950. Turbulence in interstellar matter. *Problems of Cosmical Aerodynamics* (IUTAM & IAU). Dayton: Central Air Documents Office.
VOSS, R. F. & CLARKE, J. 1975. "1/f noise" in music and speech. *Nature* **258**, 317-318.
VOSS, R. F. 1978. 1/f noise in music; music from 1/f noise. *J. of the Acoustical Society of America* **63**, 258-263.
VOSS, R. F. 1982. Fourier synthesis of Gaussian fractals: 1/f noises, landscapes, and flakes (to appear).

WALLENQUIST, A. 1957. On the space distribution of galaxies in clusters. *Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik* **2**, 103-110.
WALSH, J. L. 1949. Another contribution to the rapidly growing literature of mathematics and human behavior. *Scientific American* (August issue) 56-58.
WEIBEL, E. R. 1963. *Morphometry of the human lung.* New York: Academic.
WEIBEL, E. 1979. *Stereological methods* (2 vols.). London: Academic.
WEIERSTRASS, K. 1872. Über continuirliche Functionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Unpublished until Weierstrass 1895-, II. 71-74.
WEIERSTRASS, K. 1895-. *Mathematische Werke.* Berlin: Mayer & Muller.
WEYL, H. 1917. Bemerkungen zum begriff der differentialquotenten gebrochener ordnung. *Vierteljahrschrift der Naturförscher Gesellschaft in Zürich* **62**, 296-302.
WHITTAKER, E. T. 1953. *A history of the theories of aether and electricity.* New York: Philosophical Library.
WHYBURN, G. T. 1958. Topological characterization of the Sierpiński curve. *Fundamenta Mathematicae* **45**, 320-324.
WIENER, N. 1948-1961. *Cybernetics.* Paris: Hermann. New York: Wiley (1st edition). Cambridge, MA: M.I.T. Press (2d edition).
WIENER, N. 1953. *Ex-prodigy.* New York: Simon & Schuster. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
WIENER, N. 1956. *I am a mathematician.* Garden City, N.Y.: Doubleday. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
WIENER, N. 1964. *Selected papers.* Cambridge, MA: M.I.T. Press.
WIENER, N. 1976-. *Collected works.* Ed. P. Masani. Cambridge, MA: M.I.T. Press.
WIGNER, E. P. 1960. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics* **13**, 1-14. Also in Wigner 1967, 222-237.
WIGNER, E. P. 1967. *Symmetries and reflections.* Indiana University Press. MIT Press Paperback.
WILLIS, J. C. 1922. *Age and area.* Cambridge University Press.
WILSON, A. G. 1965. Olbers' paradox and cosmology. Los Angeles, Astronomical Society.
WILSON, A. G. 1969. Hierarchical structures in the cosmos. *Hierarchical Structures,* 113-134. Ed. L. L. Whyte, A. G. Wilson & D. Wilson. New York: American Elsevier.
WILSON, K. 1975. The renormalization group: critical phenomena and the Kondo problem. *Reviews of Modern Physics* **47**, 773-840.
WILSON, K. G. 1979. Problems in physics with many scales of length. *Scientific American* **241** (August issue) 158-179.
WILSON, J. T. (Ed.) 1972. *Continents adrift.* Readings from *Scientific American.* San Francisco: W. H. Freeman.
WILSON, T. A. 1967. Design of the bronchial tree. *Nature* **213**, 668-669.
WOLF, D. (Ed.) 1978. *Noise in physical systems.* (Bad Neuheim Conference) New York: Springer.

YAGLOM, A. M. 1957. Some classes of random fields in n-dimensional space, related to stationary random processes. *Theory of Probability and Its Applications,* **2**, 273-320. Tr. R. A. Silverman.
YAGLOM, A. M. 1966. The influence of fluctuations in energy dissipation on the shape of turbulence characteristics in the inertial interval. *Doklady Akademii Nauk SSSR* **16**, 49-52. (English trans. *Soviet Physics Doklady* **2**, 26-29.)
YODER, L. 1974. Variation of multiparameter Brownian motion. *Pr. of the American Mathematical Society* **46**, 302-309.
YODER, L. 1975. The Hausdorff dimensions of the

graph and range of N-parameter Brownian motion in d-space. *Annals of Probability* 3, 169-171.

YOUNG, W. H. & YOUNG, G. C. 1906. *The theory of sets of points*. Cambridge University Press.

YULE, G. UDNY 1924. A mathematical theory of evolution, based on the conclusions of Dr. J. C. Willis, F. R. *Philosophical Tr. of the Royal Society (London)* 213 B, 21-87.

ZIMMERMAN, M. H. 1978. Hydraulic architecture of some diffuse-porous trees. *Canadian J. of Botany*, 56, 2286-2295.

ZIPF, G. K. 1949. *Human behavior and the principle of least-effort*. Cambridge, MA: Addison-Wesley. (Hefner reprint.)

ZYGMUND, A. 1959. *Trigonometric series*. Cambridge University Press.

维数索引

欧氏空间的维数(E),分维(D)和拓扑维(D_T),粗体数字指整章页码。
当欧氏空间的维数用 E 表示时,其值可是任意正整数。

Ⅰ. 基本几何形状及其精确的 D 和 D_T

	E	D	D_T	章
* 欧几里得几何中的“标准”点集(满足 $D=D_T$)				
单点	E	0	0	
有限个点	E	0	0	
不可列点集	E	0	0	
直线,圆:所有其他的标准曲线	E	1	1	
平面圆盘:所有其他的标准曲面	E	2	2	
$\mathbb{R}^3$ 或 $\mathbb{R}^E$ 中的球:所有其他的标准体积	E	E	E	
* 那些(与预料的相反)不是分形的点集				
充满平面的皮亚诺“曲线”	2	2	2	**7**
康托魔鬼楼梯	2	1	1	
莱维魔鬼楼梯	2	1	1	
$\mathbb{R}$ 中的普通布朗轨迹	1	1	1	
$\mathbb{R}^E$ 中的分数布朗轨迹,其 $H<1/E$	E	E	E	
* 非随机分形集(满足 $D>D_T$)				
康托尘埃:直线上的三元点集	1	log2/log3	0	
康托尘埃:三元以外的。	E	$0<D<E$	0	
科赫曲线:三元雪花	2	log4/log3	1	**6**
科赫曲线:虚构薄片的边界	2	log4/log3	1	
科赫曲线:Harter - Heightway 龙的皮肤	2	1.5236	1	
$\mathbb{R}^2$ 中的科赫曲线:三元以外的	2	$1<D<2$	1	**6**
谢尔宾斯基垫片和箭头曲线	2	log3/log2	1	**14**
勒贝格 - 奥斯古德怪物曲线	2	2	1	**15**

勒贝格－奥斯古德怪物曲面	3	3	2	15
* 随机分形集				
布朗线－E空间分形：				
－当E≥2时的轨迹	E	2	1	
－有$\mathbb{R}^2$中的函数	2	3/2	1	
－在$\mathbb{R}^{E-1}$(E>2)中的函数	E	1+(E－1)/2	1	
－线－线函数的零集	1	1/2	0	
布朗空间(或球)－线的分形：				
－$\mathbb{R}^2$－$\mathbb{R}$函数	3	5/2	2	
－$\mathbb{R}^2$到$\mathbb{R}$函数的零集	2	3/2	1	
－伯杰斯标置湍流等温面	3	5/2	2	30
布朗H分数的线－空间分形：				
－当H>1/E时的轨迹	E	1/H	1	
－零集	1	1－H	0	
－函数	2	2－H	1	
布朗H分数的空间－线分形：				
－$\mathbb{R}^2$－$\mathbb{R}$的函数	3	3－H	2	
－$\mathbb{R}^2$－$\mathbb{R}$函数的零集	2	2－H	1	
－柯尔莫戈洛夫标量湍流等温面	3	8/3	2	30
莱维稳定过程，其D<2：－轨迹	E	D	0	

Ⅱ.其他的几何形状，其D_T和估算的D

* 无标度、非随机分形集			
阿波罗垫片和网(精确边界：1.300197<D<1.314534)	2	1.3058	1
* 随机分形集			
$\mathbb{R}^2$中重新标度的自回避随机行走/$\mathbb{R}^2$中的多边形	2	1.33	1
$\mathbb{R}^3$中重新标定的自回避随机行走	3	1.67	1
在列奥波德和朗拜因网格中的河流	2	1.28	1
临界的伯努利逾渗集团			
－平面上的完全集团	2	1.89	1
－平面上的骨架	2	1.6	1

$\mathcal{R}^E$中的骨架(小于 E)	E	$\log_2(E+1)$	1	

Ⅲ. 自然界的标准(欧几里得的)对象,及其 D_T 和 D

非常精致的小珠	E	0	0	
非常精致的线	E	1	1	
空心球(里边和外边都磨光)	3	2	2	
磨光的球(实心)	3	3	3	

Ⅳ. 自然界的分形对象,估算的 D_T 及其典型的 D

海岸线(理查森指数)	2	1.2	1	
河流网络堆积成的岸	2	2	1	**7**
各条河流的略图(哈克指数)	2	1.2	1	
血管系统	3	3	2	
布满分支的肺膜	3	2.90	2	
树皮	3	3	2	
分形误差	1	0.30	8	**8**
标明大小的标度区内的星系	3	1.23	0	**9**
湍流:耗散支撑	3	2.50 - 2.60	2	**10,11**
字的频率	n.a.	0.9	n.a.	**38**

人名和主题词索引

作者为中译本添加的新材料

A. AHARONY & J. FEDER • eds • *Fractals in Physics* • Proceedings of an International Conference honoring BBM on his 65th birthday • Vence, France, 1-4 Oct. 1989 • Special issue of *Physica D* • Volume 38, Nos. 1-3 • Paperback reprint • Amsterdam: North Holland • 1990.

A. AMANN, L. CEDERBAUM & W. GANS • eds • *Fractals, Quasicrystals, Chaos, Knots and Algebraic Quantum Mechanics* • Maratea, 1987 Proceedings • Boston-Dordrecht: Kluwer • 1988.

A. ARNÉODO, F. ARGOUL, B. BACRY, J. ELEZGARAY & J. F. MUZY • *Ondelettes, multifractales et turbulence* • Paris: Diderot • 1995.

D. AVNIR • ed • *The Fractal Approach to Heterogeneous Chemistry* • New York: Wiley • 1989.

S. BALDO & C. TRICOT • *Introduction à la topologie des ensembles fractals* • Montréal: Centre de recherches mathématiques • 1991.

S. BALDO, F. NORMANT & C. TRICOT • *Fractals in Engineering* • Montréal 1994 Proceedings • Singapore: World Scientific • 1994.

C. BANDT, S. GRAF & M. ZÄHLE • 1995 • *Fractal Geometry and Stochastics* • Finsterbergen 1994 Proceedings • Basel & Boston: Birkhauser • 1995.

A.-L. BARABASI & E. STANLEY • *Fractal Concepts in Surface Growth* • Cambridge: University Press • 1995.

G. I. BARENBLATT • *Similarity, Self-similarity and Intermediate Asymptotics* • New York: Consultants Bureau • 1979 • Second Russian edition • Moscow • 1983.

M. F. BARNSLEY • *Fractals Everywhere* • Orlando FL: Academic Press • 1988 & 1994. German Translation • *Fraktale überall* • Heidelberg: Spectrum • 1991.

M. F. BARNSLEY • ed • *Fractal approximation theory* • Special issue of *The Journal of Constructive Approximation* • Volume 5, No 1 • New York: Springer • 1989.

M. F. BARNSLEY & F. ANSON • *The Fractal Transform* • Wellesley MA: A. K. Peters • 1993.

M. F. BARNSLEY & S. DEMKO • eds • *Chaotic Dynamics and Fractals* • Orlando FL: Academic Press • 1987.

M. F. BARNSLEY & L. P. HURD • *Fractal Image Compression* • Wellesley MA: A. K. Peters • 1993.

W. BARTH • *Fraktale, Long Memory und Aktienkurse* • *Eine statistische Analyse für den deutschen Aktienmarkt* • Bergisch Gladbach (Germany): Josef Eul • 1996.

C. C. BARTON & P. R. LAPOINTE • eds • *Fractal Geometry and its Use in the Earth Sciences* • New York: Plenum • 1995.

C. C. BARTON & P. R. LAPOINTE • eds • *Fractal Geometry and its Uses in the Geosciences and in Petroleum Geology* • New York: Plenum • 1995.

J. C. BASSINGTHWAITE, L. S. LIEBOVITCH & B. J. WEST • *Fractal Physiology* • New York: Oxford University Press • 1994.

M. BATTY & P. LONGLEY • *Fractal Cities: A Geometry of Form and Function* • Academic Press • 1994.

J. BÉLAIR & S. DUBUC • eds • *Fractal Geometry and Analysis* • Boston: Kluwer • 1991.

G. BIARDI, M. GIONA & A. R. GIONA • ed • *Chaos and Fractals in Chemical Engineering* • Rome 1993 Proceedings • Singapore: World Science • 1995.

R. L. BLUMBERG-SELINGER, J. J. MECHOLSKY, A. E. CARLSSON, & E. R. FULLER JR. • eds • *Fracture – Instability Dynamics, Scaling and Ductile/Brittle Behavior* • Proceedings of the M.R.S. Fall Meeting, 1995, Boston • Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1995.

K. S. BIRDI • ed • *Fractals in Chemistry, Geochemistry, and Biophysics* • New York: Plenum • 1993.

N. BOCCARA & M. DAOUD • eds • *Physics of Finely Divided Matter* • Berlin: Springer • 1985.

B. A. BONDARENKO • *Generalized Pascal Triangles and Pyramids; their Fractals, Graphs, and Applications* • Tashkent (USSR): Publishing House of the Uzbek Academy of Sciences • 1990.

■ English translation by R. C. Bollinger • Santa Clara CA: The Fibonacci Association • 1993.

C. BOVILL • *Fractal Geometry in Architecture and Design* • Basel & Boston: Birkhaüser • 1996.

A. BUNDE & S. HAVLIN • eds • *Fractals and Disordered Systems* • New York: Springer • 1991.

A. BUNDE & S. HAVLIN • eds • *Fractals in Science: An Interdisciplinary Approach* • New York: Springer • 1994.

A. B. CAMBEL • *Applied Chaos Theory* • New York: Academic • 1992.

L. CARLESON & T. GAMELIN • *Complex Dynamics* • New York: Springer • 1993.

A. CARPINTERI • ed • *Size-Scale Effects in the Failure Mechanisms of Materials and Structures* • London: E & FN Spon (Chapman & Hall) • 1996.

G. CHERBIT • ed • *Fractals: dimensions non entières et applications* • French • Paris: Masson • 1987.
■ English translation • *Non-Integral Dimensions and Applications* • New York: Wiley • 1991.

F. CRAMER • *Chaos and Order* • New York: VCH • 1993.

A. J. CRILLY, R. A. EARNSHAW & H. JONES • *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things* • New York: Springer • 1993.

H. Z. CUMMINS, D. J. DURIAN, D. L. JOHNSON & H. E. STANLEY • eds • *Disordered Materials and Interfaces* • The fractal aspects • Proceedings of the MRS Fall Meeting, 1995, Boston • Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1996.

J. CZYZ • *Paradoxes of measures and dimensions originating in Felix Hausdorff's idas* • Singapore: World Scientific • 1994.

R. L. DEVANEY • *Chaos, Fractals and Dynamics. Computer Experiments in Mathematics* • Reading MA: Addison Wesley • 1990.

R. L. DEVANEY • ed • *Dynamical Systems, Chaos and Fractals* • Special issue of *The College Mathematics Journal* • Volume 22, No.1 • 1991.

R. L. DEVANEY • *A First Course in Dynamical Systems: Theory and Experiment* • Reading MA: Addison Wesley • 1992.

R. L. DEVANEY • ed • *Complex Dynamical Systems: the Mathematics Behind the Mandelbrot and Julia Sets* • Proceedings of Symposia in Applied Mathematics, 49 • Providence, RI: American Mathematical Society • 1994.

R. L. DEVANEY & L. KEEN • eds • *Chaos and Fractals: The Mathematics Behind the Computer Graphics* • A.M.S. Short Course 1988, Lecture Notes • Providence RI: American Mathematical Society • 1988.

S. DUBUC • ed • *Atelier de géométrie fractale* • Montréal 1986 Proceedings • Special issue of *Annales des Sciences Mathématiques du Québec* • Volume 11, No. 1 • 1987.

R. A. EARNSHAW, T. CRILLY & H. JONES • eds • *Fractals and Chaos* • New York: Springer • 1990.

G. A. EDGAR • *Measure, Topology, and Fractal Geometry* • New York: Springer • 1990.

G. A. EDGAR • ed • *Classics on Fractals* • Reading MA: Addison Wesley • 1993.

C. J. G. EVERTSZ, H.-O. PEITGEN & R. F. VOSS • eds • *Fractal Geometry and Analysis* • *The Mandelbrot Festschrift, Curaçao, 1995* • Singapore: World Scientific • 1996.

K. J. FALCONER • *The Geometry of Fractal Sets* • Cambridge, UK: University Press • 1984.

K. J. FALCONER • *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications* • New York: Wiley • 1990

F. FAMILY & D. P. LANDAU • eds • *Kinetics of Aggregation and Gelation* • Athens, GA 1985 Proceeding • Amsterdam, North Holland • 1984.

F. FAMILY, P. MEAKIN, B. SAPOVAL & R. WOOL • eds • *Fractal Aspects of Materials* • MRS Symposium, Boston • Pittsburgh: Materials Research Society • 1995.

F. FAMILY & T. VICSEK • eds • *Dynamics of Fractal Surfaces* • Singapore: World Scientific • 1991.

L. T. FAN, D. NEOGI & M. YASHIMA • *Elementary Introduction of Spatial and Temporal Fractals* • Lecture Notes in Chemistry 55 • New York: Springer • 1991.

M. FARGE, J. HUNT & J. C. VASSILICOS • eds • *Wavelets, Fractals and Fourier Transforms: New Developments and New Applications* • Oxford University Press • 1993.

J. FEDER • *Fractals* • New York: Plenum • 1988.

J. FEDER & T. JOSSANG • *Fractals in Oil Technology* • Oslo: Fracton (limited distribution) • 1988.

P. FISCHER & W. SMITH • eds • *Chaos, Fractals and Dynamics* • New York: M. Dekker • 1985.

Y. FISHER • ed • *Fractal Image Compression* • *Theory and Application to Digital Images* • New York: Springer • 1994.

M. FLEISCHMANN, D. TILDESLEY & R. C. BALL • eds • *Fractals in the Natural Sciences* • London, 1988 Proceedings • Special issue of the Proceedings of the Royal Society of London • Reprint, Princeton University Press • 1990.

P. FRANKHAUSER • *La fractalité des structures urbaines* • Paris: Anthropos/Economica • 1994.

J. F. GOUYET • *Physique et structures fractales* • Paris: Masson • 1992. ■ *Physics and Fractal Structures* • New York: Springer • 1996.

M. GRAETZEL & J. WEBER • *Fractal Structures, Fundamentals and Applications in Chemistry* • Special issue of *New Journal of Chemistry* • Volume 14 No.3 • March 1990.

C. GUANGYUE ET AL • eds • *Fractal Theory and its Applications* • Proceedings of the First National Scientific Congress • Chinese • Chengdu (China): Sichuan University Press • 1989.

H. H. HARDY & R. A. BEIER • *Fractals in Reservoir Engineering* • Singapore: World Scientific • 1994.

A. HARRISON • *Fractals in Chemistry* • Oxford University Press • 1995.

H. M. HASTINGS & G. SUGIHARA • *Fractals: A User's Guide for the National Sciences* • Oxford University Press • 1994.

H. HAWKINS • *Strange Attractors. Literature, Culture and Chaos Theory* • New York: Prentice-Hall • 1995.

A. HECK & T. N. PERDANG • eds • *Applying Fractals in Astronomy* • New York: Springer • 1991.

R. A. HOLMGREN • *A First Course in Discrete Dynamical Systems* • Second edition • New York • Springer • 1996.

A. J. HURD • ed • *Fractals: Selected Reprints* • College Park MD: American Association of Physics Teachers • 1989.

A. J. HURD, BBM & D. A. WEITZ • eds • *Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems* • Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston • Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1987.

INTEGRATED SYSTEMS, INC. • *Snapshots: True-Color Photo Images Using the Fractal Formatter* • Wellesley MA: A. K. Peters • 1992.

R. JULLIEN & R. BOTTET • *Aggregation and Fractal Aggregation* • Singapore: World Scientific • 1987.

R. JULLIEN, J. KERTESZ, P. MEAKIN, AND D. E. WOLF • eds • *Surface Disordering: Growth, Roughening, and Phase Transitions* • New York: Nova Science • 1993 • Proceedings Les Houches 1992

R. JULLIEN, L. PELITI&IE., R. RAMMAL & N. BOCCARA • eds • *Universalities in Condensed Matter* • Les Houches, 1988, Proceedings • New York: Springer • 1988.

H. JÜRGENS ET AL • eds • *Chaos und Fraktale* • Heidelberg: Spektrum der Wissenschaft • 1989.

J. A. KAANDORP • *Fractal Modeling: Growth Form in Biology* • New York: Springer • 1994.

S. K. KACHIGAN • *The Fractal Notion: A Modern Analytical Tool* • New York: Radius Press • 1992.

J. H. KAUFMAN, J. E. MARTIN & P. W. SCHMIDT • eds • *Fractal Aspects of Materials, 1989* • Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston • Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1989.

B. KAYE • *A Random Walk through Fractal Dimensions* • New York: VCH • 1989.

B. KAYE • *Chaos & Complexity: Discovering the Surprising Pattern of Science and Technology* • New York: VCH • 1993.

G. KORVIN • *Fractal Models in the Earth Sciences* • Amsterdam: Elsevier • 1992.

J. KRIZ • *Chaos und Struktur: Systemtheorie Band 1* • Quint essence • 1993.

J. H. KRUHL • ed • *Fractals and Dynamic Systems in Geoscience* • New York: Springer • 1994.

J. H. KRUHL & H. J. KÜMPEL • eds • *Fractals in Geoscience* • Special issue of *Geologische Rundschau – International Journal of Earth Sciences* (Springer) • Volume 85, No. 1 • 1996.

V. I. KUVSHINOV & D. W. SEROW • *Non-linear phenomena ...: fractals, ...* • Minsk: Academy • 1993.

R. B. LAIBOWITZ, BBM & D. E. PASSOJA • eds • *Fractal Aspects of Materials* • Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston • Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1985.

L. LAM • ed • *Nonlinear physics for beginners: Fractals,.....* • Singapore: World Scientific • 1997.

N. SUI-NGAN LAM & L. DE COLA • eds • *Fractals in Geography* • Englewood Cliffs NJ: Prentice Hall • 1993.

A. LASOTA & M. MACKEY • *Chaos, Fractals and Noise* • *Stochastic Aspects of Dynamics* • New York: Springer • 1994.

H. LAUWERIER • *Fractals* • Dutch • Amsterdam: Aramith • 1987.
■ English translation • *Fractals: Endlessly repeated geometrical figures* • Princeton University Press • 1991.

H. LAUWERIER • *The World of Fractals (Een wereld van Fractals)* • Dutch • Amsterdam: Aramith • 1991.

A. LE MÉHAUTÉ • *Les géométries fractales* • French • Paris: Hermès • 1990.
■ English translation • *Fractal Geometries* • Boca Raton, FL: CRC Press • 1991.

A. LESNE • *Méthodes de renormalisation: phénomènes critiques, chaos, structures fractales* • *Paris: Eyrolles Sciences* • *1996.*

T. LINDSTROM • *Brownian Motion on Nested Fractals* • *Providence, RI: American Mathematical Society* • *1990.*

B. MANDELBROT • *Les objets fractals: forme, hasard et dimension* • *Paris: Flammarion* • *1975.*

B. MANDELBROT • *Les objets fractals: forme, hasard et dimension* • *2e édition* • *Paris: Flammarion* • *1984.*

■ *Gli oggetti frattali: forma, caso e dimensione* • *Italian Translation by Roberto Pignoni* • *Preface by Luca Peliti & Angelo Vulpiani* • *Torino: Giulio Einaudi, 1987.*

■ *Los objetos fractales: forma, azar y dimensión* • *Spanish Translation by Josep Maria Llosa* • *Barcelona: Tusquets, 1987.*

B. MANDELBROT • *Les objets fractals: forme, hasard et dimension* • *3e édition* • *suivie de Survol du langage fractal* • *Paris: Flammarion* • *1989.*

■ *Objektu fraktalak* • *forma, zoria eta dimensioa* • *Basque Translation by Inaki Irazabalbeitia. Usurbil: Elhuyar* • *1992.*

■ *Fraktalni obekti* • *Bulgarian Translation* • *Sofia: St. Kliment Ohridski Press* • *1996.*

■ *Objectos fractais* • *forma, acaso e dimensão seguido de panorama da linguagem fractal* • *Portuguese Translation by Carlos Fiolhais & J. L. M. Lima* • *Lisboa: Gradiva* • *1991.*

■ *Rumanian Translation* • *Bucharest: Nemira* • *1996.*

B. MANDELBROT • *Les objets fractals: forme, hasard et dimension* • *4e édition (collection de poche Champs)* • *Paris: Flammarion* • *1995.*

■ *Chinese Translation by Wen Zhi Ying.*

B. B. MANDELBROT • *Fractals: Form, Chance and Dimension* • *San Francisco CA: W. H. Freeman and Company* • *1977.*

B. B. MANDELBROT • *The Fractal Geometry of Nature* • *New York NY: W. H. Freeman and Company* • *1982.*

■ *Da Tsi-ran De Fen-hsing Ji-he* • *Chinese Translation* • *Shanghai: Far East Publishers. In progress* • *Chendu City: Sichuan: Education Press* • *1997.*

■ *Die fraktale Geometrie der Natur* • *German Translation by Reinhilt & Ulrich Zähle* • *Basel: Birkhauser & Berlin: Akademie-Verlag* • *1987.*

■ *Korean Translation* • *Seoul: Shinlan Publishing Media* • *In preparation.*

■ *Fraktal Kikagaku. Japanese Translation directed by Heisuke Hironaka* • *Tokyo: Nikkei Science* • *1984.*

■ *Korean Translation* • *Seoul: Kyong Moon Publisher* • *In progress* •

■ *Geometria Fraktalna Natury* • *Polish Translation* • *Warsaw: Spacja* • *In preparation.*

■ *La geometria fractal de la naturaleza* • *Spanish Translation* • *Barcelona: Tusquets* • *In Preparation.*

B. B. MANDELBROT • *Fractals: Basic Concepts, Computation and Rendering* •
Notes for a course given in San Francisco CA on July 23, 1985 at SIGGRAPH 85.
(Association for Computing Machinery; Special Interest Group on Computer Graphics.)

•Reprint with additions and deletions • Professional Development Seminar given in Boston, MA on March 3, 1986. (Boston Chapters of Siggraph and ACM.)

B. MANDELBROT • *Ensembles fractals* •
Notes de l'école d'hiver CEA - EDF - INRIA • Roquencourt (France) Jan. 1987.

B. B. MANDELBROT • *La geometria della natura* •
Milano: Imago (per Montedison Progetto Cultura) • 1987 • Roma: Edizioni Theoria • 1989.

B. B. MANDELBROT & D. E. PASSOJA • *eds* • *Fractal Aspects of Materials: Metal and Catalyst Surfaces, Powders and Aggregates* • *Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston* •
Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1984.

J. E. MARTIN & A. J. HURD • *Fractals in Materials Science* • *M.R.S. Fall Meeting Course Notes* •
Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1986, 1987, 1988 and 1989 • out of print.

P. R. MASSOPUST • *Fractal Functions, Fractal Surfaces and Wavelets* • *Academic Press • 1994.*

P. MATTILA • *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces* • *Fractals and Rectifiability*
• *Cambridge University Press • 1995.*

G. MAYER-KRESS • *ed* • *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems* • *Pecos River, 1985 Proceedings*
• *New York: Springer • 1986.*

J. L. MCCAULEY • *Chaos, Dynamics and Fractals* • *an Algorithmic Approach to Deterministic Chaos* •
Cambridge University Press • 1993.

P. MEAKIN • *Fractals, Scaling and Growth Far From Equilibrium* • *Cambridge University Press • 1996.*

R. K. MILLER & T. C. WALKER • *Chaos, Fractals and Non-Linear Dynamic Systems* •
Lilburn, GA: Future Technology Surveys • 1989.

R. K. MILLER & T. C. WALKER • *Fractals & Chaos: Exploiting Real-World Applications* •
Norcross, GA: SEAI Technical Publications • 1991.

S. MIYAZIMA • *ed* • *Future of Fractals* • *Chubu, 1995 Proceedings* • *Singapore: World Scientific • 1996.*

F. C. MOON • *Chaotic and Fractal Dynamics* • *New York: Wiley • 1992.*

A. V. NEIMARK • *Percolation and Fractals in Colloid and Interface Science* • *Singapore: World Scientific • 1993.*

T. F. NONNENMACHER, G. A. LOSA & E. R. WEIBEL • *Fractals in Biology and Medicine* •
Basel: Birkhauser • 1993.

L. NOTTALE • *Fractal Space-time and Microphysics* • *Towards a Theory of Scale Relativity* •
Singapore: World Scientific • 1995.

M. M. NOVAK • *ed* • *Fractal Reviews in the Natural and Applied Sciences* • *London: Chapman & Hall • 1995.*

A. OUSTALOUP • *La dérivation non entière* • *Paris: Hermès* • 1995.

J. PALIS & F. TAKENS • *Hyperbolicity, Stability and Chaos at Homoclinic Bifurcations: Fractal Dimensions and Infinitely Many Attractors in Dynamics* • *Cambridge University Press* • 1993.

D. PEAK & M. FRAME • *Chaos Under Control* • *The Art and Science of Complexity* • *New York: Freeman* • 1994.
■ *German translation* • *Komplexität-das gezähmte Chaos* • *Basel: Birkhauser* • 1995.

H.-O. PEITGEN, J. M. HENRIQUES & L. F. PENEDO • *eds* • *Fractals in the Fundamental and Applied Sciences* • *Proceedings of the IFIP Conference on Fractals* • *Lisbon, June 1990* • *Amsterdam: Elsevier* • 1992.

H.-O. PEITGEN & P. H. RICHTER • *The Beauty of Fractals* • *New York: Springer* • 1986.
■ *Italian translation* • *La Bellezza di Frattali* • *Torino: Boringhieri* • 1988.

H.-O. PEITGEN & D. SAUPE • *eds* • *The Science of Fractal Images* • *New York: Springer* • 1988.
■ *Japanese translation* • *Tokyo: Springer* • 1991.

M. PERUGGIA • *Discrete Iterated Function Systems* • *Wellesley MA: A. K. Peters* • 1993.

E. E. PETERS • *Chaos and Order in the Capital Markets* • *New York: Wiley* • 1991.

E. E. PETERS • *Fractal Market Analysis* • *Applying Chaos Theory to Investment and Economics* • *New York: Wiley* • 1994.

A. G. D. PHILIP, A. ROBUCCI, M. FRAME & K. W. PHILIP • *Series on Fractals I: Midgets on the Spike* • *Schenectady, NY: L. Davis Press* • 1991.

L. PIETRONERO • *ed* • *Fractals' Physical Origins and Properties* • *Erice, 1988 Proceedings* • *New York: Plenum* • 1989.

L. PIETRONERO & E. TOSATTI • *eds* • *Fractals in Physics* • *Trieste, 1985 Proceedings* • *Amsterdam: North-Holland* • 1986 ■ *Russian translation* • *Fraktaly v fizike* • *Edited by Ya. S. Sinai & I. M. Khalatnikov* • *Moscow: Mir* • 1988.

E. R. PIKE & L. A. LUGIATO • *Chaos, Noise and Fractals* • *Bristol: Adam Hilger* • 1987.

P. PRUSINKIEWICZ, J. HANAN ET AL • *Lindenmayer Systems, Fractals and Plants* • *Lecture Notes in Biomathematics* • *Volume 79* • *New York: Springer* • 1989.

P. PRUSINKIEWICZ & A. LINDENMAYER • *The Algorithmic Beauty of Plants* • *New York: Springer* • 1990.

R. PYNN & T. RISTE • *eds* • *Time Dependent effects in Disordered materials* • *New York: Plenum* • 1987.

R. PYNN & A. SKJELTORP • *eds* • *Scaling Phenomena in Disordered Systems* • *New York: Plenum* • 1985.

S. -X. QU • *Fractal Theory and its Applications in Complex Systems.* *Xian (China): Shaanxi People's Press* • 1996.

P. J. REYNOLDS • *ed* • *On Clusters and Clustering: From Atoms to Fractals* • *Amsterdam: North-Holland* • 1993.

M. O. ROBBINS, J. P. STOKES & T. WITTEN • *eds* • *Scaling in Disordered Materials, Fractal Systems and Dynamics* • *Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston* • *Pittsburgh PA: Materials Research Society* • 1990.

H. SAGAN • *Space-Filling Curves* • *New York: Springer* • 1994.

M. SAHAMI • *Applications of Percolation Theory* • London: Taylor & Francis • 1994.

T. SANDEFUR • *Discrete Dynamical Systems: Theory and Applications* • Oxford University Press • 1990.

B. SAPOVAL • *Les fractales/Fractals* • Paris: Aditech • 1990.

B. SAPOVAL • *Universalités et fractales: jeu d'enfants ou délit d'initiés?* • Paris: Flammarion • 1997.

D. W. SCHAEFER, R. B. LAIBOWITZ, BBM & S. H. LIU • eds • *Fractal Aspects of Materials II* • *Extended Abstracts of a Symposium, Boston* • Pittsburgh PA: Materials Research Society • 1986.

M. SCHARA & D. TEZAK • eds • *Non-Equilibrium .... and Fractals in Chemistry* • Special issue of *Croatica Chemica Acta* Vol. 65, No. 2 • Zagreb • 1992.

D. SCHERTZER & S. LOVEJOY • eds • *Non-Linear Variability in Geophysics: Scaling and Fractals* • Dordrecht (Holland) & Norwell MA: Kluwer • 1991.

D. SCHERTZER & S. LOVEJOY • eds • *Multifractals and Turbulence* • *Fundamentals and Applications in Geophysics* • Singapore: World Scientific • 1995.

C. H. SCHOLZ & BBM • eds • *Fractals in Geophysics*. Basel and Boston: Birkhauser • Special issue of *Pure and Applied Geophysics* • Vol. 131, Nos. 1/2 • 1989.

M. SCHRÖDER • *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise* • New York: Freeman • 1991.

M. F. SHLESINGER, BBM & R. J. RUBIN • eds • *Proceedings of the Gaithersburg Symposium on Fractals in the Physical Sciences* • Special issue of *The Journal of Statistical Physics* • Volume 36 • New York: Plenum • 1984.

J. M. SMITH • *Fundamentals of Fractals for Engineers and Scientists* • New York: Wiley • 1991.

H. E. STANLEY & N. OSTROWSKY • eds • *On Growth and Form: Fractal and Non Fractal Patterns in Physics* • Cargèse, 1985 Proceedings • Boston & Dordrecht: Nijhoff-Kluwer • 1986.

H. E. STANLEY & N. OSTROWSKY • eds • *Random Fluctuations and Pattern Growth: Experiments and Models* • Cargèse, 1988 Proceedings • Boston: Kluwer • 1988.

D. STAUFFER & E. H. STANLEY • *From Newton to Mandelbrot: A Primer in Modern Theoretical Physics with Fractals* • New York: Springer • 1990 • Second edition – with diskette • 1995.

D. STAUFFER & A. AHARONY • *Introduction to Percolation Theory* • Second edition • London: Taylor & Francis • 1992.

D. STOYAN & H. STOYAN • *Fraktale-Formen-Punktfelder. Methoden der Geometrie Statistik* • Berlin: Akademie Verlag • 1992 • English translation. • *Fractals, Random Shapes and Point Fields. Methods of Geometrical Statistics* • Chichester, U.K.: Wiley • 1994.

Y. TAKAHASHI • ed • *Algorithms, Fractals, and Dynamics* • New York: Plenum • 1996.

H. TAKAYASU • *Fractals in the Physical Sciences* • Japanese • Tokyo: Asakura Shoten • 1985.
■ English translation • Manchester University Press • 1990.

H. & M. TAKAYASU • *What is a Fractal?* • Japanese • Tokyo: Diamond • 1988.

H. TONG • ed • *Dimension Estimation and Models* • Singapore: World Scientific • 1993.

C. TRICOT • *Courbes et dimension fractale* • Paris: Springer & Montréal: Editions Science et Culture • 1993.

■ *English translation* • *Curves and Fractal Dimension* • *New York: Springer* • 1993.

D. L. TURCOTTE • *Fractals and Chaos in Geology and Geophysics* • *Cambridge University Press* • 1992.

S. USHIKI • *The world of Fractals: Introduction to Complex Dynamical Systems* • *Japanese* • *Tokyo: Nippon Hyoron Sha* • 1988.

T. VAGA • *Profitting from Chaos* • *New York: McGraw-Hill* • 1994.

T. VICSEK • *Fractal Growth Phenomena* • *Singapore: World Scientific* • 1989 • *Second edition* • 1992.

T. VICSEK, M. SHLESINGER & M. MATSUSHITA • *eds* • *Fractals in Natural Sciences: International Conference on the Complex Geometry in Nature* • *Budapest, 1993, Proceedings* • *Singapore: World Scientific* • 1994.

D. A. WEITZ, L. M. SANDER & B. B. MANDELBROT • *eds* • *Fractal Aspects of Materials: Disordered Systems* • *Extended Abstracts of a MRS Symposium, Boston* • *Pittsburgh PA: Materials Research Society* • 1988.

B. J. WEST • *Fractal Physiology and Chaos in Medicine* • *Singapore: World Scientific* • 1990.

B. J. WEST & B. DEERING • *Fractal Physiology for Physicists: Lévy Statistics* • *Amsterdam: Elsevier* • 1994.

B. J. WEST & B. DEERING • *The Lure of Modern Science* • *Fractal Thinking* • *Singapore: World Scientific* • 1995.

K. R. WICKS • *Fractals and Hyperspaces* • *Springer* • 1991.

M. J. WU • *Fractal Information Theory* • *Shanghai (China)* • 1993.

H. XIE • *Fractals in Rock Mechanics* • *Rotterdam & Brookfield, VT: A. A. Balkema* • 1993.

G. ZASLAWSKY, M. F. SHLESINGER & U. FRISCH • *eds* • *Lévy Flights and Related Phenomena in Physics* • *Nice 1994 Proceedings* • *New York: Springer* • 1995.

译 后 记

分形理论是近20年来迅速发展起来的新学科，它与混沌理论和孤子理论一起成为近期非线性科学研究的三个主要内容。

本书是分形几何学的创始人曼德布罗特的经典之作，全面、完整地介绍了分形几何学的由来、发展和应用。原著是1983年出版的，在这次出版中译本时作者又提供了自1983年至1996年的最新文献目录，使中译本更具参考价值。

本书从上海交大凌复华教授提出并开始翻译至今已有十多年的时间，经历了许多曲折。要感谢原书作者曼德布罗特教授的大力支持，不但专为中译本写了序言，提供了新的参考文献，还协助解决了著作版权问题，使得中译本能顺利出版。更要感谢上海远东出版社着眼于推动科技进步，积极承担了本书的出版任务。

本书的翻译工作自始至终得到北京大学朱照宣教授的支持和指导，帮助解决了多处译文难点和中文译名问题。

本书翻译过程中得到了复旦大学许多老师、同学的帮助。金福临教授给我热情支持和协助，郭毓驹教授帮我解决了许多译文疑难问题。外文系朱静教授帮我解决曼德布罗特德简历中涉及的法文名词翻译。还有赵越和陆忠等同学协助翻译和抄写了部分章节的初稿。更要特别感谢在潘涛博士的大力支持下，请刘亚新硕士为本书翻译了最后三章，使本书的译稿全面完成。

译者要特别感谢中国新学科研究会刘洪先生，为将本书稿推荐给有关出版社他付出了巨大努力。

四川教育出版社的何杨先生和四川大学李后强教授阅读了本书的大部分译稿，改正了许多错误，并为本书润色。译者对他们的辛勤劳动致以深切的谢意！

本书第1章至第7章以及第12章至第14章由凌复华教授翻译；第40章至第42章由刘亚新硕士翻译；其余各章均由本人翻译，并负责全书的定稿和对译文的错误负责。北京大学黄永念教

授为本书作了审校工作，他认真负责，一丝不苟，并广泛查阅资料，纠正了许多译文中的错误，提高了译文质量，使本人受益颇多。

由于本书的翻译工作量很大，单正文就超过五十万字。而且作者用"散文"笔法叙述，涉及的内容上至天文，下至地理，说古论今，引经据典，翻译的难度也较大。鉴于本人才疏学浅，虽经多次修改译稿，错误仍然难免，恳请读者批评指正。

陈守吉

一九九八年七月于复旦大学

[General Information]
书名=大自然的分形几何学 （最新修订本）
作者=伯努瓦·B·曼德布罗特著 陈守吉 凌复华译
页数=575
SS号=11105124
出版日期=1998年12月第1版
出版社=上海远东出版社